OLYMPIADES MATHÉMATIQUES
LYCÉE, PREMIÈRE

ACADÉMIE DE ROUEN
2020

SUJET + CORRIGÉ

20e OLYMPIADES DE MATHÉMATIQUES

Mercredi 11 mars 2020[1], 2 énoncés (national et académique) en 4 heures, élèves de première générale et technologique[2] et de début de terminale[3], inscription auprès de votre professeur de mathématiques avant les vacances d'hiver selon académie.

Liberté • Égalité • Fraternité
RÉPUBLIQUE FRANÇAISE
MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE

Sujet et Corrigé vous sont présentés par freemaths.fr . . .

MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE ET DE LA JEUNESSE

Liberté • Égalité • Fraternité
RÉPUBLIQUE FRANÇAISE

académie Normandie
RÉGION ACADÉMIQUE
MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE ET DE LA JEUNESSE
MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR, DE LA RECHERCHE ET DE L'INNOVATION

Olympiades nationales de mathématiques 2020

Mercredi 11 mars

Sujet destiné aux candidats de première de la voie générale ayant suivi l'enseignement de spécialité « mathématiques »

L'épreuve se déroule en deux parties indépendantes et indissociables de deux heures chacune. **Les énoncés des deux parties sont donc séparés et distribués à des moments différents**. Les copies rédigées sont ramassées à l'issue de la première partie (« exercices nationaux »). Une pause de cinq à quinze minutes est prévue, avant la seconde partie (« exercices académiques »). Sauf en cas de force majeure aucun candidat n'est autorisé à quitter la salle de composition moins de deux heures après le début.

Les calculatrices sont autorisées selon la réglementation en vigueur.

Il est conseillé aux candidats qui ne pourraient formuler une réponse complète à une question d'exposer le bilan des initiatives qu'ils ont pu prendre.

Les énoncés doivent être rendus au moment de quitter définitivement la salle de composition.

Première partie de l'épreuve

Exercice national 1

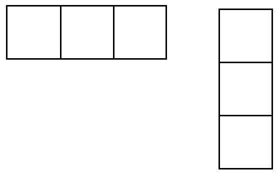
Batailles navales

Un joueur effectue une sorte de « bataille navale » sur un damier carré de $n \times n$ cases, avec $n \geq 3$.

Un bateau est représenté par un rectangle constitué de trois cases de la taille des cases du damier.

Il est placé horizontalement ou verticalement sur trois cases du damier.

Le bateau est invisible du joueur.



Le joueur effectue plusieurs tirs sur des cases distinctes du damier dans le but de toucher au moins une des cases occupées par le bateau.

On appelle *« jeu optimal »* un ensemble de tirs permettant de toucher le bateau à coup sûr, quelle que soit la position occupée par celui-ci, et comprenant le nombre minimal de tirs pour y parvenir.

On note $\mathrm{J}(n)$ le nombre de tirs réalisés dans un jeu optimal. Le but de cet exercice est de déterminer $\mathrm{J}(n)$ et de réaliser un jeu optimal effectif.

Partie A : étude de trois cas particuliers

1. Cas où $n = 3$

a. Combien de positions différentes le bateau est-il susceptible d'occuper sur le damier ?

b. Reproduire le damier sur la copie et indiquer trois cases sur lesquelles tirer pour que le bateau soit touché à coup sûr. On placera une croix ($\times$) dans chacune de ces cases.

c. Montrer qu'on ne peut pas réaliser un jeu optimal avec deux tirs.

d. En déduire que $\mathrm{J}(3) = 3$.

2. Cas où $n = 4$

a. Sur un damier 4×4, indiquer cinq positions pour le bateau qui n'ont aucune case en commun deux à deux. Que peut-on en déduire pour $\mathrm{J}(4)$?

b. Représenter un jeu optimal à cinq tirs sur un damier 4×4. En déduire $\mathrm{J}(4)$.

3. Cas où $n = 5$. Montrer que $\mathrm{J}(5) = 8$.

Partie B : cas général

1. Cas où $n = 3p$, avec p entier et $p \geq 1$

a. Indiquer une façon de placer sur le damier un nombre maximal de positions disjointes deux à deux pouvant être occupées par le bateau. Que peut-on dire de $\mathrm{J}(3p)$?

b. En utilisant le schéma proposé en **A1.b**, expliquer comment réaliser un jeu optimal pour $n = 3p$.

c. Montrer que $\mathrm{J}(3p) = 3p^2$.

