SUJET + CORRIGÉ

OLYMPIADES DE MATHÉMATIQUES

ACADÉMIE DE TOULOUSE

Classes de première S • 2017

Olympiades académiques de mathématiques

Session 2017
Classes de Première
Mercredi 15 mars de 10 heures 10 à 12 heures 10

EXERCICES PROPOSES PAR l'ACADEMIE

***Avertissement** :*
• Le sujet comporte quatre pages et une feuille annexe pour figures.
• Veiller à informer précisément les entêtes, numéro et nombre de pages sur chaque copie.

• Les candidats élèves de la série S. doivent traiter les exercices 1 et 3 ;
les candidats élèves des autres séries doivent traiter l'exercice 1 (sauf la partie B) et l'exercice 2.

• Les calculatrices sont autorisées, à l'exclusion de tout autre appareil électronique.

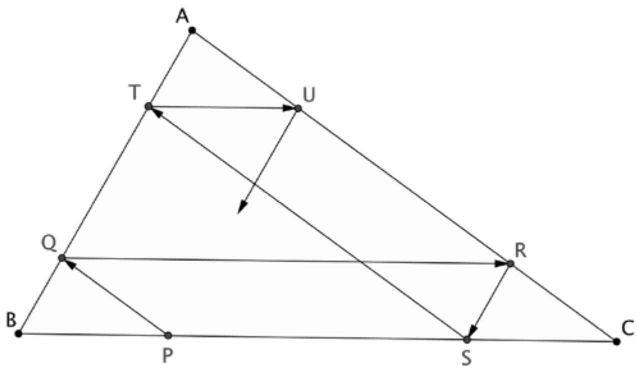
• Il est conseillé aux candidats qui ne pourraient formuler une réponse complète à une question d'exposer le bilan des initiatives qu'ils ont pu prendre.

Et partenaires en Midi-Pyrénées : Région, Institut Supérieur de l'Aéronautique et de l'Espace, Laboratoire d'Architecture et d'Analyse des Systèmes, Institut de Mathématiques de Toulouse, Département de Mathématiques, Institut National des Sciences Appliquées, Ecole Normale Supérieure de Paris, Palais de la Découverte, Ecole Nationale de l'Aviation Civile, Université Paul Sabatier, Institut de Recherche en Informatique de Toulouse, Ecole d'Economie de Toulouse, Délégation régionale CNRS, Observatoire Midi-Pyrénées, Toulouse School of Economics-Research, AIRBUS Defense and Space, Centre National d'Etudes Spatiales, Cité de l'Espace, Science Animation, Union Régionale des Ingénieurs et Scientifiques de Midi Pyrénées, Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement Public, Association *femmes et mathématiques*.

Exercice 1 (partie A tous candidats ; partie B uniquement les candidats élèves en série scientifique)
« Promenades parallèles »

Partie A – pour tous les candidats : *Dans le triangle*

On considère un triangle ABC. P est un point du segment [BC] non confondu avec B et C.
M est un point mobile qui se déplace à l'intérieur du triangle.
M part du point P.
M effectue un premier déplacement parallèlement à la droite (AC) jusqu'au point Q de [AB], puis un deuxième déplacement parallèlement à la droite (BC) jusqu'au point R de [AC] et ainsi de suite.
La figure ci-contre donne une ébauche du début du parcours du point M : de P à Q, puis R, puis S, puis T, puis U …



1) a) Tracer un triangle ABC quelconque. Placer le point P de [BC] tel que BP = $\frac{1}{5}$ BC.
Représenter les six premiers déplacements rectilignes du point M.
b) Tracer un nouveau triangle ABC quelconque. Placer le point P de [BC] tel que BP = $\frac{1}{3}$ BC.
Représenter les six premiers déplacements rectilignes du point M.

2) *Après six déplacements rectilignes, le point M semble rejoindre sa position initiale*.
Existe-t-il une position initiale P pour laquelle M rejoint sa position initiale en moins de six déplacements ? Justifier la réponse.

3) a) Démontrer que le point M rejoint sa position initiale après six déplacements dans le cas illustré par la figure donnée (ci-dessus) où BP = $\frac{1}{4}$ BC
b) Peut-on généraliser cette démonstration quelle que soit la position du point P ?
c) Après 2017 déplacements, où se trouve le point M ?

On appelle désormais ***trajet du point M*** les six premiers déplacements rectilignes du point M.

4) On appelle p le périmètre du triangle ABC.
Déterminer en fonction de p l'expression de la longueur du ***trajet du point M***.

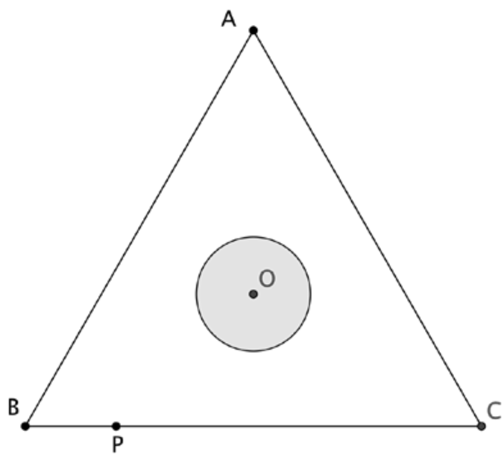
Partie B – pour les candidats élèves de la série S. uniquement : *Atteindre la cible ?*

On considère un triangle équilatéral ABC de côté 1.
On place une cible circulaire de rayon r et de centre O, point d'intersection des médiatrices du triangle ; le cercle bord de la cible fait partie de la cible.

