SUJET + CORRIGÉ

OLYMPIADES DE MATHÉMATIQUES

ACADÉMIE DE TOULOUSE

Classes de première S • 2012

OLYMPIADES ACADÉMIQUES DE MATHÉMATIQUES

Académie de Toulouse et Agence pour l'enseignement français à l'étranger – zone ibérique
SESSION 2012

CLASSES DE PREMIÈRE
DURÉE : 4 heures

Avertissement : Le sujet propose cinq exercices indépendants.
<u>Chaque candidat doit traiter seulement quatre exercices selon la répartition suivante</u> *:*
- *candidats élèves de la série S. : traiter les exercices 1, 2, 3 et 5 ;*
- *candidats élèves des autres séries : traiter les exercices 1, 2, 3 et 4.*

Les calculatrices sont autorisées.
Les candidats sont invités à proposer des réponses argumentées. Il est rappelé que la qualité des explications est un critère important d'appréciation.
D'autre part, les candidats sont aussi encouragés à rédiger sur la copie leurs tentatives de recherche même non abouties.

<u>Exercice 1 (national) :</u> ***Nombres digisibles*** *(tous candidats)*

On dit qu'un nombre entier est *digisible* lorsque les trois conditions suivantes sont vérifiées :
- aucun de ses chiffres n'est nul ;
- il s'écrit avec des chiffres tous différents ;
- il est divisible par chacun d'eux.

Par exemple,
- 24 est *digisible* car il est divisible par 2 et par 4.
- 324 est *digisible* car il est divisible par 3, par 2 et par 4.
- 32 n'est pas *digisible* car il n'est pas divisible par 3.

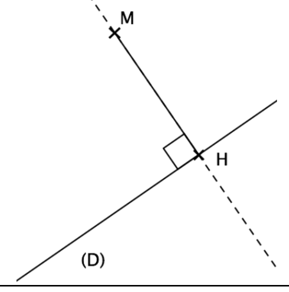
On rappelle qu'un nombre entier est divisible par 3 si et seulement si la somme de ses chiffres est divisible par 3.

1) Proposer un autre nombre *digisible* à deux chiffres.
2) Proposer un nombre *digisible* à quatre chiffres.
3) Soit n un entier *digisible* s'écrivant avec un 5.
   a) Démontrer que 5 est le chiffre de ses unités.
   b) Démontrer que tous les chiffres de n sont impairs.
   c) Démontrer que n s'écrit avec au plus quatre chiffres.
   d) Déterminer le plus grand entier *digisible* s'écrivant avec un 5.
4) Soit n un entier *digisible* quelconque.
   a) Démontrer que n s'écrit avec au plus sept chiffres.
   b) Si n s'écrit avec sept chiffres, dont un 9, déterminer les chiffres de n.
   c) Déterminer le plus grand entier *digisible*.

<u>Exercice 2 (national) :</u> ***Plus proche*** *(tous candidats)*

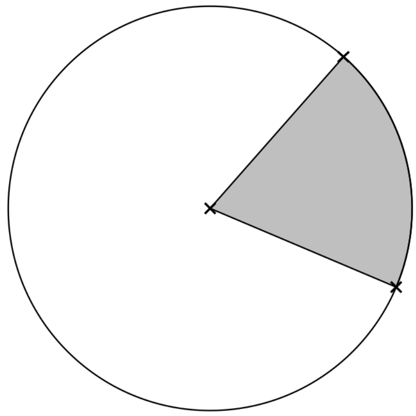
Rappels

• *On appelle* ***distance entre un point M et une droite (D)*** *la distance MH, où H est le point d'intersection de (D) avec la droite perpendiculaire à (D) passant par M.*



• *Dans la figure ci-contre, si le rayon du disque est R, et si l'angle du secteur angulaire grisé mesure* α *(en degrés), alors* ***l'aire de la portion de disque*** *grisée vaut* $\frac{\pi\alpha R^2}{360}$.

