SUJET + CORRIGÉ

OLYMPIADES DE MATHÉMATIQUES

ACADÉMIE DE TOULOUSE

Classes de première S • 2018

Olympiades académiques de mathématiques

Session 2018
Classes de Première
Mercredi 14 mars de 10 heures 10 à 12 heures 10

EXERCICES PROPOSES PAR l'ACADEMIE

Avertissement :

• *Le sujet comporte cinq pages.*

• *Les candidats élèves de la série S doivent traiter l'exercice 1 (L'automate à « dépiler ») et l'exercice 3 (Le papillon butineur).*
• *Les candidats élèves des autres séries doivent traiter l'exercice 1 (L'automate à « dépiler ») et l'exercice 2 (H-arbres et codages mp3).*

• *A l'exclusion de tout autre appareil électronique, les calculatrices non cummunicantes par ondes radio sont autorisées.*

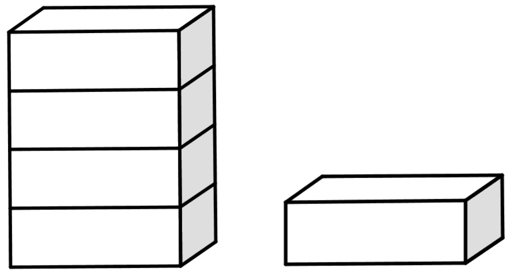
• *Très important : veiller à informer précisément les entêtes, numéros et nombre de pages sur chaque copie remise.*

• *Il est conseillé aux candidats qui ne pourraient formuler une réponse complète à une question d'exposer le bilan des initiatives qu'ils ont pu prendre.*

Et partenaires de l'Académie de Toulouse: Région, Institut Supérieur de l'Aéronautique et de l'Espace, Laboratoire d'Architecture et d'Analyse des Systèmes, Institut de Mathématiques de Toulouse, Département de Mathématiques, Institut National des Sciences Appliquées, Ecole Normale Supérieure de Paris, Palais de la Découverte, Ecole Nationale de l'Aviation Civile, Université Paul Sabatier, Institut de Recherche en Informatique de Toulouse, Ecole d'Economie de Toulouse, Délégation régionale CNRS, Observatoire Midi-Pyrénées, Toulouse School of Economics-Research, Archives Municipales de Toulouse, Centre National d'Etudes Spatiales, Cité de l'Espace, Science Animation, Société des Ingénieurs et Scientifiques de France – délégation Occitanie, Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement Public, Association *femmes et mathématiques*.

Exercice 1 (commun à tous les candidats) - L'automate à « dépiler »

Dans un atelier de construction aéronautique, les pièces produites sont placées sur deux piles comme le montre le dessin ci-contre.



Pour tout le problème, on notera a le nombre de pièces dans la pile A, et b le nombre de pièces dans la pile B.
Pour la gestion du stock des pièces de l'atelier, on utilise un automate. Il est chargé de « dépiler » les pièces produites, c'est-à-dire de vider complètement les deux piles de pièces.
Cependant, cet automate ne sait exécuter que deux opérations :

O1 - Enlever un même nombre de pièces de chaque pile.
O2 –Ajouter des pièces sur une des piles afin de doubler le nombre de pièces qu'elle contient.

Avec l'exemple ci-dessus, l'automate est capable de « dépiler » : en effet, il double une première fois, le nombre de pièces dans la pile B (opération O2), puis une seconde fois (O2) ; on a ainsi 4 pièces dans chaque pile. En appliquant l'opération O1, l'automate peut vider les deux piles de pièces.

Partie A : premier fonctionnement

1) Pour $a = 2018$ et $b = 2017$, l'automate est capable de « dépiler ».
a) Expliquer comment.
b) Est-il capable de dépiler en au plus trois opérations ?

2) Pour $a = 37$ et $b = 29$, l'automate est capable de « dépiler ».
a) Expliquer comment.
b) Est-il capable de « dépiler » en au plus trois opérations ?

3) Pour $a = 1515$ et $b = 1492$, l'automate est-il capable de « dépiler » ?

