OLYMPIADES MATHÉMATIQUES
LYCÉE, PREMIÈRE

ACADÉMIE DE TOULOUSE
2020

SUJET + CORRIGÉ

20e OLYMPIADES DE MATHÉMATIQUES

Mercredi 11 mars 2020[1], 2 énoncés (national et académique) en 4 heures, élèves de première générale et technologique[2] et de début de terminale[3], inscription auprès de votre professeur de mathématiques avant les vacances d'hiver selon académie.

Liberté • Égalité • Fraternité
RÉPUBLIQUE FRANÇAISE
MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE

RÉGION ACADÉMIQUE OCCITANIE
MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE, DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE

Académie de TOULOUSE
et
Agence pour l'enseignement français à l'étranger – zone ibérique

Olympiades académiques de mathématiques

Session 2020
Classes de Première
Mercredi 11 mars 2020 de 10 heures 10 à 12 heures 10

EXERCICES PROPOSES PAR l'ACADEMIE

• Le sujet comporte 6 pages numérotées de 1 à 6.

• Les candidates ou candidats élèves de première **en séries technologiques** ou **en voie générale mais <u>ne suivant pas l'enseignement de spécialité Mathématiques</u>** doivent traiter l'exercice 1 (Séquences interdites) et l'exercice 2 (Baguettes).

• Les candidates ou candidats élèves de première **en voie générale et suivant l'enseignement de spécialité Mathématiques** doivent traiter l'exercice 2 (Baguettes) et l'exercice 3 (Nombres jolis).

• L'emploi de la calculatrice est autorisé selon la règlementation en vigueur.

• Très important : <u>veiller à informer précisément les entêtes, numéros de pages et nombre de pages sur chaque copie remise</u>.

• Il est conseillé aux candidats qui ne pourraient formuler une réponse complète à une question d'exposer le bilan des initiatives qu'ils ont pu prendre.

Et partenaires de l'Académie de Toulouse: Région, Institut Supérieur de l'Aéronautique et de l'Espace, Laboratoire d'Architecture et d'Analyse des Systèmes, Institut de Mathématiques de Toulouse, Département de Mathématiques, Institut National des Sciences Appliquées, École Normale Supérieure de Paris, Palais de la Découverte, École Nationale de l'Aviation Civile, Université Paul Sabatier, Institut de Recherche en Informatique de Toulouse, École d'Économie de Toulouse, Délégation régionale CNRS, Observatoire Midi-Pyrénées, Toulouse School of Economics-Research, Archives Municipales de Toulouse, Centre National d'Études Spatiales, Cité de l'Espace, Science Animation, Société des Ingénieurs et Scientifiques de France – délégation Occitanie, Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement Public, Association *femmes et mathématiques*.

Exercice 1 : Séquences interdites

À traiter par les candidats élèves en séries technologiques ou en voie générale mais ne suivant pas l'enseignement de spécialité Mathématiques.

Alice et Bob jouent au jeu suivant : ils tirent au sort un nombre entier N (N>2) puis chacun annonce à son tour un nombre entier compris entre 1 et N (1 et N compris).
Il y a deux règles à ce jeu :
Règle 1 : un joueur ne peut pas annoncer un nombre entier déjà annoncé par lui ou par son adversaire.
Règle 2 : un joueur ne peut pas annoncer un nombre entier qui suit ou précède immédiatement un des nombres qu'il a déjà annoncés.
Une partie se termine lorsque :

- Tous les nombres entiers compris entre 1 et N ont été annoncés. La partie est alors déclarée nulle.
- Il reste des nombres entiers entre 1 et N non annoncés mais le joueur qui « a la main » ne peut pas les annoncer à cause de la règle 2. Ce joueur a alors perdu la partie et son adversaire a gagné.

C'est toujours Alice qui commence la partie. On pourra noter par la suite A pour Alice et B pour Bob.
Par exemple, pour N=6 :

Un exemple de partie nulle
A annonce 3 ;
B annonce 2 ;
A annonce 5 ;
B annonce 4 ;
A annonce 1 ;
B annonce 6.

Un exemple de partie perdue par A
A annonce 3 ;
B annonce 1 ;
A annonce 6 ;
B annonce 5 ;
A ne peut annoncer ni 2, ni 4 ;
A a perdu.

On étudie quelques exemples de parties de ce jeu.

1. Pour N=3, montrer que Bob, s'il joue bien, peut gagner quoi qu'annonce Alice au départ.

2. On s'intéresse au cas N=4.
a) Proposer un exemple de partie gagnée par Bob.
b) Étude du jeu.
i) Alice dit : « j'annonce 1 et je ne peux pas perdre, quoi qu'annonce ensuite Bob ». Elle a raison. Pourquoi ?
ii) Alice annonce 2 et Bob déclare « je peux gagner ». Prouver que Bob a raison.
iii) Alice peut-elle, en jouant bien, être sûre de gagner ? Justifier la réponse.

