www.freemaths.fr

OLYMPIADES MATHÉMATIQUES
LYCÉE, PREMIÈRE

ACADÉMIE DE STRASBOURG
2020

SUJET + CORRIGÉ

20e OLYMPIADES DE MATHÉMATIQUES

Mercredi 11 mars 2020[1], 2 énoncés (national et académique) en 4 heures, élèves de première générale et technologique[2] et de début de terminale[3], inscription auprès de votre professeur de mathématiques avant les vacances d'hiver selon académie.

Liberté • Égalité • Fraternité
RÉPUBLIQUE FRANÇAISE
MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE

Sujet et Corrigé vous sont présentés par freemaths.fr . . .

Olympiades de mathématiques 2020

Deuxième partie de 10 heures 10 à 12 heures 10

Partie académique

Les candidats ayant suivi la spécialité mathématiques résoudront deux exercices, les numéros 1 et 4.

Les candidats n'ayant pas suivi la spécialité mathématiques résoudront trois exercices, les numéros 1, 2 et 3.

Exercice 1 (pour tous les candidats)

Des sommes qui décrivent tous les entiers

On examine ici les ensembles A et B vérifiant les trois conditions suivantes :
- leurs éléments sont des entiers naturels,
- tout entier naturel compris entre 0 et 2020 peut s'écrire comme somme d'un élément de A et d'un élément de B,
- les ensembles A et B ont le même nombre d'éléments.

1. Démontrer que si A et B sont deux ensembles vérifiant les trois conditions imposées, alors il existe un entier a qui est à la fois dans A et dans B.

2. On forme deux ensembles A et B de la manière suivante : l'ensemble A est formé de tous les entiers pairs entre 0 et 2020 et de l'entier a et l'ensemble B est formé de tous les entiers impairs entre 0 et 2020 et de l'entier a. Est-ce qu'ils vérifient les trois conditions imposées ?

3. Proposer deux ensembles A et B vérifiant les trois conditions imposées et ayant chacun 1010 éléments. On pourra s'aider des deux ensembles A et B de la question précédente en les modifiant.

4. On note n le nombre minimal d'éléments que doivent avoir les ensembles A et B pour vérifier les trois conditions imposées. Démontrer que $n \geq 45$.

5. Proposer deux ensembles A et B vérifiant les conditions imposées et ayant chacun effectivement 45 éléments.

Exercice 2
(pour les candidats n'ayant pas suivi la spécialité mathématiques)

Des jetons et des moyennes

On dispose de 101 jetons numérotés de 1 à 101. On les sépare en deux paquets P1 et P2.

On calcule la moyenne des numéros des jetons du paquet P1, ainsi que celle des jetons du paquet P2.

Le jeton portant le numéro 40 est dans le paquet P1. On le prend et on le place dans le paquet P2. On constate qu'alors la moyenne des numéros des jetons du paquet P1 augmente de 0,25 et que celle des numéros du paquet P2 aussi.

1. On note T la somme de tous les entiers de 1 à 101.
   En écrivant
   T=1+2+…+100+101
   T=101+100+…+2+1,
   donner la valeur de T.

2. On note N le nombre de jetons initialement présents dans le paquet A et S la somme de leurs numéros.
   a. Etablir l'équation $\frac{S-40}{N-1} - \frac{S}{N} = 0{,}25$.

   b. Etablir l'équation $\frac{5191-}{102-N} - \frac{5151}{101-N} = 0{,}25$.

3. En déduire une équation très simple vérifiée par N, puis la valeur de N et celle de S.

4. Proposer une répartition possible des 101 jetons entre les paquets P1 et P1 qui corresponde à cette situation.

Exercice 3
(pour les candidats n'ayant pas suivi la spécialité mathématiques)

Une ligne de tramway et des contraintes

Dans une ville imaginaire, on désire mettre en place une nouvelle ligne de tramway comportant au moins 6 stations, en comptant celle du départ et de l'arrivée, avec les contraintes suivantes : la longueur de 3 sections consécutives est toujours inférieure ou égale à 16 km et la longueur de 5 sections consécutives est toujours supérieure ou égale à 27 km. Une section est l'intervalle entre deux stations.

1. Démontrer qu'une telle ligne de tramway ne peut pas comporter 8 stations ou plus. On pourra schématiser la ligne de tramway par une ligne droite où les stations sont, en partant de celle de départ : A, B, C, D, etc.

2. Proposer un exemple de telle ligne de tramway avec 7 stations.

3. Une ligne avec 6 stations est-elle possible ?

Exercice 4
(pour les candidats ayant suivi la spécialité mathématiques)
Les nombres de Markov

On s'intéresse aux entiers naturels **non nuls** solutions de l'équation notée (E) suivante :

$$x^2 + y^2 + z^2 = 3xyz$$

On note S l'ensemble des solutions de (E). Une **solution normalisée** (x, y, z) de (E) est un triplet ordonné c'est à dire tels que $x \leq y \leq z$ vérifiant l'équation précédente (E).

Partie A : recherche de quelques solutions

On ne s'intéresse dans cette partie qu'aux <u>solutions normalisées</u>.

1. Trouver la ou les solutions de (E) telles que x, y et z sont égaux.

2. Considérons une solution de (E), de la forme $(x, x, x+1)$.
   Montrer que x est alors solution de $3x^3 - 2x - 1 = 0$.
   En déduire l'unique solution $(x, x, x+1)$ de (E).

3. Dans cette question nous allons chercher toutes les solutions pour lesquelles **deux des trois nombres** sont égaux.

   a. Premier cas (x, z, z) avec $x < z$:

      i. Montrer que (E) est équivalent à $(3x-2)z^2 = x^2$.

      ii. En déduire que (E) n'admet pas de solution de la forme (x, z, z) avec $x < z$.

   b. Deuxième cas (x, x, z) avec $x < z$:

      i. Montrer que (E) est équivalent à $3z = 2 + \left(\frac{z}{x}\right)^2$.

      ii. En déduire que z est un multiple de x.