2. Cas où $n = 3p + 1$, avec p entier et $p \geq 1$

a. Combien peut-on placer au maximum sur le damier de positions du bateau disjointes deux à deux ?

b. Réaliser un jeu optimal pour $n = 3p + 1$ en expliquant avec précision la démarche.

c. Que vaut $\mathrm{J}(3p + 1)$?

3. Recherche d'une caractérisation commune de $\mathrm{J}(n)$, pour tout entier $n \geq 3$.

On traite le cas $n = 3p + 2$ par des raisonnements analogues à ceux des cas $n = 3p$ et $n = 3p + 1$ et on obtient : $\mathrm{J}(3p + 2) = 3p^2 + 4p + 1$.

a. Montrer que, pour tout entier $n \geq 3$, $\mathrm{J}(n)$ est le plus grand entier inférieur ou égal à $\frac{n^2}{3}$.

b. Existe-t-il un entier n tel que $\mathrm{J}(n)$ = 2020 ?

Exercice national 2

Ensembles surprenants

On désigne par $\mathbb{N}^*$ l'ensemble des entiers naturels non nuls.

Dans tout l'exercice, les ensembles considérés sont des sous-ensembles finis non vides de $\mathbb{N}^*$.
Si A est un tel ensemble, on désigne par $P(A)$ le produit des éléments de A et par $C(A)$ la somme des carrés des éléments de A.
Par exemple, si $A = \{1, 2, 5\}$, alors $P(A) = 1 \times 2 \times 5 = 10$ et $C(A) = 1^2 + 2^2 + 5^2 = 30$.

On dit qu'un ensemble fini A est *surprenant* si $P(A) = C(A)$.

1. Deux exemples.
a. L'ensemble $\{1, 2, 3, 2020\}$ est-il surprenant ?
b. L'ensemble $\{6, 15, 87\}$ est-il surprenant ?

2. On considère un sous-ensemble fini A de $\mathbb{N}^*$tel que $P(A) \geq 5$.
a. Quels sont les nombres x vérifiant l'égalité

$$xP(A) = P(A) - 1 + x^2 \text{ ?}$$

b. Montrer que le nombre $P(A) - 1$ n'appartient pas à A.
c. On note A' l'ensemble obtenu en ajoutant l'entier $P(A) - 1$ à l'ensemble A. En d'autres termes,

$$A' = A \cup \{P(A) - 1\}.$$

Exprimer $P(A') - C(A')$ en fonction de $P(A) - C(A)$.
d. En déduire que si $P(A) > C(A)$, on peut trouver un ensemble surprenant B contenant A.
e. Trouver un ensemble surprenant contenant l'ensemble $\{3, 4, 9\}$.

3. On considère à nouveau un sous-ensemble fini A de $\mathbb{N}^*$ tel que $P(A) \geq 5$.
a. Prouver que le nombre $P(A) - 2$ n'appartient pas à A.
b. En déduire que si $P(A) < C(A)$, on peut trouver un ensemble surprenant B contenant A.

4. En déduire finalement que, pour tout sous ensemble fini non vide A de $\mathbb{N}^*$, on peut trouver un ensemble surprenant B qui contenant A.

5. Montrer qu'on peut trouver un ensemble surprenant ayant 67 éléments et contenant $A = \{1, 2, 5\}$.

MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE ET DE LA JEUNESSE

Olympiades nationales de mathématiques 2020

Mercredi 11 mars

Sujet destiné aux candidats de première de la voie générale ayant suivi l'enseignement de spécialité « mathématiques »

Seconde partie de l'épreuve : exercices académiques

Les calculatrices sont autorisées selon la réglementation en vigueur.

Il est conseillé aux candidats qui ne pourraient formuler une réponse complète à une question d'exposer le bilan des initiatives qu'ils ont pu prendre.

Les énoncés doivent être rendus au moment de quitter définitivement la salle de composition.

Exercice académique 1

Dallage et fractions continues

Une méthode de dallage

On appelle **dallage d'un rectangle** le recouvrement de celui-ci par des **carrés,** de telle sorte que :

- les carrés aient les plus grandes dimensions possibles ;
- les côtés des carrés soient parallèles à l'un des côtés du rectangle ;
- les carrés ne se superposent pas.