3. On s'intéresse au cas N=5.
a) Alice commence par annoncer 5. Montrer qu'en annonçant 1 ensuite, Bob est sûr de gagner.
b) Montrer que Bob peut gagner en jouant bien, quoi que fasse Alice.

4. On s'intéresse au cas N=7.
a) Alice commence en annonçant 1 puis Bob annonce 7. Déduire du cas N=5 que Bob peut gagner en jouant bien quoi que fasse Alice.
b) De même prouver que Bob peut gagner quoi que fasse Alice si Alice commence la partie en annonçant 4.
c) Montrer que Bob peut gagner à coup sûr en jouant bien lorsque N=7.

5. On suppose que N=2p-1 (p entier, p≥2).
Décrire une stratégie qui permette à Bob de gagner à coup sûr la partie, quoi que joue Alice.

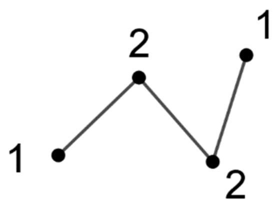
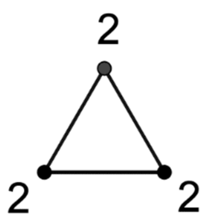
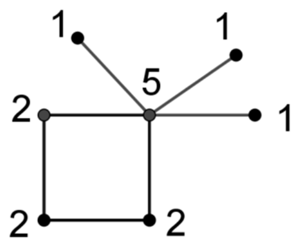
Exercice 2 : Baguettes

À traiter par tous les candidats.

On dispose de baguettes de même longueur avec lesquelles on réalise **des constructions planes** selon le protocole suivant :
- On pose une première baguette.
- Toutes les baguettes que l'on pose ensuite doivent avoir une (au moins) de leurs extrémités en contact avec une des extrémités d'au moins une baguette déjà posée.
- Il est interdit de superposer ou de croiser deux baguettes.

Les extrémités des baguettes utilisées sont appelées les <u>sommets</u> de la construction réalisée. Lorsque les extrémités de plusieurs baguettes sont en contact, on considère qu'elles sont confondues et définissent un sommet unique.
Le nombre de baguettes qui partent d'un sommet est appelé <u>degré</u> de ce sommet. On écrit parfois ce nombre à côté du sommet dont il est le degré.
On associe à chaque construction la liste des degrés de ses sommets, rangés dans l'ordre décroissant.

Exemples :

 **Construction A** 4 sommets Liste des degrés : (2, 2, 1, 1)	 **Construction B** 3 sommets Liste des degrés : (2, 2, 2)	 **Construction C** 7 sommets Liste des degrés : (5, 2, 2, 2, 1, 1, 1)

PARTIE A

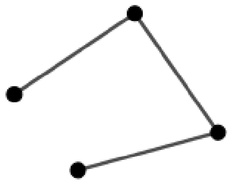
1. Tracer une construction à 4 sommets ayant pour degrés 3, 1, 1 et 1.
2. Montrer que pour chaque construction la somme des degrés de tous les sommets est égale au double du nombre de baguettes utilisées.
3. Expliquer pourquoi le nombre de sommets d'une construction réalisée avec n baguettes est inférieur ou égal à $(n+1)$.

PARTIE B

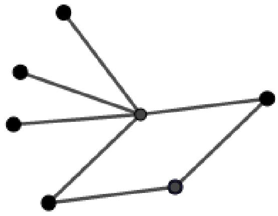
On peut déformer une construction obtenue conformément au protocole en déplaçant un ou plusieurs sommets, ceci **sans modifier les contacts existant entre les extrémités des différentes baguettes** et **sans croiser ou superposer des baguettes.**
On obtient ainsi une nouvelle construction conforme au protocole et ayant exactement le même nombre de sommets et la même liste (ordonnée) de degrés des sommets que la construction initiale.

Lorsque deux constructions se déduisent l'une de l'autre par de telles déformations, on dit qu'elles **représentent le même graphe-plan.**

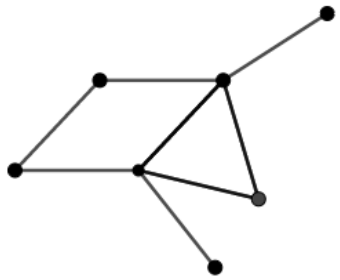
Par exemple **la construction A** représente le même graphe-plan que la construction ci-dessous.