1) Dans cette question P est le point de [BC] tel que BP = $\frac{1}{5}$ BC.

a) Si $r = \frac{1}{10}$, est ce que le point M rencontre la cible au cours de son trajet ? Justifier.

b) Quelle est la valeur minimale du rayon r pour laquelle le point M rencontre la cible au cours de son trajet ?



2) Dans cette question, P est un point de [BC], non confondu avec B et C, que l'on choisit au hasard.
Déterminer en fonction de *r* la probabilité que le point M rencontre la cible au cours de son trajet.

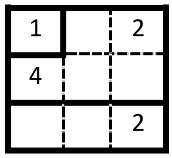
Exercice 2 (candidats élèves des séries autres que la série S.) – « Tectonic »

Le jeu Tectonic est un jeu de grille, un peu comme le sudoku.
Une grille de Tectonic a neuf cases disposées en trois lignes et trois colonnes ; elle est composée de zones de **1 à 5 cases** entourées de traits gras. L'objectif est de compléter la grille avec les chiffres manquants sachant que :

- Une zone d'une case contient forcément le chiffre 1, une zone de deux cases contient exactement les chiffres 1 et 2, et ainsi de suite …, une zone de 5 cases contient exactement les chiffres 1, 2, 3, 4 et 5.
- Deux chiffres identiques ne peuvent être placés dans deux cases ayant en commun un côté ou un sommet.

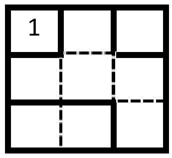
Partie 1 : Des exemples

1) Reproduire et compléter la grille n°1 ci-contre en respectant les règles du Tectonic.



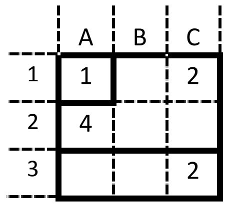
Grille n°1

2) Proposer une solution pour la grille n°2 ci-contre. Est-ce la seule ?

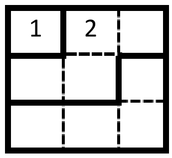


Grille n° 2

Pour la suite, vous pouvez si vous le souhaitez (ce n'est pas une obligation), désigner les cases par A1, A2, etc … selon le schéma ci-contre où le nombre 4 est positionné en A2.

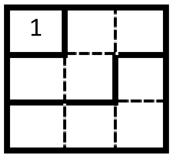


3) a) Expliquer pourquoi il n'y a pas de solution pour la grille n°3 ci-contre.

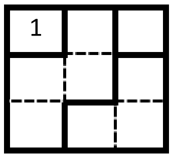


Grille n° 3

3) b) Qu'en est-il des grilles n°4 et n°5 ci-contre ?



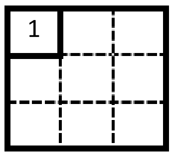
Grille n° 4



Grille n° 5

On appelle **grille possible** une grille pour laquelle il existe des solutions.
Ainsi la grille n° 2 est une grille possible et la grille n° 3 n'est pas une grille possible.

On cherche désormais les grilles possibles que l'on peut fabriquer à partir de la grille de base ci-contre. On cherche donc quels sont les traits épais que l'on peut ajouter.
Toutes les grilles présentées auparavant ont été construites de cette façon.



Grille de base

Partie 2 : Des grilles dont la plus grande zone comporte 4 cases.

On cherche les grilles possibles que l'on peut fabriquer à partir de la grille de base et dont la plus grande zone comporte 4 cases.

1) Expliquer pourquoi le nombre écrit dans le carré central (en B2) doit être un 4.
2) Expliquer pourquoi les grilles possibles comportent exclusivement, en plus de la zone se réduisant à la case A1, une zone de 4 cases, une zone de 3 cases et une zone de 1 case.
3) Il y a exactement six grilles possibles fabriquées à partir de la grille de base et comportant une zone de 4 cases.
   Tracer ces six grilles et proposer **une** solution pour chacune d'elle.

Exercice 3 (candidats élèves en série S.) – « Parachute»

Des parachutistes choisissent d'atterrir en plein milieu d'une forêt au point A à 10 km à l'Ouest d'une source S.

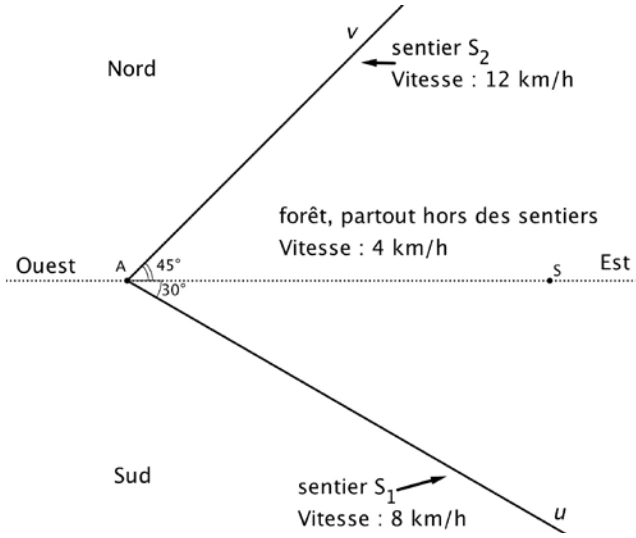
Du point A partent deux sentiers rectilignes S_1 et S_2.