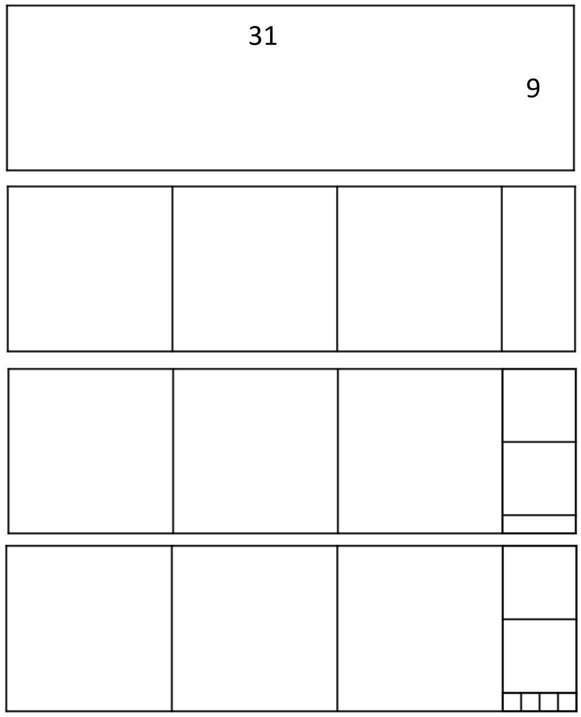
Pour la réalisation d'un tel dallage, on procède comme sur l'exemple ci-contre (rectangle de dimensions 31 et 9) : dans ce cas, le dallage complet est réalisé en trois étapes.

Étape 0 :

Étape 1 :

Étape 2 :

Étape 3 :



1. a. Pour $n \geqslant 1$, on note u_n le nombre de **nouveaux** carrés construits à l'étape n.
Dans le cas de l'exemple ci-dessus (rectangle de dimensions 31 et 9), donner les valeurs de u_1, u_2 et u_3.

b. Construire sur la copie un rectangle de dimensions 89 et 24 (unité graphique : 2 mm) puis son dallage complet.

Approche numérique du dallage

À chaque étape du dallage, afin de déterminer les dimensions du rectangle restant à daller, on réalise la division euclidienne de la longueur du rectangle précédent par sa largeur.

Dans le cas de l'exemple du rectangle de dimensions 31 et 9 :

étape 1 : $31 = 3 \times 9 + 4$ donc 9 et 4 sont les dimensions du rectangle suivant à daller ;

étape 2 : $9 = 2 \times 4 + 1$ donc 4 et 1 sont les dimensions du rectangle suivant à daller ;

étape 3 : $4 = 4 \times 1$. Le dallage est achevé.

Les calculs précédents peuvent s'écrire également :

$\frac{31}{9} = 3 + \frac{4}{9}$ (étape 1) ; or $\frac{4}{9} = \frac{1}{\frac{9}{4}}$ et $\frac{9}{4} = 2 + \frac{1}{4}$ (étape 2) ; donc $\mathbf{\frac{31}{9} = 3 + \frac{1}{2+\frac{1}{4}}}$.

Cette dernière écriture est appelée **écriture en fraction continue** de $\frac{31}{9}$.

2. a. Établir le lien entre l'écriture de $\frac{31}{9}$ en fraction continue et les valeurs u_1, u_2 et u_3 de la question 1.a.

b. À l'aide de divisions euclidiennes successives, donner l'écriture en fraction continue de $\frac{89}{24}$.

Autour du nombre d'or

On définit le nombre d'or, noté ϕ , par l'unique rapport entre deux longueurs L et l tel que le rapport de la somme des deux longueurs sur la plus grande (L) soit égal à celui de la plus grande sur la plus petite (l).

Autrement dit : ϕ est le nombre $\frac{L}{l}$ (avec $L > l > 0$) tel que $\frac{L+l}{L} = \frac{L}{l}$.

3. a. Montrer que $1 + \frac{1}{\phi} = \phi$ et en déduire que ϕ est solution de l'équation $x^2 - x - 1 = 0$.

b. Résoudre l'équation précédente et en déduire la valeur exacte de ϕ.

4. On dit qu'un rectangle est un rectangle d'or si le rapport $\frac{longueur}{largeur}$ est égal à ϕ.

a. Pour le dallage d'un tel rectangle, ϕ étant compris entre 1 et 2, on obtient à l'étape 1 :
Montrer que le petit rectangle obtenu est aussi un rectangle d'or.

b. Que peut-on en déduire quant au nombre d'étapes du dallage ?

c. Quelle est l'écriture en fraction continue de ϕ ?