4) Pour un nombre quelconque de pièces a et b dans chaque pile, l'automate est-il capable de « dépiler » ?
Si oui, proposer une méthode ou un algorithme (rédigé en langage naturel).
Si non, proposer un contre-exemple.

5) Dans le cas où $b \leq a < 2b$, est-ce que l'automate est capable de « dépiler » en au plus trois opérations ? Justifier la réponse.

Partie B : un deuxième fonctionnement
On modifie le fonctionnement de l'automate : l'opération O2 est transformée en « Ajouter des pièces sur une des piles afin de tripler le nombre de pièces qu'elle contient »

1) On note d la différence entre les effectifs des piles A et B. Ainsi, $d = a - b$.
a) Comment évolue d quand on applique l'opération O1 ?
b) On applique la nouvelle opération O2, et on note d' la nouvelle différence. Démontrer que $d' - d$ est un multiple de 2.

2) En déduire que pour $a = 2018$ et $b = 2017$, l'automate ne peut pas « dépiler. »

3) L'automate est-il capable de « dépiler » pour $a = 2019$ et $b = 2017$?

4) Montrer que l'automate est capable de « dépiler » pour $a = 39$ *et* $b = 27$.

5) Enoncer une condition nécessaire et suffisante sur a et b pour que l'automate soit capable de « dépiler ». Démontrer le résultat.

Partie C : un troisième fonctionnement
On modifie le fonctionnement de l'automate : l'opération O2 est transformée en « Ajouter des pièces sur une des piles afin de multiplier par *k* le nombre de pièces qu'elle contient » où *k* est un entier naturel supérieur ou égal à 2.
Donner une condition nécessaire et suffisante concernant les entiers a, b et k afin que l'automate soit capable de « dépiler ».

Exercice 2 (candidats élèves des séries autres que la série S.) - H-arbres et codages mp3

Les algorithmes évoqués ci-dessous sont utilisés pour la compression de données sans perte d'information, par exemple pour les Fax et les fichiers MP3.
Il s'agit de créer des systèmes de codage/décodage (le plus important étant le décodage) en essayant de diminuer au maximum l'encombrement mémoire.

Partie A : **Une approche**

1) Le système universel ASCII permet le codage de caractères en utilisant, pour chaque caractère, un code formé de huit chiffres valant 0 ou 1. On dit que les caractères sont codés en binaire sur huit bits correspondant à 8 cases contenant chacune 0 ou 1.
Par exemple, la lettre E peut être codée par : 01000101.
Il s'agit d'un codage binaire sur 8 bits correspondant à :

0	1	0	0	0	1	0	1

Le codage d'un mot s'obtient en juxtaposant les codes des lettres qui le composent.

a) En utilisant le système ASCII, combien de bits sont nécessaires pour coder le mot : DECADE ?
b) En considérant qu'une page contient en moyenne 3 000 caractères, combien de pages peut-on coder en ASCII à l'aide d'un Mégabit (1 Mégabit = 10^6 bits) ?

2) On veut maintenant coder uniquement les 26 lettres de l'alphabet. Peut-on employer un codage n'utilisant que 4 bits par caractère ? 5 bits par caractère ?

Partie B : Un nouveau codage

Pour diminuer le nombre de bits nécessaires pour coder un texte, on considère une nouvelle approche dans laquelle la longueur du code peut varier d'un caractère à l'autre.
On présente d'abord la méthode sur un petit alphabet dans lequel on n'utilise plus que les lettres A, B, C, D, E.
Dans cet alphabet, les fréquences d'apparition des lettres sont : A : 25% ; B : 4% ; C : 12% ; D : 14% ; E : 45%
Le codage de ces lettres est : A : 10 ; B : 1110; C : 1111 ; D : 110 ; E : 0
On rappelle que le codage d'un mot s'obtient en juxtaposant les codes des lettres qui le composent.

1) Coder DECADE.

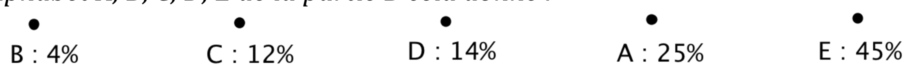
2) Décoder 101111111101100.

3) Expliquer pourquoi le code fourni est toujours « sans ambigüité au décodage » (si un codage représente effectivement un texte, on ne peut pas se tromper en le décodant).