Le sentier S_1, représenté par la demi-droite [Au), est orienté vers le Sud-Est et l'angle $\widehat{SAu}$ mesure 30°.

Le sentier S_2, représenté par la demi-droite [Av), est dirigé vers le Nord-Est et l'angle $\widehat{SAv}$ mesure 45°.

Sur le sentier S_1, les parachutistes peuvent avancer à la vitesse maximale de 8 km/h et sur le sentier S_2 à la vitesse maximale de 12 km/h.

Dans la forêt, leur progression est limitée à 4 km/h.



Partie A - Recherche de la zone de la forêt atteinte en 1 heure de marche

1) La figure 1 (sur feuille annexe) reproduit la carte (1 cm pour 1 km). Placer le point B du sentier S_1 le plus éloigné du point A que les parachutistes peuvent atteindre en 1 heure de marche.

2) Des parcours particuliers, selon plusieurs hypothèses

   a) *Parcours 1* – On suppose qu'un parachutiste, partant de A, décide de marcher pendant une heure de façon rectiligne sans revenir sur ses pas, sans changer de direction et à vitesse maximale.
   Représenter en couleur sur la figure 1 l'ensemble R des arrivées possibles.

   b) *Parcours 2* – On suppose qu'un autre parachutiste, partant de A, emprunte le chemin S_1 pendant 30 minutes puis décide de quitter le chemin, et d'entrer dans la forêt en marchant pendant 30 minutes de façon rectiligne, sans revenir sur ses pas, sans changer de direction.
   Représenter avec une autre couleur, sur la figure 1, l'ensemble des arrivées possibles.

   c) Un troisième parachutiste marche sur le sentier S_1 durant un quart d'heure seulement avant d'entrer dans la forêt et d'y marcher 45 minutes.
   Représenter avec une troisième couleur sur la figure 1 l'ensemble des arrivées possibles.

3) Le chef du groupe des parachutistes, passionné de mathématiques, souhaite déterminer le point E du segment [AS] le plus éloigné de A pouvant être atteint en une heure, en marchant sur le sentier S_1 ou dans la forêt.

   a) Un parachutiste peut-il atteindre un point du segment [AS] distant de A de plus de 4 km ? Expliquer.

   Le chef des parachutistes considère un point K, situé dans l'ensemble R (question 2.a)), tel que ABK soit un triangle rectangle en K.

   b) Construire un tel point K sur la figure 2 (feuille annexe) ; justifier la construction.

   c) Démontrer qu'un parachutiste peut atteindre tout point du segment [BK].

   d) En déduire le point E cherché, en donner la construction.

4) Si un parachutiste, partant du point A, utilise l'un ou l'autre des sentiers S_1 ou S_2, représenter la zone de la forêt qu'il peut atteindre en une heure de marche. Construire cet ensemble sur une nouvelle figure (échelle identique : 1 cm pour 1 km) que l'on tracera sur la copie. Expliquer les étapes de la construction.

Partie B - Atteindre la source S

Deux des parachutistes partent du point A et veulent se désaltérer.

L'un affirme pouvoir atteindre la source S en moins de 2 h 12 minutes ; l'autre affirme qu'il faut au moins 2 h 12 minutes.

Lequel des deux a raison ? Justifier.

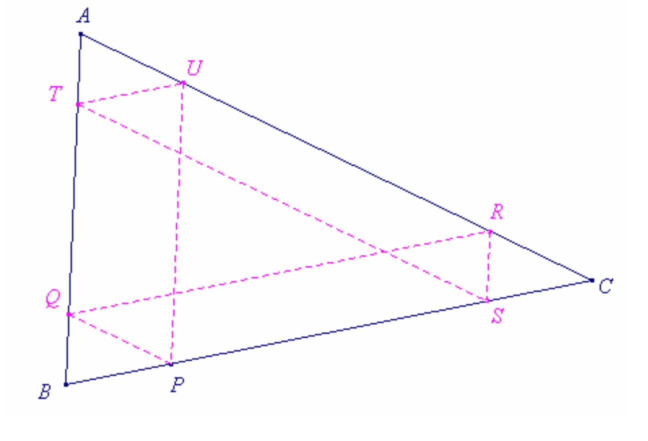
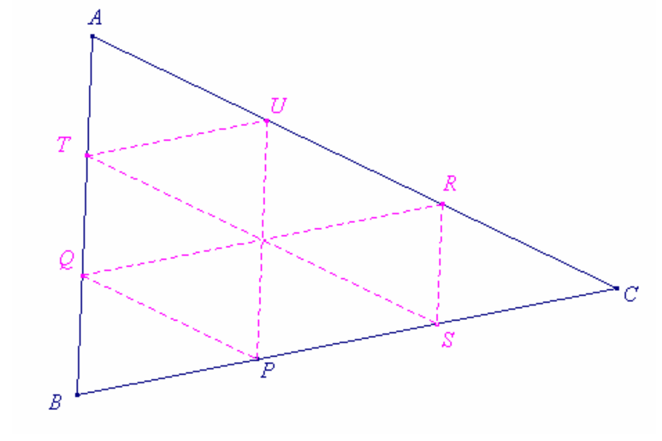
CORRECTION OLYMPIADES

EXERCICES ACADÉMIQUES

TOULOUSE 2017

Exercice 1 : Promenades parallèles

Partie A : Dans le triangle

1.a. $BP = \frac{1}{5} BC$	**1.b.** $BP = \frac{1}{3} BC$
	

2. Dans un triangle, la droite qui passe par le milieu d'un côté et qui est parallèle à un deuxième côté passe par le milieu du troisième côté. Si le point P est le milieu de $[BC]$, alors le point Q est le milieu de $[AB]$ puis le point R est le milieu de $[AC]$ et le point S est le milieu de $[BC]$: les points S et P sont confondus, M rejoint sa position initiale en trois déplacements seulement.