Dans la partie II de l'exercice, on considérera la distance d'un point M à ***un segment [BC]*** *comme étant la distance du point M à la droite (BC).*



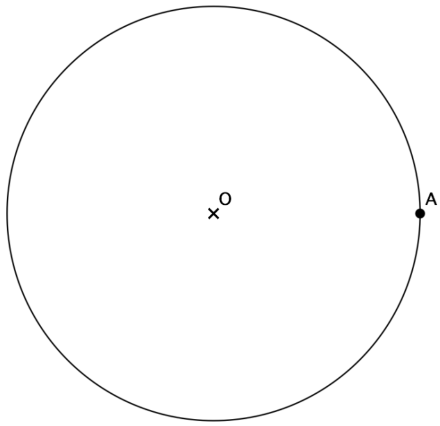
Partie I

Soit C un cercle de centre O, A un point de ce cercle et D le disque délimité par ce cercle.

1) Reproduire la figure, et représenter l'ensemble des points du disque équidistants de O et de A.

2) Hachurer l'ensemble des points du disque plus proches de O que de A.

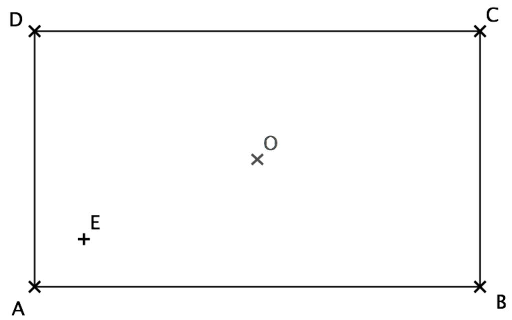
3) Soit M un point déterminé aléatoirement de manière équiprobable sur la surface du disque D.
Quelle est la probabilité que M soit plus proche de O que de A ?



Partie II

Soit ABCD un rectangle de longueur AB = 20 cm et de largeur BC = 12 cm, de centre O.
Soit E un point situé à l'intérieur du rectangle, proche de A, à 2 cm de chaque bord (comme sur la figure ci-après, qui n'est toutefois pas à l'échelle).

Soit M un point déterminé aléatoirement de manière équiprobable à l'intérieur du rectangle ABCD.



1) Quelle est la probabilité que M soit plus proche du côté [BC] que du côté [AD] ?

2) a) Reproduire le rectangle, et représenter l'ensemble des points intérieurs au rectangle et équidistants des côtés [AB] et [BC].
b) Hachurer l'ensemble des points intérieurs au rectangle et plus proches du côté [BC] que du côté [AB].
c) Quelle est la probabilité que M soit plus proche du côté [BC] que du côté [AB] ?

3) Quelle est la probabilité que M soit plus proche du côté [AB] que des trois autres côtés [BC], [CD] et [DA] ?

4) Quelle est la probabilité que M soit plus proche de O que de E ?

5) Quelle est la probabilité que M soit plus proche de O que des quatre sommets A, B, C et D ?

<u>Exercice 3 (académique) :</u> ***Le concours d'Olympie*** *(tous candidats)*

Tous les ans, la ville d'Olympie organise un concours. Ce concours débute à 14 heures précises.

1) Deux amis Raymond et Eddie qui habitent dans le même village à 10 km d'Olympie décident de se rendre à ce concours. Ils disposent d'un seul vélo qui ne peut transporter qu'une seule personne (pas de porte-bagages !). Ils estiment que leur vitesse moyenne à vélo est de 20 km/h et que leur vitesse moyenne à pied est de 5 km/h.
   Ils décident de partir à 12 h 30.

   a) Raymond propose l'organisation suivante : il fait le début du parcours à vélo. Arrivé chez son cousin Albert qui habite à 3 km d'Olympie, il dépose son vélo et poursuit à pied. Lorsque Eddie arrivera chez Albert, il récupèrera le vélo et finira le parcours avec.
   A quelle heure le dernier des deux amis va-t-il arriver à Olympie ?