4) Pour coder un texte composé d'un million de ces cinq lettres, combien faut-il utiliser de bits par caractère en moyenne (donner un résultat au centième) ?

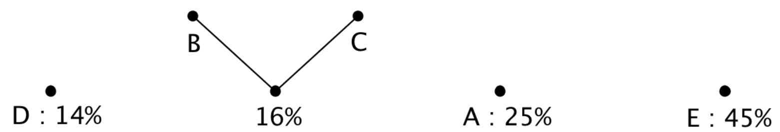
Partie C : Génération d'un code

Désormais, il s'agit de créer des codes « sans ambigüité au décodage » dans lesquels les codages des caractères ont des longueurs variables. Pour obtenir ces codes, à partir des fréquences d'apparition des caractères, on construit des arbres binaires, que nous nommons ici *H-arbres* .
<u>Les règles de construction de ces arbres sont les suivantes</u> :
• Positionnement de départ : Les lettres sont rangées de gauche à droite par fréquence croissante ; en cas d'égalité on utilise l'ordre alphabétique. Chaque lettre est associée à un point appelé « nœud ».
Dans l'exemple de l'alphabet A, B, C, D, E de la partie B cela donne :

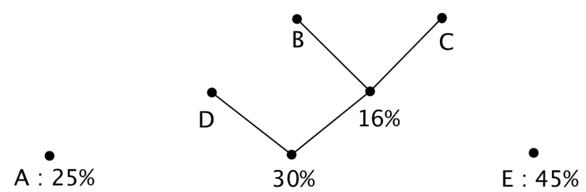


• On applique ensuite, à chaque étape, les deux opérations suivantes :
Opération 1 : On joint les deux nœuds les plus à gauche. Le nœud de jonction prend comme valeur la somme des fréquences des nœuds dont il provient.
Opération 2 : On réordonne les nœuds de gauche à droite dans l'ordre des fréquences croissantes. En cas d'égalité on conserve la disposition gauche/droite précédente.
Dans l'exemple :

<u>*Étape 1 :*</u>



<u>*Étape 2*</u> :



• On poursuit le processus jusqu'à obtenir un seul point (ou nœud) appelé « racine de l'arbre ».
• Partant de la racine de l'arbre et en remontant, on porte alors un 0 sur chaque branche allant vers la gauche et un 1 sur chaque branche allant vers la droite.
• Le code attribué à une lettre s'obtient en lisant les chiffres successifs portés par les branches du chemin conduisant de la racine de l'arbre à la lettre considérée.

1) a) Terminer la construction de l'arbre associé à l'alphabet A, B, C, D, E de la partie B.
b) Placer les 0 et les 1 sur les branches de l'arbre et vérifier que D est codé 110. Donner ensuite le codage des autres lettres.
c) Pourquoi faut-il exactement quatre étapes pour construire l'arbre complet ?

2) On a codé les lettres A, B, C, D, E et F en utilisant un H-arbre.
On a pris à nouveau : A : 25% ; B : 4% ; C : 12% ; D : 14%.
On ne connait pas les valeurs numériques des fréquences de E et F, notées e% et f%, mais on sait que leur somme vaut 45% et que e et f sont des nombres entiers.
Voici le codage obtenu : A : 10 ; B : 11100 ; C : 1111 ; D : 110 ; E : 0 ; F : 11101.
Déterminer les fréquences possibles de la lettre F.

3) Dans cette question, on utilise l'alphabet des huit lettres figurant dans le mot REPUBLIQUE, affectées des coefficients de leur fréquence approximative d'apparition en Français :

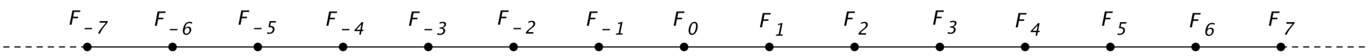
R : 16% E : 32% P : 7% U : 12% B : 3% L : 12% I : 16% Q : 2%

A l'aide du code obtenu en utilisant un H-arbre, combien faut-il de bits en moyenne pour coder un caractère d'un texte long (donner un résultat au centième) ?