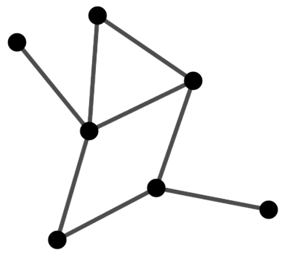
La construction C représente le même graphe-plan que la construction ci-dessous.



1. Montrer que **les constructions D et D'** ci-dessous ne représentent pas un même graphe-plan.

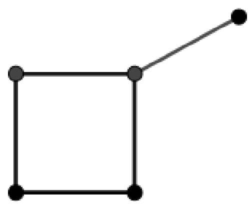


Construction D



Construction D'

2. Donner une construction ayant la même liste de degrés de sommets que **la construction E** ci-contre mais ne représentant pas le même graphe-plan que cette construction. Justifier.

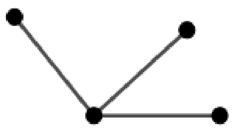


Construction E

3. **La construction F** ci-contre et **les constructions A et B** données plus haut sont construites avec trois baguettes.

a) Expliquer pourquoi elles représentent des graphes-plans différents.

b) Montrer qu'il n'existe pas d'autres graphes-plans pouvant être représentés à l'aide de trois baguettes.

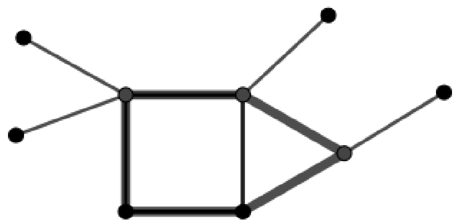


Construction F

4. Avec quatre baguettes, on peut représenter cinq graphes-plans distincts. Représenter ces graphes-plans.

PARTIE C

Un graphe-plan peut contenir une surface polygonale « fermée ». Quand celle-ci ne contient aucune autre surface polygonale fermée, on l'appelle <u>cellule du graphe-plan.</u>
Par exemple, le graphe-plan représenté ci-dessous contient une cellule de forme carrée et une cellule de forme triangulaire. Le polygone qui apparait en gras ne délimite pas une cellule du graphe-plan car il contient des cellules plus petites.



1. Combien un graphe-plan construit avec 5 baguettes peut-il contenir au maximum de cellules distinctes ? Justifier.

2. Représenter tous les graphes-plans construits avec 6 baguettes et contenant 2 cellules.

3. <u>Cette question ne sera traitée que par les candidats de la voie générale suivant l'enseignement de spécialité mathématiques.</u>
Quel est le plus grand nombre de cellules que peut contenir un graphe-plan construit avec n ($n \geq 3$) baguettes? Justifier.

Exercice 3 : Nombres jolis

À traiter par les candidats élèves en voie générale et suivant l'enseignement de spécialité Mathématiques.

On appelle « nombre joli » un nombre entier strictement positif dont les chiffres (en écriture décimale) sont tous différents et vont strictement en croissant de gauche à droite.
Par exemple, 189 est un nombre joli à trois chiffres.
Remarque : les nombres entiers non nuls à un chiffre sont considérés comme jolis.

1. Expliquer pourquoi on ne peut pas avoir le chiffre 0 dans l'écriture d'un nombre joli.

2. Quel est le plus grand nombre joli ?

3. Combien y-a-t-il de nombres jolis à deux chiffres ?

4. On choisit au hasard un nombre joli à deux chiffres.

a) Quelle est la probabilité que ce soit un nombre pair ?

b) Quelle est la probabilité que ce soit un multiple de 5 ?

5. Arthur, qui est passionné par les nombres jolis, voudrait pouvoir les compter. Pour cela, il a créé une fonction Python pour déterminer si un nombre est joli ou pas. Il a utilisé une liste L de longueur égale au nombre de chiffres avec L[0] le chiffre des unités, L[1] le chiffre des dizaines, ...
Par exemple, pour le nombre 189, L est une liste de longueur 3, avec L[0]=9 , L[1] = 8, L[2] = 1.
L'instruction **len** donne la longueur de la liste L.

```python
def nombrejoli(L):
    nbchiffre=len(L)
    joli=True
    if L[0]==0:
        joli=False
    else:
        for i in range(nbchiffre-1):
            if L[i+1]<=L[i]:
                joli=False
    return joli
```

a) Cette fonction contient une erreur. La corriger.

b) Écrire un programme en Python qui affiche combien il existe de nombres jolis à trois chiffres.