Dans la suite, on suppose que l'on peut laisser le vélo, sans surveillance, n'importe où sur le chemin d'Olympie.

   b) Raymond propose de laisser son vélo entre la maison d'Albert et Olympie. Le dernier des deux amis arrivera-t-il plus tard à Olympie que si Raymond laisse le vélo chez Albert ?

   c) A combien de kilomètres d'Olympie Raymond doit-il déposer le vélo pour que la durée du trajet du plus lent des deux amis soit la plus courte possible ?
   A quelle heure au plus tard peuvent-ils partir pour être tous les deux à l'heure au concours ?

2) Au dernier moment, Jeannie, camarade de Raymond et Eddie, se joint à eux pour aller au concours. On considère qu'elle se déplace, à vélo et à pied, aux mêmes vitesses moyennes que Raymond et Eddie.
   Raymond, Eddie et Jeannie veulent partir ensemble le plus tard possible et être à l'heure pour le début du concours.

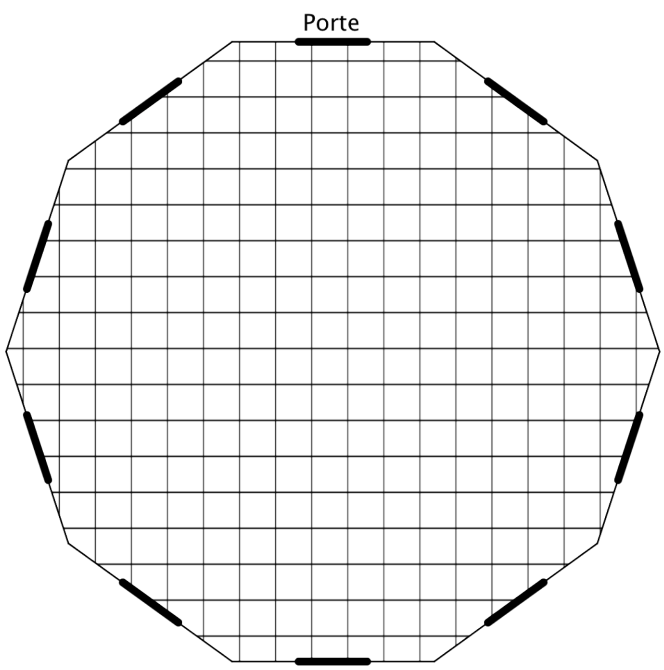
   a) S'ils disposent d'un seul vélo, à quelle heure doivent-ils partir au plus tard pour être à l'heure au concours et comment doivent-ils s'organiser ?

   b) Jeannie décide finalement d'amener son vélo, lui aussi sans porte-bagages. Les trois amis disposeront donc de deux vélos pouvant transporter chacun une seule personne. A quelle heure doivent-ils partir au plus tard pour être à l'heure au concours ?

3) Jeannie se dit alors : « Si nous étions sept à vouloir aller à ce concours dans les mêmes conditions avec des bicyclettes sans porte-bagages, il en faudrait au moins cinq pour y arriver en moins d'une heure ». Jeannie a-t-elle raison ?

<u>Exercice 4 (académique) :</u> ***Peintures et gravures*** *(candidats élèves des séries autres que la série S.)*

Dans le salon en rotonde sont accrochés dix beaux tableaux à des clous équidistants les uns des autres : une gravure du port de Rouen (R), une nature morte de Paul Cézanne (Cz), une peinture de grand-père (GP), une gravure de Toulouse-Lautrec (TL), une peinture de la Tour Eiffel (TE), une peinture de Bernard Buffet (BB), une peinture de Paul Klee (K), une vieille carte du Monde gravée (CM), une gravure chinoise (Ch), une gravure japonaise (J).



Aujourd'hui, Maman propose de repenser la disposition des tableaux. Nous discutons donc de la meilleure façon de les accrocher ; il y a finalement six souhaits :

S1- *d'abord*, dit Maman, *gravures et peintures doivent être alternées.*

S2- *et puis*, dit Papa, *la gravure du port de Rouen ne doit surtout pas avoisiner la nature morte de Paul Cézanne ; ni la peinture de grand-père.*

S3- *je voudrais que la gravure de Toulouse-Lautrec et la peinture de la Tour Eiffel soient diamétralement opposées*, dit mon grand-oncle Arthur.