      Posons $z = kx$ avec $k \in N$.

      iii. En déduire que $k(3x - k) = 2$ et déterminer la ou les solution(s) normalisée(s) (x, x, z) de (E).

   c. Conclure.

Partie B : construction d'un arbre

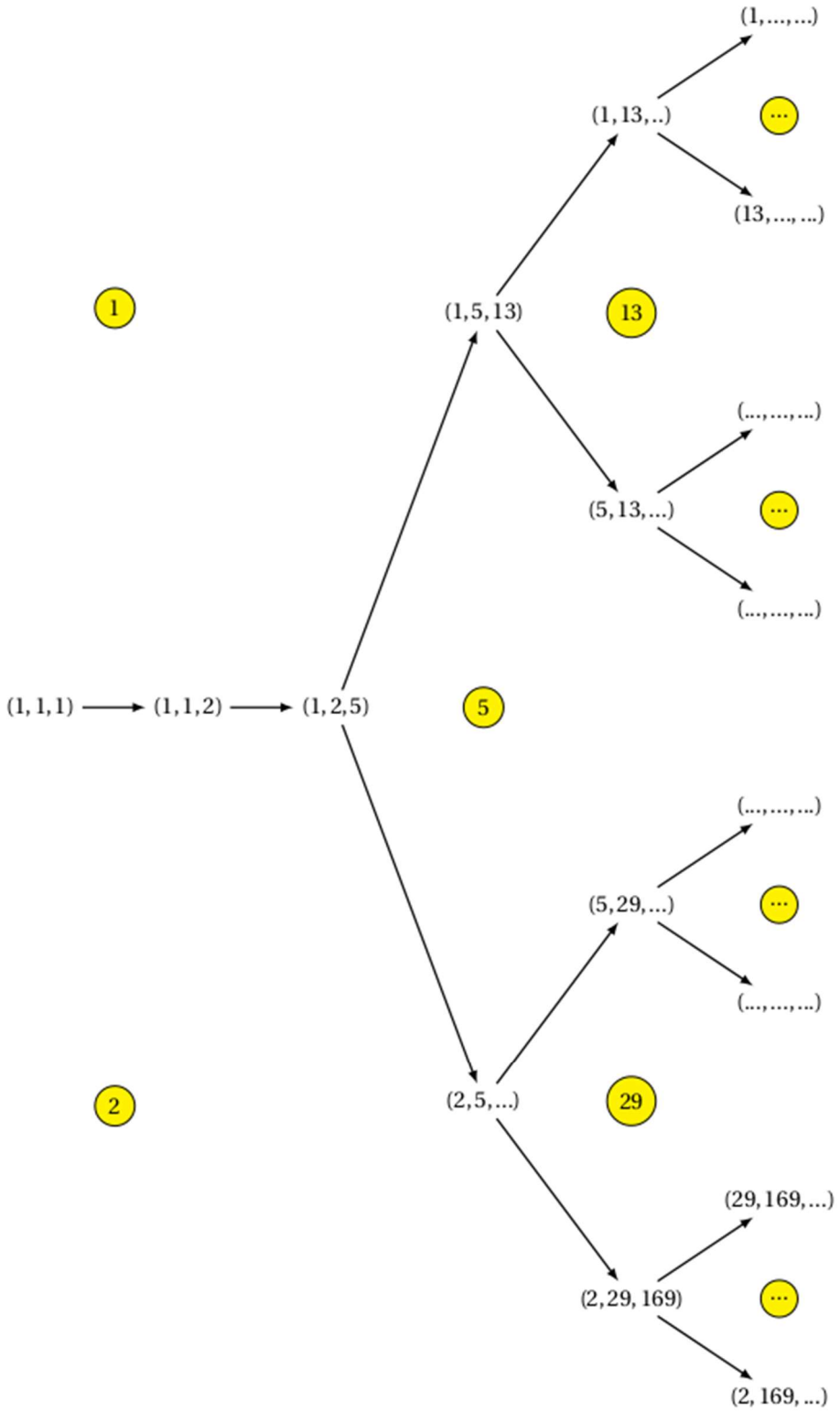
1. Considérons (x, y, z) une solution de (E) pas nécessairement normalisée. Montrer que les trois entiers x, y et $3xy - z$ forment une solution de (E).
   On définit alors l'application T suivante :

$$\begin{array}{rccc} T: & S & \rightarrow & S \\ & (x, y, z) & \mapsto & (x, y, 3xy - z) \end{array}$$

2. Montrer que pour tout (x, y, z) de S, on a $T\big(T(x, y, z)\big) = (x, y, z)$.

3. On considère une solution (x, y, z) de (E).
À partir des nombres x, y, z et en appliquant une seule fois T, combien de solutions normalisées de (E) peut-on construire ?

4. Compléter l'arbre suivant, en sachant que les branches sont construites à partir de T et que deux branches ayant même racine ont la deuxième coordonnée commune.



Partie C : suite de Fibonacci

On considère la fonction définie sur N par $f(0) = f(1) = 1$ et $f(n+2) = f(n+1) + f(n)$.

1. Calculer $f(n)$ pour tout $n \in \{0,1,\ldots,8\}$.

2. On ne s'intéresse qu'à la branche qui monte, c'est à dire les termes obtenus à partir de $(1,1,1)$ à l'aide de T dont le plus petit nombre est toujours 1.
   On pose $t_0 = (1,1,1)$, $t_1 = (1,1,2)$, $t_2 = (1,2,5)$, $t_3 = (1,5,13)$, d'une façon plus générale on admettra que si on pose $t_n = (1, x, y)$ avec $x \leq y$ alors $t_{n+1} = (1, y, 3y - x)$.