6. On s'intéresse dans cette question aux nombres jolis multiples de 11.

a) Justifier qu'un tel nombre a au moins trois chiffres.

b) On considère un nombre entier naturel *N* dont l'écriture décimale comporte trois chiffres, u, d, c, avec u le chiffre des unités, d celui des dizaines et c celui des centaines.
On a donc $N = u + d \times 10 + c \times 100$. On note alors : $N = \overline{cdu}$.
On suppose que *N* est un nombre joli multiple de 11.
On considère l'entier $\alpha = d - c$.

- **i)** Démontrer que l'entier α vérifie $1 \leq \alpha \leq 9$ et que $\alpha < u$.
- **ii)** Démontrer que le nombre $\overline{\alpha u}$ est un nombre joli multiple de 11.
- **iii)** Conclure.

c) Dénombrer les nombres jolis multiples de 11.

7. Combien y-a-t-il de nombres jolis ? Justifier.

OLYMPIADES MATHÉMATIQUES LYCÉE, PREMIÈRE

CORRECTION !

Épreuve ▪ 2020

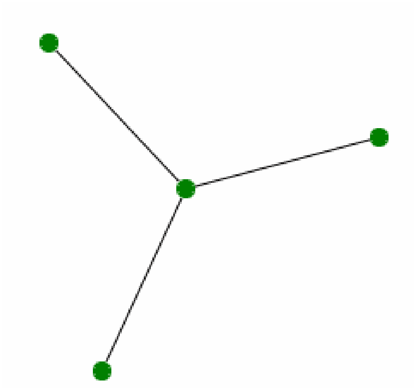
CORRECTION OLYMPIADES

EXERCICES ACADÉMIQUES

TOULOUSE 2020

Exercice 2 : Baguettes

Partie A



1. Ci-contre une construction (3,1,1,1).

2. Lorsqu'on calcule la somme des degrés d'une construction, chaque baguette est comptée exactement deux fois, une fois pour chacun de ses sommets. C'est pourquoi la somme des degrés est égale au double du nombre de baguettes.

3. Considérons la propriété : « Dans toute construction réalisée avec n baguettes, il y a au plus $(n+1)$ sommets ». Proposons-nous de la justifier par récurrence.

Initialisation : Cette propriété est vraie lorsque $n=1$, car une seule baguette relie toujours exactement deux sommets.

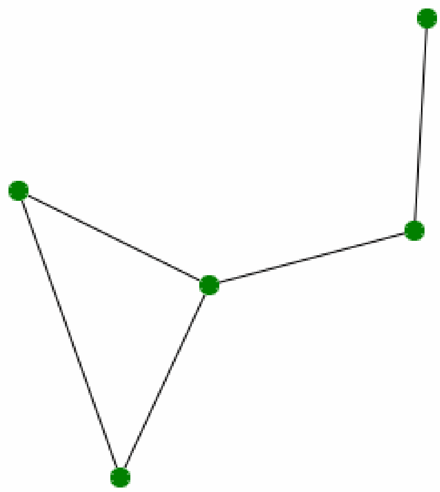
Hérédité : Supposons que cette propriété soit vraie pour un certain entier n. Si on ajoute une baguette à une construction de n baguettes, cette nouvelle baguette doit être reliée à un sommet déjà existant : on n'ajoute donc à la construction au plus qu'un seul sommet. Si dans toute construction réalisée avec n baguettes, il y a au plus $(n+1)$ sommets, alors dans toute construction réalisée avec $(n+1)$ baguettes, il y a au plus $(n+2)$ sommets. La propriété considérée est héréditaire.

Elle est donc vraie pour tout entier strictement positif n.

Partie B

1. La construction D est une construction $(4,\ 4,\ 2,\ 2,\ 2,\ 1,\ 1)$ tandis que la construction D' est une construction $(4,\ 3,\ 3,\ 2,\ 2,\ 1,\ 1)$. Ces constructions ne représentent pas le même graphe-plan car les listes des degrés sont différentes : de deux sommets de D' partent 3 arêtes, ce qui n'est pas le cas dans le graphe D.

2. Le graphe E est un graphe $(3,\ 2,\ 2,\ 2,\ 1)$ et il en est de même du graphe E' ci-contre. Cependant, le graphe E contient une cellule en forme de quadrilatère, ce qui n'est pas le cas du graphe E' ci-contre. Ces deux graphes-plans sont distincts.