3. De façon générale, soit k un nombre réel tel que $0 < k < 1$. Dire que P est le point d'un segment $[BC]$ tel que $BP = k\,BC$ équivaut à dire que P est le point de ce segment tel que $CP = (1-k)CB$.

Deux autres formulations équivalentes pour déterminer la position de P sur ce segment sont d'une part que $\frac{BP}{BC} = k$ et d'autre part que $\frac{CP}{CB} = 1-k$.

3.a. Dans cette question : $k=\frac{1}{4}$. Ainsi : $\frac{BP}{BC}=\frac{1}{4}$ et $\frac{CP}{CB}=\frac{3}{4}$ sont deux façons équivalentes de déterminer la position de P sur le segment $[BC]$ que nous allons utiliser.

Par applications successives (six fois) du théorème de Thalès :

- Q est le point du segment $[BA]$ tel que $\frac{BQ}{BA}=\frac{BP}{BC}=\frac{1}{4}$.
- R est le point du segment $[AC]$ tel que $\frac{AR}{AC}=\frac{AQ}{AB}=\frac{3}{4}$.
- S est le point du segment $[BC]$ tel que $\frac{CS}{CB}=\frac{CR}{CA}=\frac{1}{4}$.
- T est le point du segment $[BA]$ tel que $\frac{BT}{BA}=\frac{BS}{BC}=\frac{3}{4}$.
- U est le point du segment $[AC]$ tel que $\frac{AU}{AC}=\frac{AT}{AB}=\frac{1}{4}$.
- V est le point du segment $[BC]$ tel que $\frac{CV}{CB}=\frac{CU}{CA}=\frac{3}{4}$.

La détermination de la position de ce sixième point V est équivalente à la détermination du point P : les points V et P sont confondus, le point M revient à la position initiale après six déplacements.

Remarquons au passage que les points P et S sont symétriques par rapport au milieu de $[BC]$; Q et T le sont par rapport au milieu de $[AB]$ et R et U par rapport au milieu de $[CA]$.

3.b. Compte tenu de la remarque faite en début de question, la démonstration est généralisable à toute position de P sur le segment $[BC]$, en notant k le rapport $\frac{BP}{BC}$ ou de façon équivalente en notant $\frac{CP}{CB}=1-k$. Le réel k se substitue à $\frac{1}{4}$ et le réel $1-k$ se substitue à $\frac{3}{4}$.

3.c. En remarquant que la division euclidienne de 2017 par 6 s'écrit : $2017=336\times 6+1$, le point M sera en Q après avoir fait 336 fois le circuit complet des six déplacements le ramenant en P.

4. Désignons par a, b, c les longueurs des côtés, respectivement $[BC]$, $[CA]$ et $[AB]$. En considérant maintenant le « troisième rapport » dans les six applications du théorème de Thalès faites dans la question précédente, nous pouvons écrire : $\frac{PQ}{CA}=\frac{TU}{BC}=\frac{RS}{AB}=k$ ainsi que : $\frac{QR}{BC}=\frac{ST}{CA}=\frac{UP}{AB}=1-k$

La longueur du parcours est égale à $PQ+QR+RS+ST+TU+UP=k\,(a+b+c)+(1-k)(a+b+c)$, c'est-à-dire à $a+b+c$: la longueur du parcours est égale au périmètre du triangle.

Partie B : Atteindre la cible

Remarques préalables.

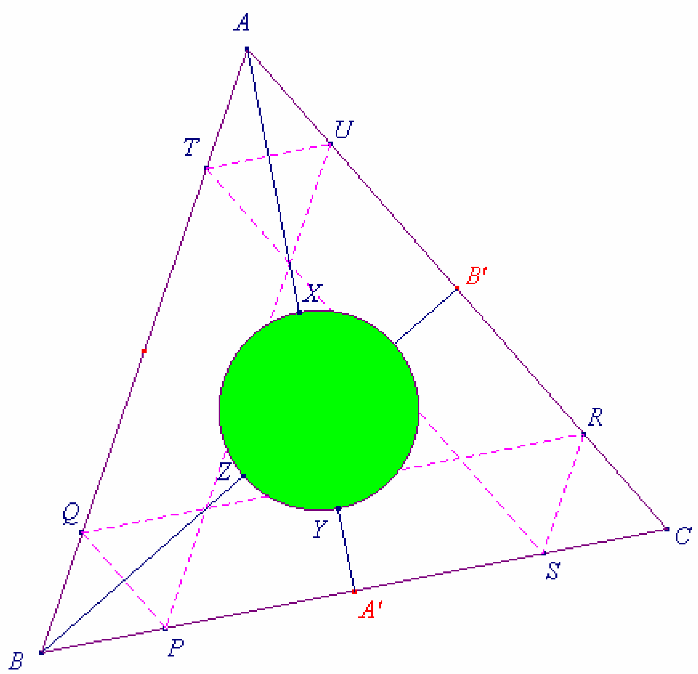
Le triangle équilatéral étant supposé de côté 1, la longueur d'une médiane-médiatrice de ce triangle est égale à $\frac{\sqrt{3}}{2}$. La distance du centre O du triangle aux sommets du triangle est égale à $\frac{2}{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{3}$ et la distance de O aux côtés du triangle est égale à $\frac{1}{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{6}$.