S4- … *que la peinture de Bernard Buffet soit à côté de la vieille carte du monde*, dit ma petite sœur, *mais que cette dernière soit elle-même voisine de la peinture de la tour Eiffel*.

S5- *la peinture du grand-père et la nature morte de Cézanne doivent encadrer la gravure chinoise*, demande mon petit frère.

S6- *et moi*, dis-je enfin, *je souhaite simplement que le tableau de Bernard Buffet n'avoisine pas la gravure japonaise*.

1) Par ailleurs Maman commence par placer la carte du Monde au dessus de la porte ; elle réussit finalement à accrocher tous les tableaux en faisant plaisir à tout le monde.
   a) Proposer une disposition satisfaisant les six souhaits.
   b) Y en a-t-il d'autres ? Si oui combien ?

2) Si c'est plutôt la peinture de Paul Klee que Maman avait choisi de placer au dessus de la porte, aurait-il été possible de disposer les tableaux ? Si oui, de combien de manières ?

3) Sans décider d'avance quel tableau est accroché au dessus de la porte, combien y a-t-il de dispositions possibles des tableaux respectant les six souhaits ?

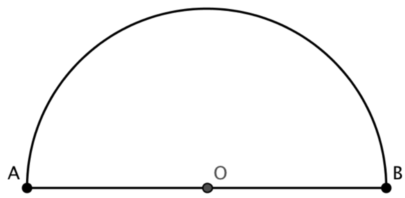
4) a) Il semble que le nombre de tableaux s'intercalant entre la carte du Monde et la peinture de Paul Klee soit indépendant de la disposition des tableaux. Est-ce vrai ?
   b) Est-ce vrai pour la peinture de Paul Klee et la peinture de grand-père ?
   c) On choisit deux tableaux au hasard parmi les dix. Qu'est-ce qui est le plus probable ? :
      • le nombre de tableaux s'intercalant entre eux ne dépend pas de la disposition ;
      • le nombre de tableaux s'intercalant entre eux dépend de la disposition.

<u>Exercice 5 (académique) :</u> ***Largeur constante*** *(candidats élèves de la série S.)*

On considère une courbe fermée du plan et un point M de cette courbe.
On peut alors toujours trouver un point N sur la courbe, pas forcément unique, pour lequel la distance MN - c'est-à-dire la longueur du segment [MN] - est maximale.
Cette valeur maximale est appelée « largeur en M » de la courbe ; on la note L(M).

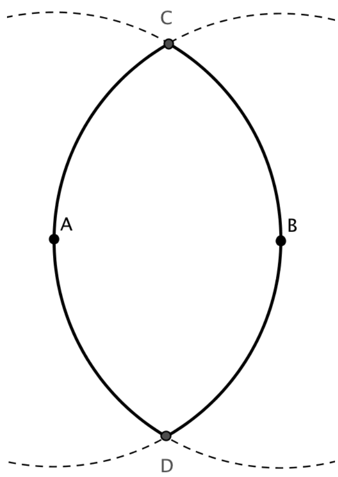
On dit qu'une courbe est à largeur constante si la largeur est la même en chacun de ses points.
Dans cet exercice on étudie quelques courbes fermées et on examine si leur largeur est constante.

1) Soit la courbe fermée constituée par un segment [AB] de longueur $2R$ et un demi-cercle de diamètre [AB] ; on note O le milieu de [AB].
a) Déterminer en fonction de R, la largeur en O de la courbe : L(O).
b) Déterminer en fonction de R, la largeur en A de la courbe : L(A).
c) Cette courbe est-elle à largeur constante ?



2) Un cercle de centre O et de rayon R est une courbe fermée. Est-elle à largeur constante ?