Exercice académique 2

Permutations de chiffres

1. Sophie dit à Pierre :

« Pense à un nombre entier formé de deux chiffres distincts, permute le chiffre des unités et celui des dizaines et effectue la différence entre ces deux nombres. Cette différence est nécessairement un multiple de 9 ».

a. Démontrer que Sophie a raison.

b. Pierre lui répond :

« J'ai calculé la somme de ces deux nombres entiers au lieu de calculer leur différence et j'ai trouvé 132 ».

Déterminer tous les nombres auxquels Pierre a pu penser.

2. Sophie dit à Pierre :

« On va faire un tour de magie. Pense à un nombre entier formé de trois chiffres distincts, permute le chiffre des centaines et celui des unités. Effectue la différence entre ces deux nombres et donne-moi le chiffre des unités du résultat ».

Pierre lui répond : le chiffre des unités de cette différence est 4.

Après quelques minutes de réflexion, Sophie lui répond : « cette différence est égale à 594 ».

a. Retrouver la démarche ayant permis à Sophie de trouver ce résultat.

b. Déterminer l'ensemble des nombres auxquels Pierre a pu penser, sachant que le chiffre des dizaines de ces nombres est 5.

3. Sophie dit enfin à Pierre :

« À présent, pense à un nombre entier formé de trois chiffres dont le chiffre des unités et celui des centaines ne sont ni égaux, ni consécutifs. Permute le chiffre des centaines et celui des unités, puis effectue la différence entre le plus grand et le plus petit de ces deux nombres. Permute le chiffre des centaines et celui des unités de ce résultat, puis fais la somme de ce dernier nombre et du résultat précédent. Tu vas trouver 1 089 ».

a. Montrer que le chiffre des dizaines de la différence est 9.

b. Expliquer comment Sophie arrive à ce résultat sans connaître le nombre initial.

MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE ET DE LA JEUNESSE

Liberté • Égalité • Fraternité
RÉPUBLIQUE FRANÇAISE

académie Normandie
RÉGION ACADÉMIQUE
MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE ET DE LA JEUNESSE
MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR, DE LA RECHERCHE ET DE L'INNOVATION

Olympiades nationales de mathématiques 2020

Mercredi 11 mars

Sujet destiné aux candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité « mathématiques » de première générale

L'épreuve se déroule en deux parties indépendantes et indissociables de deux heures chacune. **Les énoncés des deux parties sont donc séparés et distribués à des moments différents**. Les copies rédigées sont ramassées à l'issue de la première partie (« exercices nationaux »). Une pause de cinq à quinze minutes est prévue, avant la seconde partie (« exercices académiques »). Sauf en cas de force majeure aucun candidat n'est autorisé à quitter la salle de composition moins de deux heures après le début.

Les calculatrices sont autorisées selon la réglementation en vigueur.

Il est conseillé aux candidats qui ne pourraient formuler une réponse complète à une question d'exposer le bilan des initiatives qu'ils ont pu prendre.

Les énoncés doivent être rendus au moment de quitter définitivement la salle de composition.

Première partie de l'épreuve

Exercice national 1

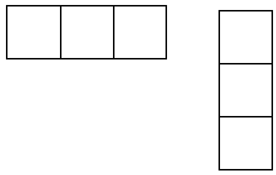
Batailles navales

Un joueur effectue une sorte de « bataille navale » sur un damier carré de $n \times n$ cases, avec $n \geq 3$.

Un bateau est représenté par un rectangle constitué de trois cases de la taille des cases du damier.

Il est placé horizontalement ou verticalement sur trois cases du damier.

Le bateau est invisible du joueur.



Le joueur effectue plusieurs tirs sur des cases distinctes du damier dans le but de toucher au moins une des cases occupées par le bateau.

On appelle *« jeu optimal »* un ensemble de tirs permettant de toucher le bateau à coup sûr, quelle que soit la position occupée par celui-ci, et comprenant le nombre minimal de tirs pour y parvenir.

On note $\mathrm{J}(n)$ le nombre de tirs réalisés dans un jeu optimal. Le but de cet exercice est de déterminer $\mathrm{J}(n)$ et de réaliser un jeu optimal effectif.