Si r est supérieur à ce nombre, le cercle coupe les côtés du triangle, et le parcours de M rencontre nécessairement le cercle. Nous pouvons supposer *a priori* que $r < \frac{\sqrt{3}}{6}$, faute de quoi la rencontre de M avec le cercle est l'évènement certain, et la question à résoudre perd son sens.

D'autre part, nous pouvons supposer, sans pour autant diminuer la généralité, que le point P est choisi au hasard non pas sur le segment $[BC]$ en entier, mais sur le segment $[BA']$ où A' désigne le milieu de $[BC]$. Les points P et S sont en effet symétriques par rapport au point A'. Le parcours de M lorsqu'il part de P et le parcours de M lorsqu'il part du symétrique de P par rapport à A' sont identiques.

Désormais, P sera un point choisi au hasard sur $[BA']$ et non sur $[BC]$ en entier.

En raison des propriétés de symétrie du triangle équilatéral, le parcours du point M rencontre le cercle si et seulement si au moins l'un des deux segments $[QR]$) ou $[TU]$ rencontre le cercle.
En choisissant P non pas sur le segment $[BC]$ en entier, mais sur le segment $[BA']$, le centre du cercle est plus près de $[QR]$ que de $[TU]$
Or, $[QR]$ rencontre le cercle si et seulement si il coupe la médiane-médiatrice $[AA']$ en un point situé entre X et Y (cf figure ci-contre).



Nous sommes amenés à nous intéresser aux positions des points d'intersection du cercle avec une quelconque des médianes. Le point O centre du cercle est le point de concours des médianes-médiatrices.

Sur la figure ci-dessus $A'O = \frac{1}{3} A'A = \frac{\sqrt{3}}{6}$. Les points d'intersection *X* et *Y* du cercle avec [*AA'*] sont tels que :

$A'X = \frac{\sqrt{3}}{6} + r$ et $A'Y = \frac{\sqrt{3}}{6} - r$.

Soit maintenant de façon générale *k* le nombre réel tel que $AP = k\,BC$. En choisissant *P* non pas sur le segment [*BC*] en entier, mais sur le segment [*BA'*], le réel *k* est tel que $0 \le k \le \frac{1}{2}$.

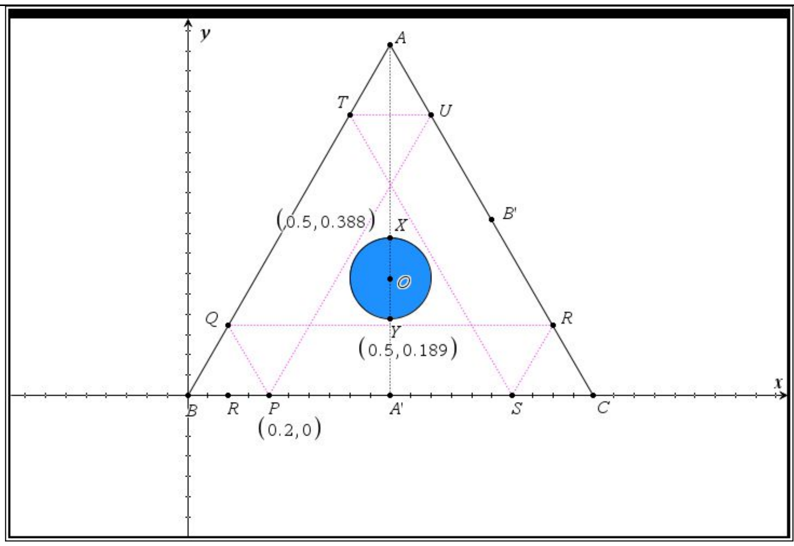
Si nous désignons par *I* le point d'intersection de [*AA'*] avec [*QR*] : $A'Y = k\,A'A = k\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Le parcours de *M* rencontre le cercle si et seulement si *I* se trouve entre *X* et *Y* c'est-à-dire si et seulement si $\frac{\sqrt{3}}{6} - r \le k\frac{\sqrt{3}}{2} \le \frac{\sqrt{3}}{6} + r$.

1. Dans cette question, $k = \frac{1}{5}$.

1.a. Lorsque $r = \frac{1}{10}$, $\frac{\sqrt{3}}{6} - r = 0{,}189$ à 10^{-3} près et $\frac{\sqrt{3}}{6} + r = 0{,}389$ à 10^{-3} près tandis que $k\frac{\sqrt{3}}{2} = 0{,}173$ à 10^{-3} près.

Le parcours de *M* ne rencontre pas le cercle.



1.b. La valeur minimale de *r* pour laquelle le parcours de *M* rencontre le cercle est donnée par : $\frac{\sqrt{3}}{6} - r = \frac{1}{5}\frac{\sqrt{3}}{2}$, c'est-à-dire : $r = \frac{\sqrt{3}}{6} - \frac{\sqrt{3}}{10} = \frac{\sqrt{3}}{15}$.