3. Montrer que si $t_n = \big(1, f(2n), f(2n+2)\big)$ alors $t_{n+1} = \big(1, f(2n+2), f(2n+4)\big)$.

4. En déduire qu'il existe une infinité de solutions à l'équation (E).

OLYMPIADES MATHÉMATIQUES
LYCÉE, PREMIÈRE

CORRECTION !

Épreuve ▪ 2020

CORRECTION OLYMPIADES

EXERCICES ACADÉMIQUES

STRASBOURG 2020

Exercice 1 : Des sommes qui décrivent tous les entiers

1. L'entier 0 doit être somme d'un élément de A et d'un élément de B et ces éléments, puisque ce sont des entiers naturels, sont nécessairement égaux à 0. « L'entier a » dont il est question dans l'énoncé est l'entier zéro. Il existe bien un entier, l'entier $a = 0$, qui figure dans les deux ensembles.

2. L'ensemble A est l'ensemble $\{0, 2, 4, 6, ..., 2018, 2020\}$. Il contient les 1011 entiers naturels pairs inférieurs ou égaux à 2020. L'ensemble B est l'ensemble $\{0, 1, 3, 5, ..., 2017, 2019\}$. Il contient les 1010 entiers impairs inférieurs ou égaux à 2020, ainsi que l'entier $a = 0$ que nous avons identifié dans la première question, en tout 1011 entiers lui aussi.

Tout entier de $\{0, 1, ..., 2019, 2020\}$, qu'il soit pair ou impair, est somme de lui-même et de zéro. Il s'écrit comme somme d'un élément de A et d'un élément de B, quelle que soit sa parité.

Toutes les conditions requises sont vérifiées pour ces deux ensembles.

3. Il s'agit d'éliminer un élément dans chaque ensemble. Voici par exemple un procédé :
Eliminons 2020 de A et 2019 de B. Transférons de plus 2 de A dans B et 3 de B dans A. Nous obtenons deux ensembles de 1010 éléments : d'une part $A = \{0, 3, 4, 6, ..., 2016, 2018\}$ et d'autre part $B = \{0, 1, 2, 5, ..., 2015, 2017\}$. Tous les entiers de $\{0, 1, ..., 2019, 2020\}$ s'écrivent comme somme d'un élément de A et d'un élément de B (eux-mêmes plus zéro), sauf peut-être les deux entiers éliminés. Mais $2019 = 2015 + 4$ et $2020 = 2017 + 3$ s'écrivent eux aussi comme sommes d'un élément de A et d'un élément de B.

Toutes les conditions requises sont vérifiées pour ces deux ensembles.

4. Avec deux ensembles contenant chacun au plus 44 éléments, nous pouvons constituer au plus $44 \times 44 = 1936$ combinaisons différentes d'un élément de A et d'un élément de B. Nous pouvons donc obtenir au plus 1936 sommes différentes. Ce n'est pas suffisant pour décrire les 2021 entiers de $\{0, 1, ..., 2019, 2020\}$.
Il faut au moins 45 éléments dans chaque ensemble pour décrire ces 2021 entiers.

5. Remarquons que la division euclidienne de 2020 par 45 s'écrit ainsi : $2020 = 44 \times 45 + 40$. Le quotient de cette division euclidienne est 44.

Pour tout entier x appartenant à $\{0, 1, ..., 2019, 2020\}$, il existe deux entiers q et r tels que : $x = 45q + r$ avec $0 \leq r < 45$ car r est le reste de la division euclidienne de x par 45 et avec aussi $0 \leq q \leq 44$ car le quotient de la division de x par 45 est inférieur ou égal au quotient, 44 précisément, de la division de 2020 par 45.

Nous considérerons d'une part l'ensemble : $A = \{0, 45, 90, 135, ..., 1980 = 44 \times 45\}$ des 45 premiers multiples de 45 et d'autre part l'ensemble $B = \{0, 1, 2, ..., 44\}$ des 45 restes r possibles dans une division euclidienne par 45. L'écriture d'une telle division euclidienne $x = 45q + r$ montre que tout entier de $\{0, 1, ..., 2019, 2020\}$ est somme d'un élément de A (le nombre $45q$) et d'un élément de B (le reste r). En prime, nous pourrions aussi décomposer en sommes d'un élément de A et d'un élément de B les entiers 2021, 2022, 2023 et 2024.

Exercice 4 : Les nombres de Markov

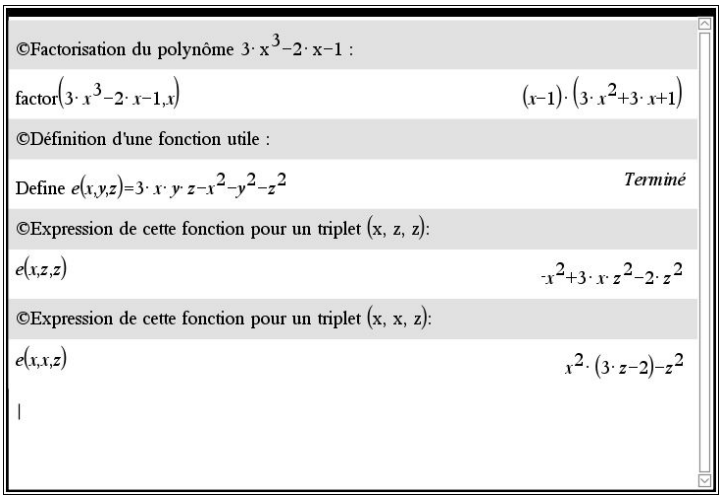
Partie A

1. Un triplet $(x,\ x,\ x)$ où x est un entier naturel non nul est solution de l'équation (E) si et seulement si x est un entier strictement positif solution de l'équation : $3x^2 = 3x^3$ c'est-à-dire aussi bien de l'équation : $3x^2(x-1) = 0$. Cette équation a une seule solution strictement positive.
L'unique triplet de cette forme solution de l'équation (E) est le triplet $(1,\ 1,\ 1)$.