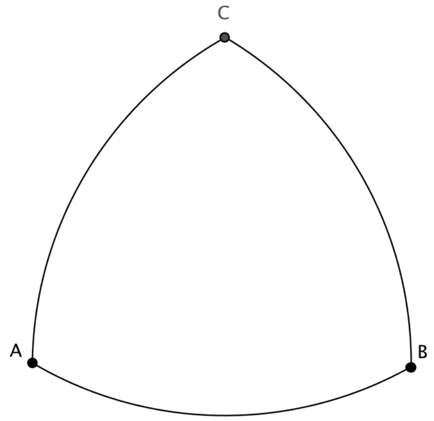
3) La courbe fermée ci-contre est constituée des deux arcs de cercle tracés en trait plein. L'un des deux a pour centre A, l'autre a pour centre B. Ils ont tous les deux pour rayon AB et pour extrémités les points C et D communs aux deux cercles.
Cette courbe est-elle à largeur constante ?



4) La courbe fermée ci-contre est appelée « triangle » de Reuleaux. Elle est construite à partir des sommets d'un triangle équilatéral ABC de côté *d*. Elle est composée de trois arcs de cercle centrés respectivement en A, B et C et ayant pour extrémités les deux autres sommets du triangle équilatéral ABC.

a) M étant un point de l'arc BC autre que B et C, quel est le point du « triangle » de Reuleaux le plus éloigné de M ?

b) Le « triangle » de Reuleaux est-il une courbe à largeur constante ?



5) a) Construire sur la copie un « triangle » de Reuleaux de sommets A, B et C (on prendra 8 cm pour *d*) et les points d'intersection A', B' et C' des médiatrices des segments [BC], [AC] et [AB] avec les arcs de cercle composant le « triangle » de Reuleaux.

b) Quelle est la nature du triangle A'B'C' ?

6) Un triangle équilatéral MNP étant donné, proposer au moins trois courbes fermées à largeur constante passant par ses trois sommets.

N.B. : Le « triangle » de Reuleaux doit son nom à l'ingénieur allemand Franz Reuleaux (1829-1905), qui fut au XIX^e siècle un pionnier du génie mécanique ; ce « triangle » est associé au moteur à piston rotatif dont le rotor, qui n'est pas cylindrique, est à la base un « triangle » de Reuleaux.

CORRECTION, TOULOUSE 2012

Premier exercice Académique (exo 3)

Olympiades mathématiques, S

1. **Une bicyclette et deux concurrents**

   a) Raymond fait 7 km à vélo et 2 km à pied ; durée $\frac{7}{20}$ h $+ \frac{3}{5}$ h $= \frac{19}{20}$ h.

   Eddie fait 3 km à vélo et 7 km à pied ; durée : $\frac{7}{5}$ h $+ \frac{3}{20}$ h $= \frac{31}{20}$ h.

   Il faut 1 h 33 à Eddie pour arriver !
   Eddie arrive à 14 h 03.

   b) Si le vélo est resté après chez Albert, cela ralentit encore plus Eddie.

   c) Soit x la distance parcourue par Raymond à vélo ($0 < x \leqslant 10$).
   Raymond fait x km à vélo et $10 - x$ km à pied ; durée : $\frac{40-3x}{20}$ h.
   Eddie fait $10 - x$ km à pied et x km à vélo ; durée : $\frac{3x+10}{20}$ h.
   Partant ensemble, ils arrivent ensemble pour x valant 5 (km) ; sinon Raymond ou bien Eddie arrive après l'autre et il met plus de temps que dans la première option ($x = 5$).
   Durée optimale : 1 heure 15.
   Ils peuvent partir à 13 h 45 et c'est l'horaire maximum.

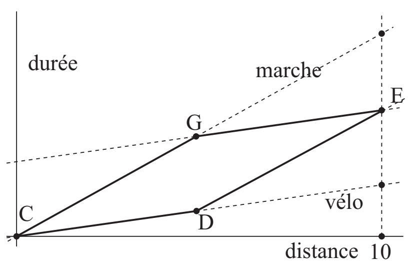
   Plus généralement : pour la distance D km, les vitesses v km/h et V km/h (marche et vélo respectivement), pour x km à vélo de X, les durées sont :

   - pour Raymond : $\frac{x}{V} + \frac{D-x}{v}$ h.

   - pour Eddie : $\frac{x}{v} + \frac{D-x}{V}$ h.