N.B. : le H de cette dénomination « H-arbre » fait un lien avec l'initiateur de cette l'idée de faire varier la longueur des codes, David HUFFMAN, en 1953 au Massachusetts Institute of Technology.

Exercice 3 (candidats élèves en série S) – Le papillon butineur

Le schéma ci-dessous modélise un alignement de fleurs. Deux fleurs consécutives sont espacées de 10 cm, soit 1 dm.



Un papillon placé sur la fleur F_0 décide de butiner le long de cet alignement de fleurs.
Le papillon effectue des déplacements successifs de longueurs égales à 3 dm, 5 dm, 9 dm, 17 dm, … et de manière générale $(2^k + 1)$ dm lors du k-ième déplacement.
Avant chacun d'eux, il choisit de façon équiprobable de se déplacer vers la droite ou bien vers la gauche.
Par exemple, en partant de F_0, lors d'un premier déplacement, il peut butiner la fleur F_3, puis après un deuxième déplacement butiner la fleur F_{-2}… ainsi de suite.

PARTIE A – « Où que ce soit ? »

1) Le papillon est placé sur la fleur F_0 et il effectue deux déplacements. Donner la liste des fleurs sur lesquelles le papillon peut être positionné après ces deux déplacements.

2) En partant de F_0, proposer un parcours avec au moins un déplacement, qui permet au papillon de venir butiner à nouveau la fleur F_0.

3) Toujours en partant de F_0, est-il possible après 5 déplacements, d'atteindre une fleur dont le numéro est pair ?

4) Le papillon est poursuivi par un second papillon, soumis aux mêmes règles de déplacement, mais avec une étape de retard. Ainsi lorsque le premier papillon fait un déplacement de longueur $(2^k + 1)$dm, $k > 1$, le second papillon fait un déplacement de longueur $(2^{k-1} + 1)$ dm dans le même sens que le premier. Dans cette question, on suppose que pour échapper au second papillon, **le premier papillon se déplace toujours vers la droite.**
La poursuite commence après le premier déplacement du premier papillon. Celui-ci se trouve donc en F_3 et le second papillon est en F_0.
Après un nouveau déplacement, le premier papillon se trouve en F_8 et le second en F_3. Et ainsi de suite.
Pour $k > 0$, on note P_k le numéro de la fleur atteinte par le premier papillon après k déplacements vers la droite et Q_k le numéro de la fleur atteinte par le second papillon.
On a donc $P_1 = 3$ et $Q_1 = 0$, $P_2 = 8$ et $Q_2 = 3$, …etc.

a) A quelle distance se trouvent les deux papillons l'un de l'autre après k déplacements vers la droite ?
b) Démontrer que $P_k = 2Q_k - k + 4$.
c) Déduire de a) et b) que $P_k = 2^{k+1} + k - 2$.

On a démontré dans cette question 4, qu'un papillon qui effectue k déplacements dans la même direction s'est déplacé de $(2^{k+1} + k - 2)$ *dm.*

5) Toujours en partant de F_0, et en supposant que le premier papillon est immortel, démontrer qu'il peut atteindre n'importe quelle fleur de l'alignement, après être passé éventuellement plusieurs fois par une ou plusieurs fleurs.

PARTIE B – « Par quel hasard ? »
Dans cette partie, on suppose que **la longueur du plus grand déplacement du papillon entre deux fleurs n'excède pas 2 500 dm**.

1) Donner le numéro des fleurs les plus éloignées de F_0 que le papillon peut atteindre.

2) On simule avec un tableur 10 000 trajets de papillon (en tenant compte de la restriction des 2 500 dm). Voici une vue partielle de la feuille de calcul obtenue (elle contient les numéros des fleurs successivement butinées) :