2. Un triplet $(x,\ x,\ x+1)$ est solution de l'équation (E) si et seulement si x est un entier strictement positif solution de l'équation : $2x^2 + (x+1)^2 = 3x^2(x+1)$ c'est-à-dire aussi bien, en développant puis réduisant, de l'équation suggérée par l'énoncé : $3x^3 - 2x - 1 = 0$.

Le polynôme défini par $P(x) = 3x^3 - 2x - 1$ admet une racine évidente, qui est le nombre 1. Le triplet $(1,\ 1,\ 2)$ est donc solution évidente de l'équation (E). Nous sommes amenés à rechercher s'il existe d'autres entiers strictement positifs n qui sont racines de P. Si c'était le cas, le polynôme P serait factorisable par $(x-n)$ sous la forme suivante : $3x^3 - 2x - 1 = (x-n)(ax^2 + bx + c)$. En particulier, en comparant les coefficients constants des deux membres, nous obtiendrions : $-1 = -cn$ ce qui ferait de n un diviseur de 1. Or, l'entier 1 est le seul entier strictement positif possédant cette propriété. Le triplet $(1,\ 1,\ 2)$ est le seul triplet solution.

NB. Nous aurions aussi pu factoriser P par $(x-1)$ en déléguant cette factorisation à une calculatrice ou un logiciel de calcul formel, comme indiqué ci-contre. Le polynôme complétant cette factorisation est le polynôme $Q(x) = 3x^2 + 3x + 1$, polynôme qui prend toujours des valeurs strictement positivespour tout entier naturel. Il n'y pas d'autre entier naturel vérifiant l'équation $3x^3 - 2x - 1 = 0$ que le nombre 1.



3. Un triplet $(x,\ y,\ z)$ est solution de l'équation (E) si et seulement si la fonction de trois variables e définie par $e(x,\ y,\ z)=3xyz-x^2-y^2-z^2$ vérifie la relation : $e(x,\ y,\ z)=3xyz-x^2-y^2-z^2=0$.

Nous avons défini cette fonction e sur la calculatrice (voir sur la copie d'écran de la page précédente) pour déléguer quelques calculs.

3.a. Premier cas : triplets $(x,\ z,\ z)$ avec $x<z$.

3.a.i. La calculatrice nous indique que : $e(x,\ z,\ z)=-x^2+3xz^2-2z^2$.

Une factorisation partielle apparaît : $e(x,\ z,\ z)=-x^2+(3x-2)z^2$. Le triplet $(x,\ z,\ z)$ est solution de (E) si et seulement $e(x,\ z,\ z)=0$ c'est-à-dire si et seulement si : $x^2=(3x-2)z^2$.

3.a.ii. Si x et z sont deux entiers naturels non nuls vérifiant $x^2=(3x-2)z^2$, alors le nombre entier z^2 est un diviseur du nombre x^2. En tant que diviseur de x^2, le nombre z^2 devrait être nécessairement inférieur ou égal à x^2. Il n'existe donc pas de triplet $(x,\ z,\ z)$ avec $x<z$ qui soit susceptible de convenir.

3.b. Deuxième cas : triplets $(x,\ x,\ z)$ avec $x<z$.

3.b.i. La calculatrice nous indique que : $e(x,\ x,\ z)=x^2(3z-2)-z^2$. Le triplet $(x,\ z,\ z)$ est solution de (E) si et seulement si $e(x,\ x,\ z)=0$ c'est-à-dire si et seulement si : $x^2(3z-2)=z^2$. (Par rapport au premier cas, les rôles de x et de z ont été intervertis).

Le nombre entier x étant non nul, cette équation est équivalente à : $3z-2=\dfrac{z^2}{x^2}=\left(\dfrac{z}{x}\right)^2$.

3.b.ii. Si x et z sont deux entiers naturels non nuls vérifiant $3z-2=\left(\dfrac{z}{x}\right)^2$ alors, vu que $3z-2$ est un nombre entier, $\dfrac{z}{x}$ a pour carré un nombre entier. Nous sommes amenés à utiliser le résultat suivant pour pouvoir affirmer que x divise z : « Soit r un nombre *rationnel* dont le carré est un nombre entier N. Alors, r est lui-même un nombre entier ». On peut dans le présent contexte utiliser ce résultat sans avoir à le justifier.

Une justification de ce résultat est la suivante :

Soit $\dfrac{p}{q}$ la fraction irréductible (p et q premiers entre eux, $q\geq 1$) représentant le rationnel r. Si $r^2=N$, alors : $p^2=N.q^2$. L'entier q est un diviseur de p^2. Etant donné que p et q sont premiers entre eux, le seul diviseur possible est le diviseur 1. Nécessairement, $q=1$. Ainsi : $r=p$ et r est un entier.

3.b.iii. En posant $z = k\,x$, avec k entier strictement positif, et même $k \geq 2$ puisque nous supposons dans cette question que $x < z$, la relation $3z - 2 = \left(\frac{z}{x}\right)^2$ devient : $3\,k\,x - 2 = k^2$, ou aussi bien : $k\left(3x - k\right) = 2$.

Les deux entiers k et $3x - k$ sont deux diviseurs complémentaires de 2.

Compte tenu de la condition $k \geq 2$, nous obtenons une seule possibilité : $\begin{cases} k = 2 \\ 3x - 2 = 1 \end{cases}$ ce qui nous conduit au seul triplet solution $(1,\ 1,\ 2)$, triplet que nous avions déjà obtenu dans la question **2**.