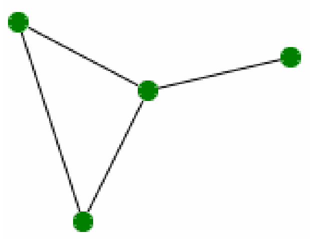
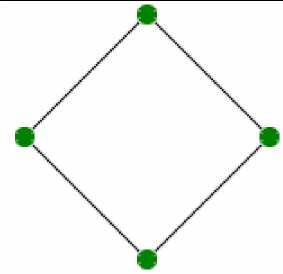
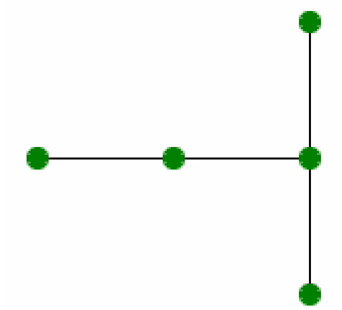
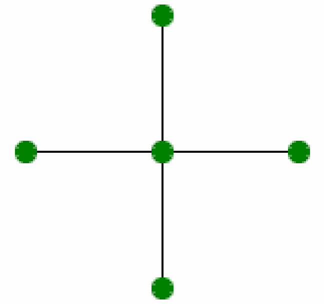
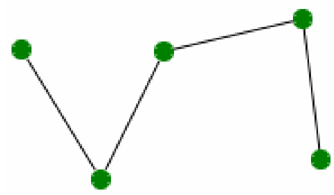
3.a. Le graphe B est un graphe à 3 sommets, différent des graphes A et F qui sont des graphes à 4 sommets. A et F sont différents car les listes de leurs degrés sont différentes : $(2,\ 2,\ 1,\ 1)$ pour A et $(3,\ 1,\ 1,\ 1)$ pour F : l'un possède un sommet dont partent 3 arêtes et l'autre non.

3.b. Un graphe-plan construit avec 3 baguettes a au moins 3 sommets et au plus 4 sommets.

Si le graphe a 3 sommets, les listes possibles de degrés sont *a priori* $(3,\ 2,\ 1)$ et $(2,\ 2,\ 2)$ mais la première liste n'est pas envisageable (d'un même sommet partiraient 3 arêtes qui aboutiraient à 3 sommets distincts, impossible). L'unique liste des degrés possible est la liste $(2,\ 2,\ 2)$ qui est celle du graphe B exclusivement.

Si le graphe a 4 sommets, les listes possibles de degrés sont $(3,\ 1,\ 1,\ 1)$ qui est la liste du graphe F exclusivement car d'un sommet partent nécessairement 3 arêtes et $(2,\ 2,\ 1,\ 1)$ qui est la liste du graphe A exclusivement car deux arêtes doivent avoir une extrémité libre.

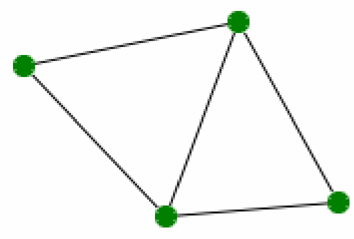
Il n'y a pas d'autre graphe-plan constitué de 3 arêtes que A, B ou F.

5. Les cinq graphes-plans que l'on peut construire avec quatre baguettes	Un graphe à 4 sommets $(3,\ 2,\ 2,\ 1)$	Un graphe à 4 sommets $(2,\ 2,\ 2,\ 2)$
		
Un graphe à 5 sommets $(3,\ 2,\ 1,\ 1,\ 1)$	Un graphe à 5 sommets $(4,\ 1,\ 1,\ 1,\ 1)$	Un graphe à 5 sommets $(2,\ 2,\ 2,\ 1,\ 1)$
		

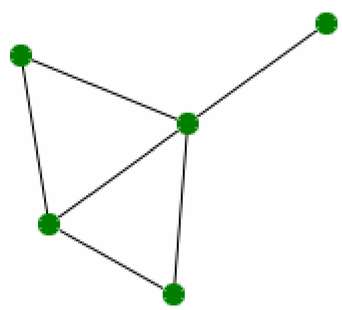
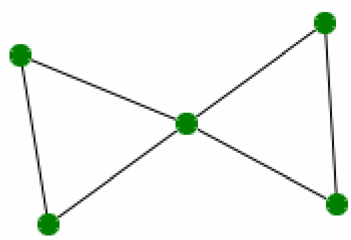
Partie C

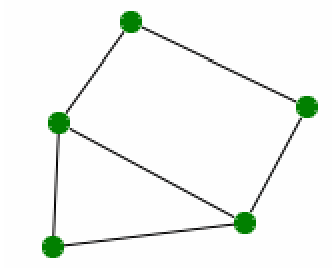
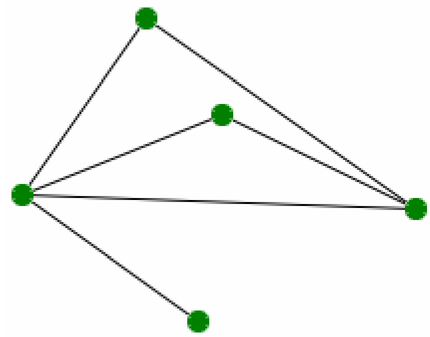
1. Une cellule étant polygonale, elle est constituée d'au moins 3 baguettes (s'il s'agit d'un triangle). Deux triangles distincts ayant au plus une baguette commune, il faut au moins cinq baguettes pour constituer deux cellules triangulaires.