(Le parcours de *M* rencontre un cercle de rayon 0,116 mais ne rencontre pas un cercle de rayon 0,115).

2. Dire que *P* est choisi au hasard sur le segment [*BA'*] revient à dire que le coefficient *k* suit une loi uniforme sur l'intervalle $\left[0, \frac{1}{2}\right]$.

La double inégalité $\frac{\sqrt{3}}{6} - r \le k\frac{\sqrt{3}}{2} \le \frac{\sqrt{3}}{6} + r$ est équivalente à $\frac{1}{3} - \frac{2r\sqrt{3}}{3} \le k \le \frac{1}{3} + \frac{2r\sqrt{3}}{3}$.

L'intervalle $\left[\frac{1}{3}-\frac{2r\sqrt{3}}{3},\ \frac{1}{3}+\frac{2r\sqrt{3}}{3}\right]$ a pour diamètre $\frac{4r\sqrt{3}}{3}$. En supposant que $r<\frac{\sqrt{3}}{6}$, cet intervalle est inclus dans $\left[0,\ \frac{1}{2}\right]$.

La probabilité que le parcours de M rencontre le cercle est le rapport des longueurs des deux intervalles.

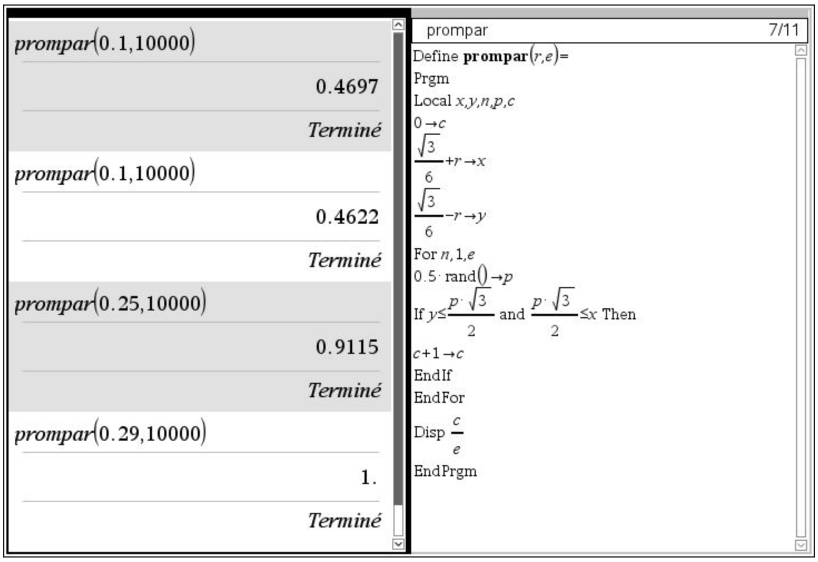
Cette probabilité est égale à $\frac{8r\sqrt{3}}{3}$.

En particulier, lorsque $r=\frac{1}{10}$, cette probabilité est égale à 0,462 à 10^{-3} près.

Complément : une simulation de l'expérience

Le programme **prompar** est affecté de deux arguments : le rayon r de la cible à atteindre et le nombre e d'essais de tirs suivant une « promenade parallèle » que l'on veut effectuer.

Les variables x et y sont les ordonnées des points X et Y dans le repère visible sur la figure de la question **B.1.a**. Pour chaque essai, l'abscisse p de P est un nombre aléatoire compris entre 0 et 0,5 (le point P est un point choisi au hasard sur $[BA']$). Le tir est réussi si et seulement si l'ordonnée du point Q est située entre y et x. Si c'est le cas, le compteur c est incrémenté d'une unité.



En fin de programme, la fréquence des tirs réussis est affichée.

Le programme a été exécuté deux fois avec $r=\frac{1}{10}$; $e=10000$. Les fréquences observées sont toutes les deux dans l'intervalle de fluctuation $\left[\frac{0{,}8\sqrt{3}}{3}-\frac{1}{100},\ \frac{0{,}8\sqrt{3}}{3}+\frac{1}{100}\right]$.

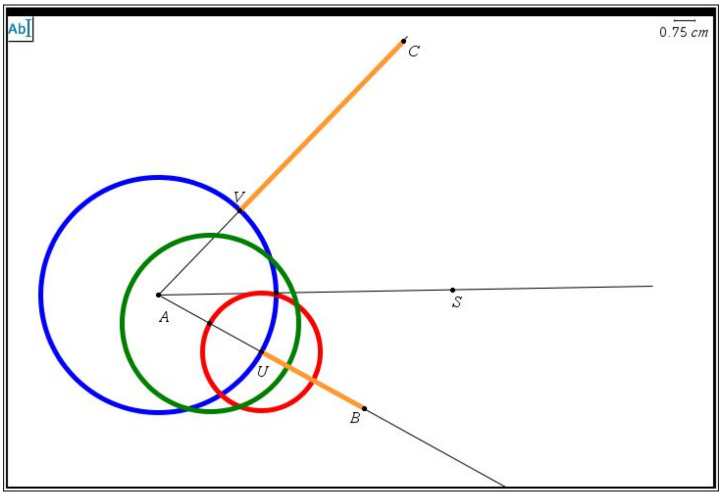
Pour $r=\frac{1}{4}$; $e=10000$, la fréquence observée dépasse 90 % et pour $r=0{,}29$, tous les tirs sont réussis (pourquoi cela ? …).