3.c. Par disjonction des cas, nous venons de démontrer qu'il n'existe qu'un seul triplet $(x,\ y,\ z)$solution dans lequel deux des entiers *x, y, z* sont égaux, c'est le triplet $(1,\ 1,\ 2)$. Il n'existe aussi qu'un seul triplet dans lequel les trois entiers sont égaux. Désormais, dans toute la suite de la résolution, nous allons chercher les triplets solutions où *x, y, z* sont trois entiers distincts.

Partie B : Construction d'un arbre

1. Justifions d'abord que, si $(x,\ y,\ z)$ est un triplet solution de (E), le triplet $(x,\ y,\ 3xy-z)$ est constitué de trois entiers strictement positifs, ce qui est une condition sine qua non. Il nous faut concrètement justifier que l'entier $3xy-z$ est strictement positif.

Or, si $(x,\ y,\ z)$ est un triplet solution de (E), les entiers x, y, z vérifient : $3xyz = x^2 + y^2 + z^2 > z^2$.

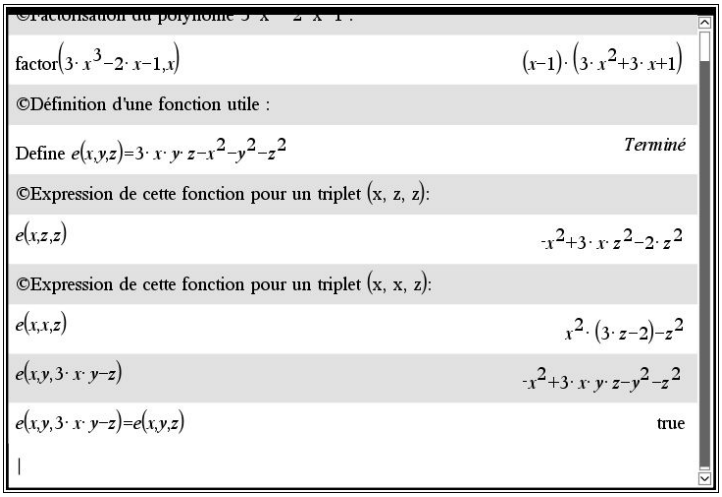
Nous obtenons l'inégalité $3xyz - z^2 > 0$ puis l'inégalité $z(3xy-z) > 0$ et enfin, puisque z est strictement positif, l'inégalité $3xy - z > 0$. Le triplet $(x,\ y,\ 3xy-z)$ est bien constitué de trois entiers strictement positifs.

Ceci vérifié, et en réutilisant les mêmes notations que dans la partie A :

Une calculatrice atteste que, quels que soient les entiers strictement positifs x, y, z :

$e(x,\ y,\ 3xy-z) = e(x,\ y,\ z)$.

Un triplet $(x,\ y,\ z)$ est solution de (E) si et seulement si $e(x,\ y,\ z) = 0$, donc et seulement si $e(x,\ y,\ 3xy-z) = 0$ donc et seulement si $(x,\ y,\ 3xy-z)$ est solution de (E).


factor$(3\cdot x^3-2\cdot x-1,x)$ $(x-1)\cdot(3\cdot x^2+3\cdot x+1)$

©Définition d'une fonction utile :

Define $e(x,y,z)=3\cdot x\cdot y\cdot z-x^2-y^2-z^2$ *Terminé*

©Expression de cette fonction pour un triplet (x, z, z):

$e(x,z,z)$ $-x^2+3\cdot x\cdot z^2-2\cdot z^2$

©Expression de cette fonction pour un triplet (x, x, z):

$e(x,x,z)$ $x^2\cdot(3\cdot z-2)-z^2$

$e(x,y,3\cdot x\cdot y-z)$ $-x^2+3\cdot x\cdot y\cdot z-y^2-z^2$

$e(x,y,3\cdot x\cdot y-z)=e(x,y,z)$ true

2. Notons $(x',\ y',\ z') = (x,\ y,\ 3xy-z) = T(x,\ y,\ z)$. L'image par T de ce triplet est le triplet : $T(x',\ y',\ z') = (x',\ y',\ 3x'y'-z') = (x,\ y,\ 3xy-(3xy-z)) = (x,\ y,\ z)$

Par conséquent : $T(T(x,\ y,\ z)) = (x,\ y,\ z)$ quel que soit le triplet d'entiers $(x,\ y,\ z)$. L'application T est sa propre application réciproque (une application qui a cette propriété est dite « involutive »).

3. Cette question est assez ambiguë. Nous aurions tendance à dire que, à partir de trois nombres x, y, z et en les permutant circulairement, nous obtiendrons les images par T des triplets $(x,\ y,\ z)$; $(y,\ z,\ x)$; $(z,\ x,\ y)$. Nous pouvons espérer obtenir trois triplets solutions, qu'il convient ensuite de normaliser. Ce sont les triplets $T(x,\ y,\ z) = (x,\ y,\ 3xy-z)$; $T(y,\ z,\ x) = (y,\ z,\ 3yz-x)$ et $T(z,\ x,\ y) = (z,\ x,\ 3zx-y)$