   Avec le même raisonnement, l'optimum est pour $x = \frac{D}{2}$ km avec la durée $D.\left(\frac{1}{2v} + \frac{1}{2V}\right)$ h, soit $\frac{D}{2}.\frac{v+V}{v.V}$ h

   Il n'y a que simplicité sans inconvénient à ce que Raymond fasse tout son lot de vélo de prime abord. On a alors le schéma



source : apmep

2. a) **Une bicyclette et trois concurrents**

Raymond fait x km à vélo, $D - x$ km à pied. Durée : $\dfrac{x}{V} + \dfrac{D-x}{v}$ h.

Eddie fait y km à vélo et $D - y$ km à pied. Durée : $\dfrac{y}{V} + \dfrac{D-y}{v}$ h.

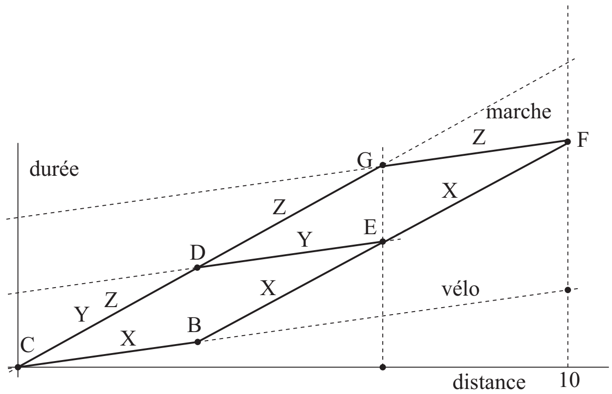
Jannie fait $D - x - y$ km à vélo et $x + y$ km à pied. Durée : $\dfrac{D-x-y}{V} + \dfrac{x+y}{v}$ h.

Partant ensemble, il arrivent ensemble pour $x = y = \dfrac{D}{3}$; hors de cela, l'un arrive après les autres et dans une durée supérieure à la première option.

L'optimum de durée vaut $\dfrac{D}{3} \times \dfrac{v+2V}{vV}$ h.

Application : $D = 10, v = 5, V = 20$; durée : 1 h 30.

Il n'y a que simplicité sans inconvénient à ce que Raymond fasse tout son lot de vélo de prime abord, suivi de Y. . .On a alors le schéma

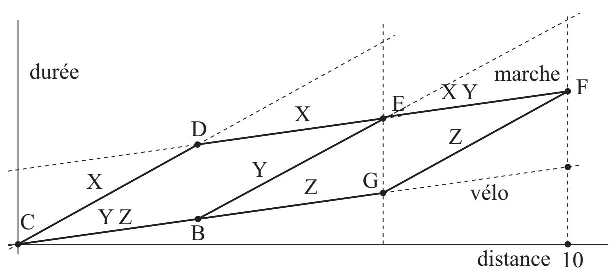


b) **Deux bicyclettes et trois concurrents**

Raymond utilise le vélo 1 sur x_1 km et le vélo 2 sur x_2 km.
Eddie utilise le vélo 1 sur y_1 km et le vélo 2 sur y_2 km.
Jeannie utilise le vélo 1 sur z_1 km et le vélo 2 sur z_2 km.
Par ailleurs, $x_1 + y_1 + z_1 = D$ et $x_2 + y_2 + z_2 = D$.
La durée est la même pour les trois lorsque $x_1 + x_2 = y_1 + y_2 = z_1 + z_2$; en ce cas , $x_1 + x_2 = y_1 + y_2 = z_1 + z_2 = 2\dfrac{D}{3}$ et chacun marche sur un tiers du parcours.

Il n'y a que simplicité sans inconvénient à ce que Jeannie fasse tout son lot de marche de prime abord, suivie de Eddie puis de Raymond. Cela implique x_1 ou x_2 égal à $\dfrac{D}{3}$. . .Si $x_1 = \dfrac{D}{3}$, x_2 aussi, etc.