Exercice 3 : « Parachute »

Partie A : Zone de la forêt atteinte en une heure de marche

1. $AB = 8$

2.a. En bleu, la frontière de la zone pouvant être atteinte en suivant l'option de la question **2.a.** Il convient d'y adjoindre les deux segments coloriés en orange (cas particuliers où le parachutiste suit un chemin).

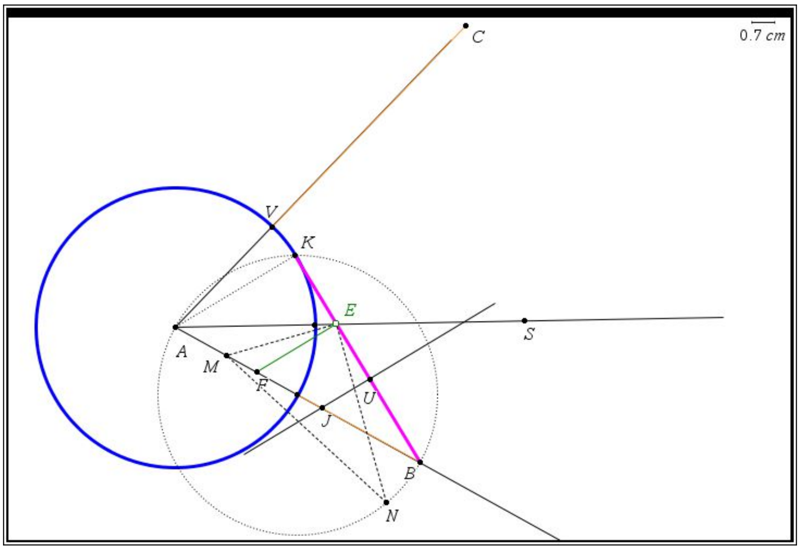


2.b. En rouge, la frontière de la zone pouvant être atteinte en suivant l'option de la question **2.b.** Il convient d'y adjoindre le segment joignant au point B l'intersection du cercle rouge avec $[AB]$.

Logiquement, il ne faudrait colorier que la partie située dans le secteur angulaire mais le logiciel utilisé pour le dessin ne fait pas ça. Affirmatif !

2.c. En vert la frontière de la zone pouvant être atteinte en suivant l'option de la question **2.c.** Il convient d'y adjoindre le segment joignant au point B l'intersection du cercle vert avec $[AB]$.

3.a. Soit I le point de $[AS]$ distant de 4 km du point A (point d'intersection du cercle bleu avec $[AS]$.) Le cercle vert coupe le segment $[AS]$ en un point strictement situé à l'intérieur du segment $[IS]$. Il est possible, en suivant l'option **2.c.** D'atteindre un point situé sur $[AS]$ à plus de 4 km de A.



3.b. Les traces de la construction de K ont été laissées en pointillés sur la figure ci-contre.

Le triangle ABK est un triangle rectangle dont le côté [AK] mesure 4 km et dont l'hypoténuse [AB] mesure 8 km. (Remarquons que de ce fait, il s'agit d'un demi triangle équilatéral. Son angle de sommet B mesure 30°).

3.c. Soit U un point du segment [BK] et J le point d'intersection de la parallèle à (AK) menée par U avec [AB].Posons $AJ = x$ avec $0 \le x \le 8$.

En appliquant le théorème de Thalès dans le triangle ABK (avec les rapports des troisièmes côtés) : $\frac{UJ}{AK} = \frac{BJ}{BA}$,

ce qui donne : $\frac{UJ}{4} = \frac{8-x}{8}$ puis $UJ = 4 - \frac{x}{2}$.

Considérons la durée du parcours $AJ + UJ$. Le segment [AJ] est parcouru à la vitesse de 8 km.h^{-1} alors que le segment [UJ] est parcouru à la vitesse de 4 km.h^{-1}. La durée de ce parcours est $\frac{AJ}{8} + \frac{UJ}{4} = \frac{x}{8} + \frac{4 - \frac{x}{2}}{4} = 1$.

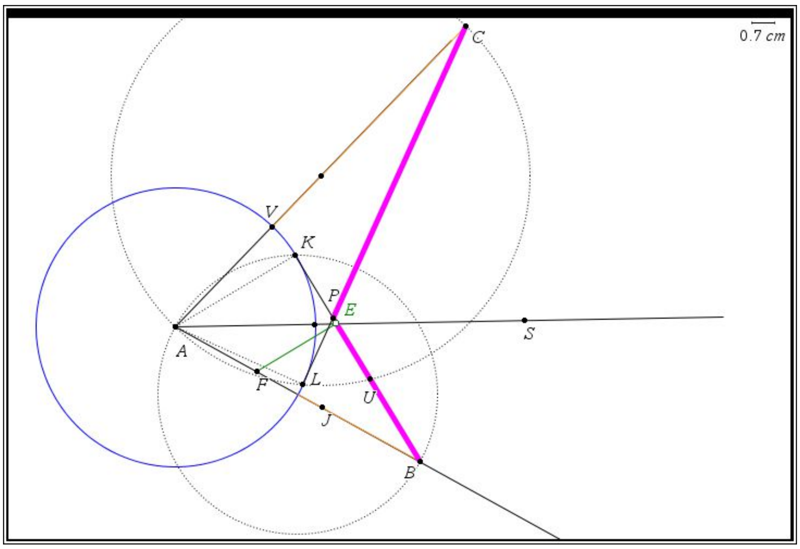
Cette durée est indépendante de x, c'est-à-dire de la position de U sur [BK] et elle est exactement égale à une heure. Tout point du segment [BK] est accessible en exactement une heure depuis le point A.