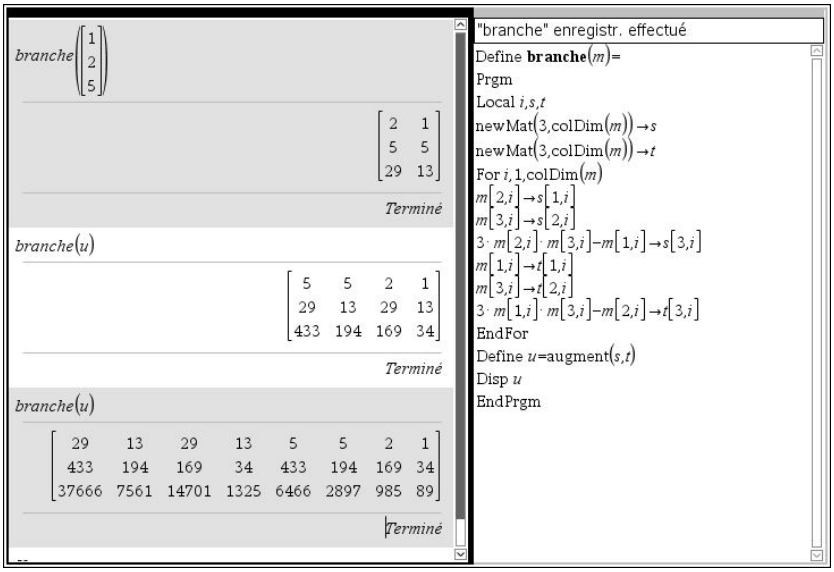
4. Si on applique deux fois l'application T, l'image par $T \circ T$ du triplet $(x,\ y,\ z)$ est $(x,\ y,\ z)$ lui-même, ce qui est peu lucratif, mais en revanche celles de $(y,\ z,\ x)$ et de $(z,\ x,\ y)$ seront certainement deux nouveaux triplets, puisque les deux premières composantes ont changé. C'est ce que nous allons faire : calculer les images par T de ces deux triplets où l'on a permuté circulairement les composantes puis itérer ce processus.

Nous pouvons automatiser le calcul, ce que réalise l'algorithme **applic_the**. Les images du triplet $(1, 1, 1)$ ne nous apprennent rien, mais si on itère le procédé, nous parvenons à la deuxième itération à un résultat plus intéressant : le triplet solution $(1, 2, 5)$ puis une troisième itération amène deux nouveaux triplets solutions dans notre escarcelle.	Define $t(x,y,z)=3\cdot x\cdot y-z$ *Terminé* $applic_the(\{1,1,1\})$ $\{1,1,2\}$ $\{1,1,2\}$ *Terminé* $applic_the(\{1,1,2\})$ $\{1,2,5\}$ $\{1,2,5\}$ *Terminé* $applic_the(\{1,2,5\})$ $\{2,5,29\}$ $\{1,5,13\}$ "applic_the" enregistr. effectué Define **applic_the**(l)= Prgm ©Le triplet est saisi sous forme de liste l ©On applique T à ses éléments permutés $\{l[2],l[3],t(l[2],l[3],l[1])\}\rightarrow a$ $\{l[3],l[1],t(l[3],l[1],l[2])\}\rightarrow b$ ©Les listes obtenues sont rangées par tri croissant SortA a SortA b ©Puis sont affichées Disp a Disp b EndPrgm
Quatre de plus … Nous voici outillés pour compléter l'arbre. *NB. L'environnement TI-nSpire exploité ici a l'avantage de pouvoir présenter simultanément l'algorithme et ses applications.*	$applic_the(\{2,5,29\})$ $\{5,29,433\}$ $\{2,29,169\}$ *Terminé* $applic_the(\{1,5,13\})$ $\{5,13,194\}$ $\{1,13,34\}$ *Terminé* $applic_the(\{5,29,433\})$ $\{29,433,37666\}$ $\{5,433,6466\}$ *Terminé* $applic_the(\{2,29,169\})$ $\{29,169,14701\}$ $\{2,169,985\}$ "applic_the" enregistr. effectué Define **applic_the**(l)= Prgm ©Le triplet est saisi sous forme de liste l ©On applique T à ses éléments permutés $\{l[2],l[3],t(l[2],l[3],l[1])\}\rightarrow a$ $\{l[3],l[1],t(l[3],l[1],l[2])\}\rightarrow b$ ©Les listes obtenues sont rangées par tri croissant SortA a SortA b ©Puis sont affichées Disp a Disp b EndPrgm
Fin des calculs. Il ne reste plus qu'à pendre ces résultats à leur place sur les branches de l'arbre. *Nous pouvons conjecturer qu'en continuant ce procédé, nous allons obtenir une infinité de solutions. La partie C va nous le démontrer.*	$applic_the(\{5,29,433\})$ $\{29,433,37666\}$ $\{5,433,6466\}$ *Terminé* $applic_the(\{2,29,169\})$ $\{29,169,14701\}$ $\{2,169,985\}$ *Terminé* $applic_the(\{5,13,194\})$ $\{13,194,7561\}$ $\{5,194,2897\}$ *Terminé* $applic_the(\{1,13,34\})$ $\{13,34,1325\}$ $\{1,34,89\}$ *Terminé* "applic_the" enregistr. effectué Define **applic_the**(l)= Prgm ©Le triplet est saisi sous forme de liste l ©On applique T à ses éléments permutés $\{l[2],l[3],t(l[2],l[3],l[1])\}\rightarrow a$ $\{l[3],l[1],t(l[3],l[1],l[2])\}\rightarrow b$ ©Les listes obtenues sont rangées par tri croissant SortA a SortA b ©Puis sont affichées Disp a Disp b EndPrgm

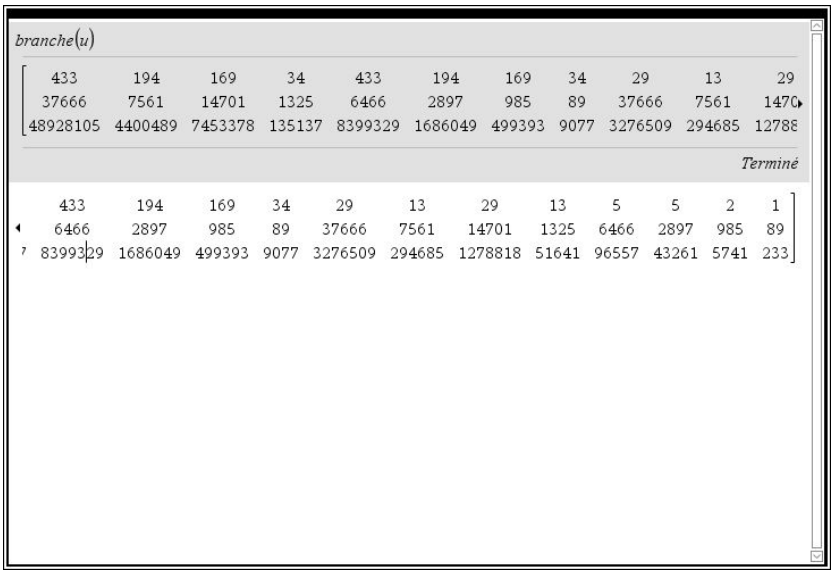
L'ergonomie de TI-nSpire, notamment dans la manipulation de matrices, c'est-à-dire de tableaux de nombres organisés en lignes et colonnes, est suffisamment opérationnelle pour nous permettre un luxe complémentaire :