Avec cinq baguettes, on peut constituer au plus deux cellules.



2. Un graphe contenant deux cellules et constitué de 6 baguettes peut présenter ou bien deux triangles, ou bien un quadrilatère et un triangle. Un polygone ayant davantage de côtés est exclu (il faudrait au moins 5 baguettes pour constituer ce seul polygone).

Les deux cellules triangulaires peuvent avoir ou bien une baguette commune ou bien un sommet commun.		

Dans le cas d'un quadrilatère et d'un triangle, les deux cellules peuvent avoir ou bien une baguette commune ou bien deux baguettes communes (mais non un seul sommet commun, il faudrait 7 baguettes).		

3. Nous obtenons un maximum de cellules lorsque ces cellules ont un nombre minimum de côtés, c'est-à-dire lorsqu'il s'agit, autant que possible, de cellules triangulaires. Nous avons vu qu'avec 3 baguettes ou 4 baguettes nous obtenons au maximum une cellule (un triangle avec 3 baguettes, un triangle ou quadrilatère avec 4) ; avec 5 baguettes ou 6 baguettes nous en obtenons au maximum 2 (deux triangles avec 5 baguettes, un triangle et un quadrilatère avec 6) ; il faut 7 baguettes pour obtenir 3 cellules.

Proposons-nous de démontrer par récurrence la propriété suivante : « Avec $2k-1$ baguettes on peut construire un graphe-plan contenant $k-1$ cellules triangulaires et avec $2k$ baguettes on peut construire un graphe-plan contenant $k-2$ cellules triangulaires et un quadrilatère ».

Initialisation : Cette propriété est vraie pour $k=2$ (et aussi pour $k=3$ comme nous venons de le voir, mais cela n'apporte rien à la démonstration).

Hérédité : Supposons cette propriété vraie pour un certain entier *k*. Nous disposons selon cette hypothèse d'un graphe-plan de $2k$ baguettes contenant $k-2$ cellules triangulaires et un quadrilatère. Avec une baguette supplémentaire, nous pouvons partager le quadrilatère en deux triangles. Nous obtenons un graphe-plan de $2k+1$ baguettes contenant k cellules triangulaires. Avec une baguette supplémentaire, nous pouvons adjoindre un côté supplémentaire à un triangle et le transformer en quadrilatère. Nous obtenons un graphe-plan de $2k+2$ baguettes contenant $k-1$ cellules triangulaires et un quadrilatère.
Si la propriété est vraie pour un certain entier *k*, alors elle est vraie pour l'entier $k+1$.

Ainsi, pour tout entier k supérieur ou égal à 2, il est vrai que : « Avec $2k-1$ baguettes, on peut construire un graphe-plan contenant $k-1$ cellules triangulaires et avec $2k$ baguettes on peut construire un graphe-plan contenant $k-2$ cellules triangulaires et un quadrilatère ». Par exemple, avec 2020 baguettes on peut construire un graphe-plan contenant 1008 cellules triangulaires et un quadrilatère.
De plus, ces constructions contiennent un maximum de cellules : c'est vrai lorsque $k=2$ et lorsque $k=3$, et à chaque adjonction de baguette, le procédé décrit ci-dessus ajoute le plus possible de cellules.

Exercice 3 : Les nombres jolis

1. Puisque 0 est le plus petit des dix chiffres, le chiffre 0 ne peut pas être précédé d'un autre chiffre dans l'écriture d'un nombre joli. Or, seuls les entiers à un chiffre non nuls sont considérés comme des nombres jolis. Le chiffre 0 ne peut pas être non plus le seul et unique chiffre de l'écriture d'un nombre joli. Le chiffre 0 ne peut figurer dans l'écriture d'aucun nombre joli.

2. Le plus grand nombre joli est le nombre 123 456 789. C'est le seul nombre joli qui s'écrit avec neuf chiffres (les chiffres disponibles sont tous utilisés) ; tout autre nombre joli s'écrivant avec moins de chiffres, est strictement inférieur à $100\,000\,000$, donc strictement inférieur à 123 456 789.

3. Le nombre de façons de choisir deux chiffres distincts a et b parmi les neuf chiffres disponibles est : $\binom{9}{2} = 36$. Avec ces deux chiffres distincts, on peut écrire deux nombres : $\overline{ab}$ et $\overline{ba}$. Un et un seul de ces deux nombres est un nombre joli, celui dont le premier chiffre est le plus petit des deux chiffres a et b.