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
3	k	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
4	trajet 1	-3	2	11	28	61	-4	125	382	895	-130	-2179
5	trajet 2	-3	-8	-17	0	-33	32	161	-96	-609	-1634	-3683
6	trajet 3	3	8	17	0	-33	-98	-227	-484	29	1054	-995
7	trajet 4	3	-2	7	24	57	122	251	508	-5	-1030	-3079
8	trajet 5	-3	2	11	28	61	126	255	-2	-515	-1540	-3589
9	trajet 6	3	8	-1	16	49	114	-15	-272	-785	-1810	-3859
10	trajet 7	-3	-8	-17	-34	-1	64	193	450	963	1988	-61
11	trajet 8	3	8	17	34	67	2	-127	130	-383	642	-1407
12	trajet 9	3	8	-1	-18	15	-50	-179	78	-435	590	2639
13	trajet 10	3	8	-1	16	49	114	243	-14	-527	-1552	497
14	trajet 11	-3	-8	1	18	51	-14	-143	114	627	1652	-397
15	trajet 12	3	8	17	34	1	-64	65	322	-191	-1216	-3265
16	trajet 13	3	-2	-11	-28	5	70	199	-58	-571	454	-1595
17	trajet 14	-3	2	11	-6	-39	26	155	412	-101	924	-1125
18	trajet 15	-3	-8	1	-16	17	-48	-177	-434	79	-946	-2995
19	trajet 16	3	-2	7	24	-9	56	-73	-330	183	1208	3257
20	trajet 17	-3	-8	-17	-34	-67	-2	127	-130	-643	382	2431
21	trajet 18	-3	-8	1	18	51	116	-13	244	757	1782	-267
22	trajet 19	-3	2	11	28	61	-4	-133	-390	123	1148	3197
23	trajet 20	-3	2	11	-6	27	92	221	478	991	2016	4065
24	trajet 21	-3	2	-7	10	-23	-88	41	298	811	1836	3885
25	trajet 22	3	8	-1	-18	15	80	-49	208	-305	720	-1329
26	trajet 23	3	-2	-11	-28	5	-60	-189	68	581	1606	-443
27	trajet 24	3	8	-1	16	-17	-82	47	304	-209	816	-1233
28	trajet 25	3	8	17	0	-33	32	-97	160	-353	672	-1377
29	trajet 26	-3	2	11	-6	27	92	221	478	-35	-1060	-3109
30	trajet 27	3	8	17	34	67	2	-127	-384	129	1154	-895
………………………………												
9999	trajet 9996	3	8	17	34	1	-64	-193	64	577	-448	1601
10000	trajet 9997	-3	2	11	-6	27	92	221	-36	-549	476	-1573
10001	trajet 9998	3	-2	7	24	-9	-74	-203	54	-459	-1484	-3533
10002	trajet 9999	-3	-8	-17	0	33	98	-31	226	739	-286	1763
10003	trajet 10000	3	8	17	0	-33	-98	31	288	801	1826	3875

a) Dans cet extrait du tableau, aucun nombre entier naturel à quatre chiffres ne figure dans les colonnes B à J. Peut-il y en avoir dans les lignes non représentées ici ? Si oui, dans quelle(s) colonne(s) ?
b) Par contre 1054 apparaît colonne K ligne 6. Comment peut-on exploiter cette feuille de calcul pour estimer la probabilité que le papillon butine la fleur F_{1054} lors du 10e déplacement ? la probabilité que le papillon butine la fleur F_{1054} au cours d'un de ses trajets ?

3) Le papillon effectue p déplacements successifs, avec p fixé compris entre 1 et 11.
On note D l'ensemble des numéros des déplacements effectués vers la droite.
On note S_D la somme des longueurs, exprimées en décimètre, des déplacements effectués vers la droite.
On note S_G la somme des longueurs, exprimées en décimètre, des déplacements effectués vers la gauche.
On rappelle que P_p donne la somme des longueurs, exprimées en décimètre, des déplacements dans le cas où les p déplacements s'effectuent uniquement vers la droite. Et que : $P_p = 2^{p+1} + p - 2$.
Enfin, on note n, le numéro de la fleur sur laquelle arrive le papillon après ces p déplacements.
Avec ces notations, on a ainsi : $n = S_D - S_G$

a) Démontrer la formule suivante : $n = -P_p + 2\,S_D$
b) On note L_D la somme des 2^k pour k appartenant à D et N le nombre d'éléments de l'ensemble D.
Montrer que : $L_D = 2^p - 1 - N + \frac{n+p}{2}$.

4) Calculer la probabilité que le papillon butine la fleur F_{1054} au cours d'un trajet comportant 11 déplacements.