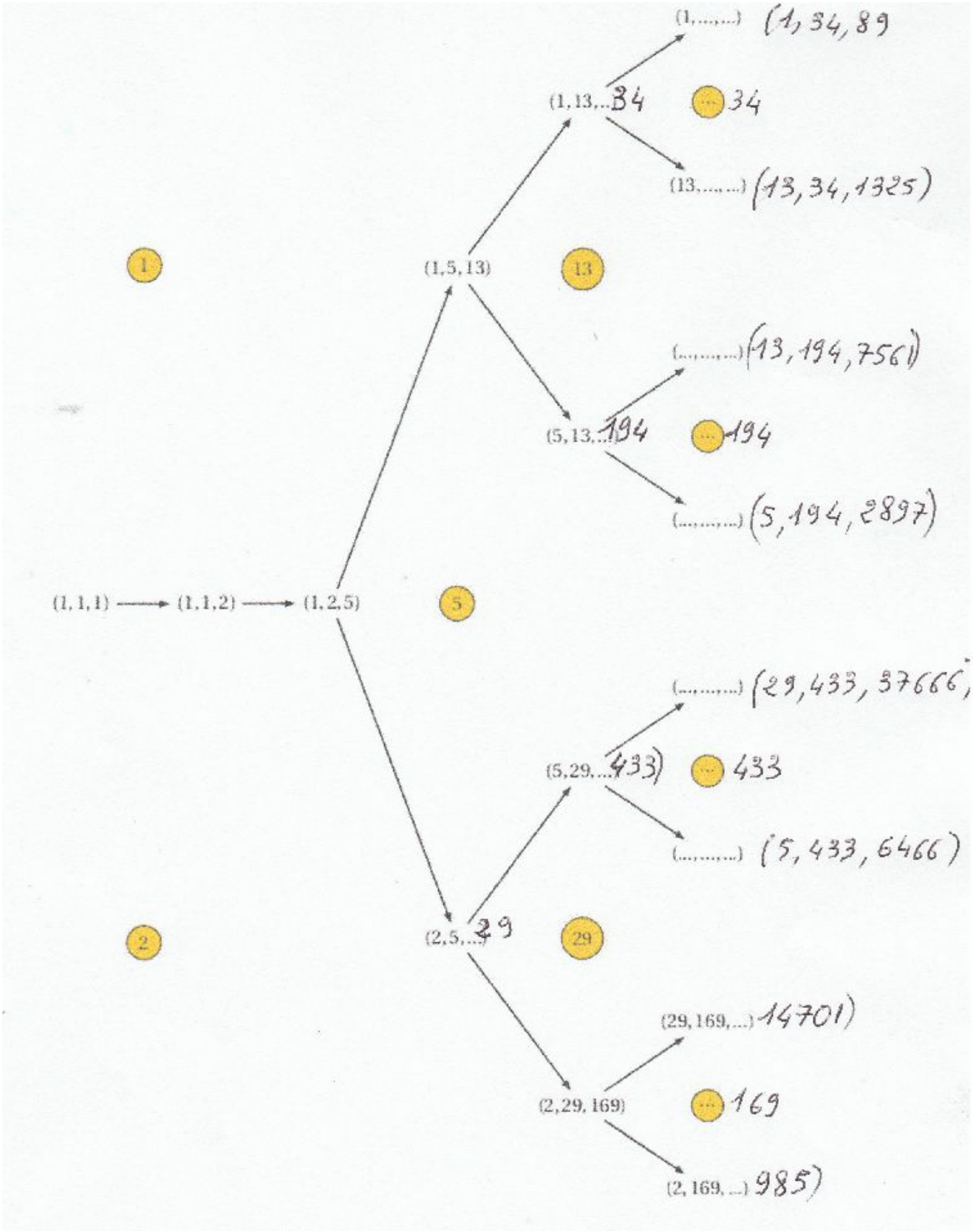
L'algorithme **branche** calculera sous une forme matricielle les triplets solutions obtenus au cours des premières duplications. Nous partirons de la matrice à une seule colonne $m = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix}$, puis nous doublerons à chaque exécution de l'algorithme le nombre de colonnes de la matrice sur laquelle on opère (matrice stockée dans la variable **u** dans le programme) . Chaque colonne $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ de la nouvelle matrice représentera un nouveau triplet solution.

La notation $m[i,\ j]$ désigne l'élément de la matrice m placé sur sa ligne numéro i et dans sa colonne numéro j.
Les lignes sont numérotées de 1 à 3 et les colonnes de 1 à colDim(m), cette notation désignant le nombre de colonnes de m.
Nous obtenons ici 2, puis 4 , puis 8 triplets solutions, donc tous les résultats utiles pour compléter l'arbre de l'énoncé.



Voici en prime les 16 triplets figurant au bout des branches qui prolongent celles de l'arbre à compléter (non demandés dans l'énoncé).