Il y a exactement 36 nombres jolis qui s'écrivent avec deux chiffres.

4.a. Un nombre joli à deux chiffres est pair si et seulement si son deuxième chiffre est 2, 4, 6 ou 8. Le nombre 12 est le seul nombre joli dont le deuxième chiffre est 2 ; 14, 24 et 34 sont les nombres jolis dont le deuxième chiffre est 4 ; 16, 26, 36, 46 et 56 sont les nombres jolis dont le deuxième chiffre est 6 ; 18, 28, 38, 48, 58, 68, 78 sont les nombres jolis dont le deuxième chiffre est 8.

Ce qui fait un total de $1+3+5+7=16$ nombres jolis pairs qui s'écrivent avec deux chiffres.

La probabilité qu'un nombre joli à deux chiffres soit pair est égale à $\frac{16}{36}$, c'est-à-dire à $\frac{4}{9}$.

4.b. De façon générale, un nombre entier est multiple de 5 si son dernier chiffre est 0 ou 5. Puisque le chiffre 0 ne figure pas dans l'écriture d'un nombre joli, un nombre joli à deux chiffres est multiple de 5 si et seulement si son chiffre des unités est 5. Il s'agit de l'un ou l'autre des quatre nombres 15, 25, 35, 45.

La probabilité qu'un nombre joli à deux chiffres soit un multiple de 5 est égale à $\frac{4}{36}$, c'est-à-dire à $\frac{1}{9}$.

5.a. Un nombre est joli si la liste de ses chiffres, en commençant par le chiffre des unités, est rangée par ordre strictement décroissant. L'erreur de cet élève porte sur la condition imposée à deux termes consécutifs de cette liste pour que « False » soit retenu.

Il faut écrire $L[[i+1]>=L[i]$ et non $L[[i+1]<=L[i]$.

Ci-contre l'algorithme d'Arthur corrigé.

(*Voir cependant la fin de ce document*)

```
def nombrejoli(L):
    nbchiffre=len(L)
    joli=True
    if L[0]==0:
        joli=False
    else:
        for i in range(nbchiffre-1):
            if L[i+1]>=L[i]:
                joli=False
    return(joli)
```

5.b. Un exemple d'algorithme permettant de dénombrer les 84 nombres jolis qui s'écrivent avec trois chiffres.

```
n=0
for c in range(1,8):
    for d in range(c+1,9):
        for u in range(d+1,10):
            n+=1
print(n)
```

6.a. Un multiple de 11 non nul s'écrit avec au moins deux chiffres. Les multiples de 11 à deux chiffres sont les entiers dont le chiffre des dizaines est égal à celui des unités : ce ne sont pas des nombres jolis. Un nombre joli multiple de 11 s'écrit avec au moins trois chiffres.

6.b. L'hypothèse envisagée ici est l'existence d'un nombre joli $N=\overline{c\,d\,u}$ de trois chiffres multiple de 11.

6.b.i. Les entiers *c, d, u* étant des chiffres de la numération décimale et *N* étant supposé joli : $c<d<u\leq 9$.

D'une inégalité, on peut déduire une inégalité de même sens en retranchant un même nombre à ses deux membres.

En particulier, en retranchant *c* aux membres de la triple inégalité considérée : $0<d-c<u-c\leq 9-c$

- Les inégalités $0<d-c\leq 9-c$ montrent que $1\leq\alpha\leq 9-c$ donc *a fortiori* $1\leq\alpha\leq 9$
- L'inégalité $d-c<u-c$ montre que $\alpha<u-c$ donc *a fortiori* $\alpha<u$

6.b.ii. L'entier à deux chiffres $\overline{\alpha\,u}$ en numération décimale est un nombre joli car nous avons vu que $\alpha<u$.

Il s'agit de l'entier $u+10(d-c)$.

D'autre part l'entier *N* se développe ainsi : $N=u+10d+100c=[u+10(d-c)]+110c$.

Le nombre $\overline{\alpha\,u}$ diffère de *N* d' un multiple de 11, le nombre $110c=11\times 10c$. Si *N* est un multiple de 11, alors le nombre $\overline{\alpha\,u}$ est lui aussi un multiple de 11.

6.b.iii. L'hypothèse envisagée dans cette question **6.b** nous amène à une contradiction, la construction d'un nombre joli à deux chiffres qui serait un multiple de 11 et dont nous avons prouvé l'inexistence. Cette hypothèse doit être abandonnée : il n'existe aucun nombre joli à trois chiffres qui soit multiple de 11.