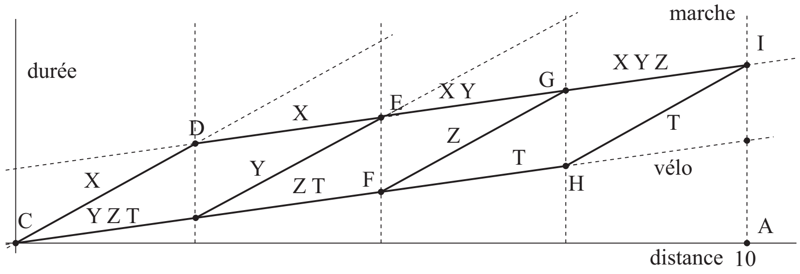
La durée optimale : $\dfrac{D}{3} \times \dfrac{2v+V}{vV}$ h.
On a alors le schéma :



Application : $D = 10, v = 5, V = 20$; durée : 1 heure.

3. Après l'étude du 2), c'est comme s'il suffisait d'un concurrent et demi par vélo. Avec cinq vélos, sept concurrents ne mettront pas plus d'une heure.

Complément : **Pour trois bicyclettes et quatre concurrents**, ce sera



Avec la durée : $\dfrac{D}{4} \times \dfrac{3v+2V}{vV}$ h.

$$\boxed{\text{Pour } m \text{ bicyclettes et } k \text{ concurrents } (k > m) : \dfrac{D}{k} \times \dfrac{mv+(k-m)V}{vV} \text{ h.}}$$

source : apmep

CORRECTION, TOULOUSE 2012

Second exercice Académique (exo 5)

Olympiades mathématiques, S

1. a) Quel que soit le point X de la courbe :
      - ou bien X appartient au demi-cercle : $OX = R$,
      - ou bien X appartient au diamètre [AB] : $OX \leqslant R$.

      Par conséquent $L(O) = R$.

   b) Quel que soit le point X de la courbe, que X appartienne au diamètre [AB] ou qu'il appartienne au demi-cercle : $AX \leqslant 2R$.
      Du fait que $AB = 2R$, $L(A) = 2R$.

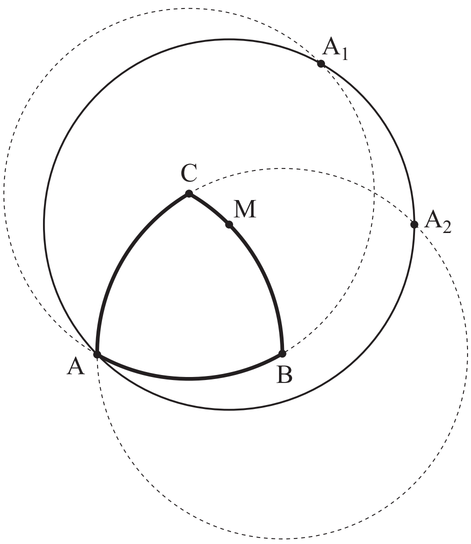
   c) Ce qui précède suffit pour affirmer que la figure n'est pas à largeur constante.

2. Quel que soit le point M de la courbe, le point M' diamétralement opposé sur le cercle vérifie : $MM' = 2R$; quel que soit le point X de la courbe $MX \leqslant MM'$.
   Par conséquent quel que soit le point M de la courbe, $L(M) = 2R$; la courbe est à largeur constante.

3. La définition de la courbe implique : chacun des deux arcs la composant est intérieur au disque déterminé par l'autre.
   Étudions la largeur en A. Quel que soit le point X de la courbe :
   - ou bien il appartient à l'arc contenant A : $AX \leqslant R$,
   - ou bien il appartient à l'arc contenant B : $AX = R$.

   De là $L(A) = R$.
   Par ailleurs $CD = R\sqrt{3}$; de là : $L(C) \neq R$.
   Par conséquent la courbe n'est pas à largeur constante.