Voici l'arbre dûment complété

Partie C :

1. Calcul des premiers termes de la suite de Fibonacci à partir de $f(0)=f(1)=1$

	A num	B fibon	C	D	E	F
=	=seq(n,n,0,8)					
1	0	1				
2	1	1				
3	2	2				
4	3	3				
5	4	5				
6	5	8				
7	6	13				
8	7	21				
9	8	34				
10						

B9 =b7+b8

2. Aucune question n'étant explicitement posée, essayons de comprendre quel pourrait être le mécanisme appliqué ici (?) :

On considère un triplet de la forme $(1,\ x,\ y)$ avec $x \le y$. On commence par permuter circulairement ses éléments : $(1,\ x,\ y) \xrightarrow{P} (y,\ 1,\ x)$ puis on fait opérer l'application T étudiée dans la question **B.2** :

$(y,\ 1,\ x) \xrightarrow{T} (y,\ 1,\ 3y-x)$. Enfin, on normalise. Si on suppose que $x \le y$, $(3y-x) \ge 2y > y$.

Le nouveau triplet normalisé solution obtenu est $(1,\ y,\ 3y-x)$, ce qui correspond à la formule « admise ».

3. Préparons-nous à démontrer par récurrence la propriété : $t_n = (1,\ f(2n),\ f(2n+2))$.

La question strictement posée ici consiste à établir *l'hérédité* de cette propriété.

Supposons que pour un certain rang n : $t_n = (1,\ f(2n),\ f(2n+2))$.

Alors, au rang suivant : $t_{n+1} = (1,\ f(2n+2),\ 3f(2n+2)-f(2n))$.

Compte tenu des relations de récurrence en vigueur :

$f(2n+4) = f(2n+3) + f(2n+2)$

$f(2n+4) = (f(2n+2) + f(2n+1)) + f(2n+2) = 2f(2n+2) + f(2n+1)$

Mais d'autre part : $f(2n+1) = f(2n+2) - f(2n)$

Donc $f(2n+4) = 2f(2n+2) + (f(2n+2) - f(2n)) = 3f(2n+2) - f(2n)$.

Il y a égalité entre $f(2n+4)$ et $3f(2n+2)-f(2n)$. Nous pouvons écrire $t_{n+1} = (1,\ f(2n+2),\ f(2n+4))$, ce qui montre que si la relation $t_n = (1,\ f(2n),\ f(2n+2))$ est vérifiée, alors la relation $t_{n+1} = (1,\ f(2n+2),\ f(2n+4))$ l'est aussi. L'hérédité est assurée.

4. Il reste à achever la démonstration par récurrence amorcée dans la question 3, où l'on a vu que l'hypothèse d'hérédité est assurée.

Initialisation : On note dans l'énoncé que : $t_1 = (1,\ 1,\ 2) = (1,\ f(0),\ f(2))$; $t_2 = (1,\ 2,\ 5) = (1,\ f(2),\ f(4))$; $t_3 = (1,\ 5,\ 13) = (1,\ f(4),\ f(6))$. La relation $t_n = (1,\ f(2n),\ f(2n+2))$ est vérifiée pour $n = 0$; 1 ; 2 (elle est initialisée au rang zéro, et les rangs 1 et 2 sont accessoires).

La démonstration par récurrence est achevée.

Pour tout entier naturel n : $t_n = (1,\ f(2n),\ f(2n+2))$.

Tout triplet de la forme $t_n = (1,\ f(2n),\ f(2n+2))$ étant solution, et la suite de Fibonacci étant définie et strictement croissante sur **N**, nous sommes en mesure de construire avec le procédé décrit dans la partie B, et seulement avec la « branche qui monte », sans même présumer des autres branches, une infinité de triplets normalisés (distincts) solutions de l'équation (E). Remarquons qu'un triplet solution ainsi construit contient deux termes *de rang pair* consécutifs de la suite de Fibonacci.

NB. Cette suite de Fibonacci commence ainsi, les termes de rang pair sont en gras, nous les retrouvons dans la « branche du haut » de l'arbre : **1**, 1, **2**, 3, **5**, 8, **13**, 21, **34**, 55, **89**, …

Un point de vue python

L'utilisation des matrices avec le logiciel Python est beaucoup plus laborieuse qu'avec TI-*n*Spire.

Voici cependant une proposition, permettant de dupliquer un triplet solution comme nous l'avons fait dans la **partie B** de l'exercice. Il est certainement possible, en important par exemple le module « numpy », d'écrire un algorithme plus performant ...

Le triplet solution *m* à dupliquer est saisi composante par composante (qui sont numérotées de 0 à 2, alors que TI-*n*Spire numérote de 1 à 3). L'algorithme construit deux triplets solutions enfants, le triplet *s* dont les deux premières composantes sont les composantes numéros 0 et 2 du triplet générateur et le le triplet *t* dont les deux premières composantes sont les composantes numéros 1 et 2 du triplet générateur.

File Edit Format Run Options Window Help

```
m=[0 for i in range(3)]
u=input('entrez la première composante : ')
m[0]=int(u)
v=input('entrez la deuxième composante : ')
m[1]=int(v)
w=input('entrez la troisième composante : ')
m[2]=int(w)
s=[0 for i in range(3)]
t=[0 for i in range(3)]
s[0]=m[0]
s[1]=m[2]
s[2]=3*m[0]*m[2]-m[1]
t[0]=m[1]
t[1]=m[2]
t[2]=3*m[1]*m[2]-m[0]
print(s)
print(t)
```

```
================ RESTART: C:/Users/G:
entrez la première composante : 1
entrez la deuxième composante : 2
entrez la troisième composante : 5
[1, 5, 13]
[2, 5, 29]
>>>
>>>
================ RESTART: C:/Users/G:
entrez la première composante : 1
entrez la deuxième composante : 5
entrez la troisième composante : 13
[1, 13, 34]
[5, 13, 194]
>>>
>>>
================ RESTART: C:/Users/G:
entrez la première composante : 2
entrez la deuxième composante : 5
entrez la troisième composante : 29
[2, 29, 169]
[5, 29, 433]
>>>
```