6.c. Le même raisonnement peut s'itérer quel que soit le nombre de chiffres d'un nombre joli. Si $N = \overline{c_k c_{k-1} \dots c_0}$ est un nombre joli multiple de 11 de plus de trois chiffres, alors $N = \overline{(c_{k-1} - c_k)\dots c_0} + c_k \overline{110\dots0}$; l'entier $\overline{(c_{k-1} - c_k)\dots c_0}$ est lui aussi un nombre joli multiple de 11 mais s'écrit avec un chiffre de moins que l'entier *N*. En continuant autant de fois qu'il faudra ce procédé, nous finirons par obtenir un nombre joli multiple de 11 à trois chiffres dont nous avons démontré l'inexistence.
Il n'existe aucun nombre joli qui soit un multiple de 11.

7. Considérons l'ensemble $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ des neuf chiffres autres que zéro.

À tout nombre joli, nous pouvons associer la partie de E constituée par l'ensemble de ses chiffres puisque tous les chiffres d'un nombre joli sont distincts et distincts de 0.

Réciproquement, à toute partie *non vide* de *E*, nous pouvons associer un, et un seul, nombre joli, l'entier qui s'écrit avec les éléments de cette partie classés, en commençant par le chiffre des unités, par ordre décroissant.

Il y a autant de nombres jolis que de parties *non vides* de *E*. Cet ensemble *E* ayant 9 éléments, le nombre de parties de *E* (y compris la partie vide) est égal à $2^9 = 512$. (Rappelons que si un ensemble possède *n* éléments, alors l'ensemble des parties de cet ensemble possède 2^n éléments).

Il y a 511 nombres jolis.

Une résolution avec Python de cette question 7

Ci-dessous nous avons modifié l'algorithme d'Arthur de façon qu'il indique si un nombre est joli ou ne l'est pas directement à partir de son écriture décimale, sans avoir à écrire une liste de chiffres. L'instruction « [int(i) for i in range str(x)] permet de transformer l'écriture décimale du nombre x en la liste de ses chiffres, le chiffre des unités étant écrit le dernier. De plus, nous avons rajouté à l'algorithme un dénombrement des nombres jolis compris entre deux nombres a (inclus) et b (exclu).

Cet algorithme dénombre 9 nombres jolis entre 0 et 10, 36 nombres jolis entre 10 et 100 (ce qui constitue une réponse recevable à la question **3)**, et 84 nombres jolis entre 100 et 1000 (cet algorithme est ainsi une alternative de résolution pour la question **5.b**).

Faisons lui dénombrer tous les nombres jolis s'écrivant au plus avec huit chiffres. Le plus grand des nombres jolis qui s'écrit avec huit chiffres étant 23456789, nous pouvons choisir comme entiers a et b les entiers 0 et 23456790.
L'algorithme finit, après un assez long temps d'attente dû à son énorme gloutonnerie, par recenser 510 nombres jolis. Manque à l'appel un et un seul nombre joli, l'unique nombre joli 123456789 s'écrivant avec neuf chiffres, qui est beaucoup plus grand que tous les autres (c'est pourquoi nous ne l'avons pas cherché).
Il y a en tout 511 nombres jolis, nous retrouvons bien le résultat attendu dans la question 7.

nombresjolis.py - C:/Users/admin/Documents/nombresjolis.py (3.8

File Edit Format Run Options Window Help

```python
def nombrejoli(x):
    joli=True
    L=[int(i) for i in str(x)]
    if L[len(L)-1]==0:
        joli=False
    else:
        for i in range(len(L)-1):
            if L[i]>=L[i+1]:
                joli=False
    return(joli)
c=0
a=input('borne inférieure de l\'intervalle : ')
b=input('borne supérieure de l\'intervalle : ')
a=int(a)
b=int(b)
for n in range(a,b):
    if nombrejoli(n)==True:
        c+=1
print(c)
```

Python 3.8.1 Shell

File Edit Shell Debug Options Window Help

```
Python 3.8.1 (tags/v3.8.1:1b293b6, Dec 18 20
D64)] on win32
Type "help", "copyright", "credits" or "lice
>>>
=============== RESTART: C:/Users/admin/Docu
borne inférieure de l'intervalle : 0
borne supérieure de l'intervalle : 10
9
>>>
>>>
=============== RESTART: C:/Users/admin/Docu
borne inférieure de l'intervalle : 10
borne supérieure de l'intervalle : 100
36
>>>
=============== RESTART: C:/Users/admin/Docu
borne inférieure de l'intervalle : 100
borne supérieure de l'intervalle : 1000
84
>>>
=============== RESTART: C:/Users/admin/Docu
borne inférieure de l'intervalle : 0
borne supérieure de l'intervalle : 23456790
510
```