4 a) En reprenant les arguments de la question 3, la distance de A, B ou C respectivement à un point M du « triangle » de Reuleaux est inférieure ou égale à R.
   Soit M un point de l'arc BC, distinct de B et de C. Par construction $AM = d$.
   Soit C_{M} le cercle de centre M et de rayon d, C_{C} celui de centre C et de rayon d et C_{B} celui de centre B et de rayon d. C_{M} et C_{C} sont sécants en A et A_1, C_{M} et C_{B} sont sécants en A et A_2.
   (Les cercles C_{M} et C_{C} ne sont pas tangents, car sinon, les rayons AM et AC seraient confondus ; de même pour les deux autres cercles).
   On a vu que la distance MB est inférieure à R, donc B est un point intérieur au cercle C_{M}. Par suite l'arc AB est tout entier inclus dans l'arc intérieur AA_1.
   Par conséquent le « triangle de Reuleaux » est intérieur au cercle CM et donc la distance de M à tout point du « triangle de Reuleaux » autre que A est strictement inférieure à d.
   Par conséquent le point le plus éloigné de M est le point A.



   b) On a montré précédemment que pour tout point M de l'arc BC, distinct de B et de C, $L(\mathrm{M}) = d$. On a aussi $L(\mathrm{B}) = L(\mathrm{C}) = d$ et par un raisonnement du même type sur les arcs AB et AC on montre que pour tout point M du « triangle de Reuleaux », $L(\mathrm{M}) = d$ donc cette figure est à largeur constante.

source : apmep

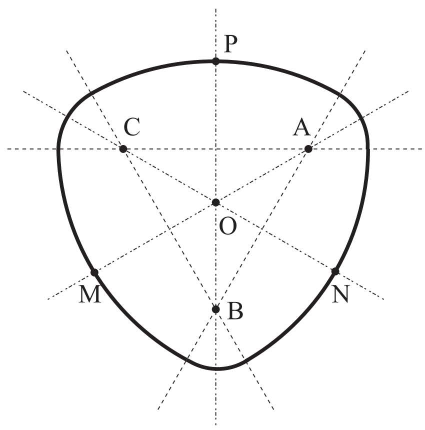
5. a) Réalisation de figure…

   b) Le « triangle de Reuleaux » admet les droites (AA'), (BB'), (CC') comme axes de symétrie. Par la symétrie d'axe (AA'), les arcs AB et AC sont associés, par conséquent aussi les points C' et B' …De là $A'B' = B'C' = C'A'$; le triangle A'B'C' est équilatéral.

6. Soit un triangle équilatéral MNP de côté c.

   - le cercle circonscrit de ce triangle contient les trois points M, N, P ; il est à largeur constante $2c$.
   - le « triangle de Reuleaux » construit sur le triangle équilatéral MNP par la définition du 4) contient les trois points M, N, P ; il est à largeur constante $\dfrac{2}{\sqrt{3}}c$.
   - une analyse de la figure du 5) b) montre que le côté c' du triangle A'B'C' est fonction de celui de ABC, d, par la formule $c' = d\left(\sqrt{3}-1\right)$.
     Avec le triangle MNP de côté c dont on désigne par O le centre, on construit A, B, C sur les médiatrices de MNP – respectivement opposés à A', B', C' par rapport à O – de sorte que $OA = OB = OC = \dfrac{c}{\left(\sqrt{3}-1\right)\sqrt{3}} = \dfrac{c}{3-\sqrt{3}}$. Le « triangle de Reuleaux » déterminé par le triangle ABC contient les points M, N, P, il est à largeur constante $\dfrac{c}{\sqrt{3}-1}$.

   - Avec le triangle MNP de côté c dont on désigne par O le centre, on construit A, B, C sur les médiatrices de MNP respectivement opposés à M, N, P par rapport à O.
     On construit trois arcs de cercle de centres respectifs A, B, C passant par M, N, P et délimités par les droites supports de côtés de ABC (voir figure) ; puis trois arcs de cercle de centres respectifs A, B, C les joignant.
     La courbe déterminée par la réunion de ces six arcs passe par M, N, P est à largeur constante supérieure à c.



   - Avec le triangle MNP de côté c dont on désigne par O le centre, on choisit un point A tel que $OA = \dfrac{c}{3-\sqrt{3}}$; par rotation de A de centre O d'angle 120° on détermine le point B, puis par rotation identique sur B, le point C. Le « triangle de Reuleaux » déterminé par le triangle ABC contient les points M, N, P, il est à largeur constante $\dfrac{c}{\sqrt{3}-1}$.