3.d. Le point E est l'intersection de [BK] et de [AS] (voir figure **3.b**).

Il resterait à justifier que E est bien le point maximal, ce que l'énoncé ne demande pas. Une justification est la suivante :

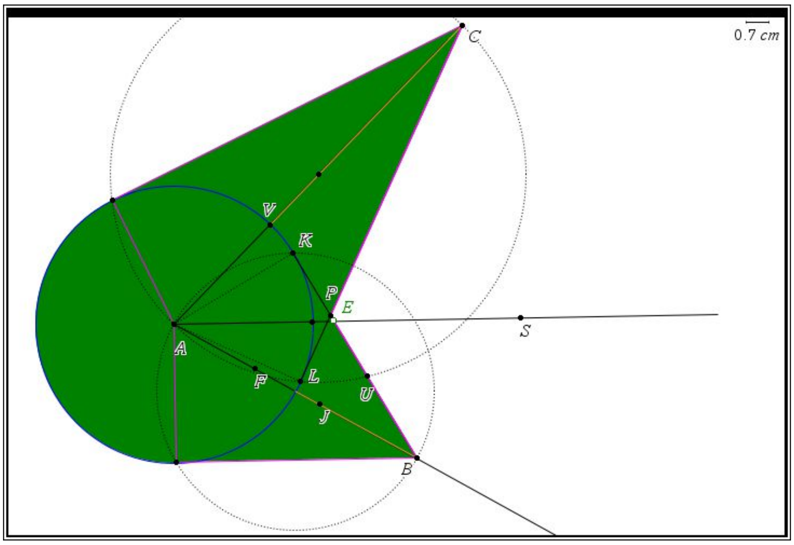
Soit M est un point du segment [AB]. On construit le triangle EMN rectangle en E dont le côté EM est la moitié de l'hypoténuse MN. Pour ce faire, le sommet N est l'intersection de la perpendiculaire en M à (EM) avec le cercle de diamètre [AB] (théorème de l'angle inscrit : l'angle de sommet N de ce triangle a même mesure que l'angle de sommet A de ABK). La durée du parcours AM+ME est la même que la durée du parcours $AM + MN$ parcouru à la vitesse constante de 8 km.h^{-1}. Vu que $AM + MN \ge AB$, il faut au moins une heure pour parcourir ce trajet, et strictement plus d'une heure si M est distinct de F. E est bien maximal.

4. On effectue une construction similaire à la précédente. Le point L est le point du cercle bleu tel que ALC est rectangle en L. La longueur de son hypoténuse [AB] est égale à trois fois celle de son côté [AL] (dans le même rapport que celui des vitesses de déplacement). Nous montrerions comme précédemment que tout point du segment [CP] est accessible en exactement une heure en empruntant S_2 puis en coupant par la forêt parallèlement à [AL]



Nous obtenons le tracé figuré en gras magenta, représentant les points frontaliers accessibles en une heure exactement. Pour atteindre un point entre *P* et *B*, il est plus rentable de passer par S_1 et pour atteindre un point entre *P* et *C*, il est plus rentable de passer par S_2. Remarquons que pour se diriger vers la source, il est un peu plus rentable de suivre d'abord S_1 que d'abord S_2.

Pour obtenir toute la zone accessible en une heure au plus depuis le point *A*, nous devons construire les deuxièmes tangentes au cercle bleu issues de *B* et de *C*. Nous obtenons la zone coloriée en vert ci-contre. Pour atteindre un point à l'intérieur du cercle bleu, on peut couper droit dans la forêt et pour atteindre extérieur, il faut suivre pendant un moment un des deux chemins puis couper par la forêt.



Partie B : Aller vers la source

Le contrôle des affirmations des deux parachutistes nous contraint à calculer la durée du trajet $AF + FE + ES$. Nous savons depuis la partie précédente qu'il faut une heure pour parcourir $AF + FE$, il reste à déterminer quelle est la distance ES et le temps nécessaire pour la parcourir.

Le triangle ABE est un triangle isocèle car ses angles de sommets A et B mesurent tous deux 30° et sa base mesure 8 km. Ses côtés ont pour longueur : $\frac{AB}{2\cos 30°} = \frac{8\sqrt{3}}{3}$.

Donc : $ES = 10 - \frac{8\sqrt{3}}{3}$ et le temps mis pour parcourir cette distance à la vitesse de 4 km.h^{-1} est égal à $\frac{10 - \frac{8\sqrt{3}}{3}}{4} = \frac{5}{2} - \frac{2\sqrt{3}}{3}$. Une calculatrice indique que $1{,}34 < \frac{5}{2} - \frac{2\sqrt{3}}{3} < 1{,}35$ (en nombres décimaux d'heures).

Il faut plus de 1 heure 20 min et moins de 1 heure 21 min pour parcourir cette distance.

La durée totale du parcours est un peu supérieure à 2 heures 20 minutes.

En tout état de cause, il faut plus de 2 heures 12 minutes pour atteindre la source. Le fait de suivre le chemin S_1 puis de couper par la forêt fait gagner un peu moins de 10 minutes par rapport à la durée du parcours intégral du segment [ES], qui est égale à 2 heures 30 minutes.