Partie A : étude de trois cas particuliers

1. Cas où $n = 3$

a. Combien de positions différentes le bateau est-il susceptible d'occuper sur le damier ?

b. Reproduire le damier sur la copie et indiquer trois cases sur lesquelles tirer pour que le bateau soit touché à coup sûr. On placera une croix ($\times$) dans chacune de ces cases.

c. Montrer qu'on ne peut pas réaliser un jeu optimal avec deux tirs.

d. En déduire que $\mathrm{J}(3) = 3$.

2. Cas où $n = 4$

a. Sur un damier 4×4, indiquer cinq positions pour le bateau qui n'ont aucune case en commun deux à deux. Que peut-on en déduire pour $\mathrm{J}(4)$?

b. Représenter un jeu optimal à cinq tirs sur un damier 4×4. En déduire $\mathrm{J}(4)$.

3. Cas où $n = 5$. Montrer que $\mathrm{J}(5) = 8$.

Partie B : cas général

1. Cas où $n = 3p$, avec p entier et $p \geq 1$

a. Indiquer une façon de placer sur le damier un nombre maximal de positions disjointes deux à deux pouvant être occupées par le bateau. Que peut-on dire de $\mathrm{J}(3p)$?

b. En utilisant le schéma proposé en **A1.b**, expliquer comment réaliser un jeu optimal pour $n = 3p$.

c. Montrer que $\mathrm{J}(3p) = 3p^2$.

2. Cas où $n = 3p + 1$, avec p entier et $p \geq 1$

a. Combien peut-on placer au maximum sur le damier de positions du bateau disjointes deux à deux ?

b. Réaliser un jeu optimal pour $n = 3p + 1$ en expliquant avec précision la démarche.

c. Que vaut $\mathrm{J}(3p + 1)$?

3. Recherche d'une caractérisation commune de $\mathrm{J}(n)$, pour tout entier $n \geq 3$.
On traite le cas $n = 3p + 2$ par des raisonnements analogues à ceux des cas $n = 3p$ et $n = 3p + 1$ et on obtient : $\mathrm{J}(3p + 2) = 3p^2 + 4p + 1$.

a. Montrer que, pour tout entier $n \geq 3$, $\mathrm{J}(n)$ est le plus grand entier inférieur ou égal à $\frac{n^2}{3}$.

b. Existe-t-il un entier n tel que $\mathrm{J}(n)$ = 2020 ?

Exercice national 2

Mathématiques et cryptographie, une longue histoire !

Le chiffre de César ou le chiffrement par décalage est une méthode de chiffrement très simple utilisée par Jules César dans ses correspondances secrètes. Le texte chiffré s'obtient en décalant chaque lettre d'un nombre fixe, appelé clé, dans l'ordre de l'alphabet.

Par exemple avec une clé de 3 vers la droite, A est remplacé par D, B devient E, et ainsi jusqu'à W qui devient Z, puis X devient A etc.

1. Coder le mot suivant avec la clé 3 : OLYMPIADES
2. Décoder le message suivant, chiffré par la méthode de César avec la clé 9 : JWWNN MNB VJCQNVJCRZDNB
3. Décoder les trois parties du texte suivant, chiffré par la méthode de César, dont la clé est à deviner :

Texte 1 : signé Alan Turing

Chers amateurs de mathématiques,

Depuis ma naissance en *qmppi riyj girx hsydi*, la cryptographie me passionne. Le décodage est simpliste même si *Tcxleksvi ri ey wmbmiqi wmigpi ezerx Niwyw Glvmwx* l'aurait trouvé brillant.

Eper Xyvmrk

Soit a et b deux nombres entiers. Le cryptage affine consiste à remplacer chaque lettre de l'alphabet par un nombre, en commençant par 0 pour la lettre A, 1 pour la lettre B... jusqu'à 25 pour la lettre Z, puis à remplacer le nombre initial x par le nombre y qui est le reste de la division euclidienne de $a\,x + b$ par 26. Le couple $(a\,;\,b)$ forme la clé du cryptage.

4. Avec la clé $(a\,;\,b) = (22\,;\,4)$, détailler les calculs pour la lettre B.
5. Toujours avec la clé $(a\,;\,b) = (22\,;\,4)$, coder les lettres D et Q. Quel problème pratique engendre l'utilisation de cette clé ?
6. On change de clé : on prend $(a\,;\,b) = (9\,;\,4)$.

Dans l'algorithme ci-contre, m % 26 désigne le reste de la division euclidienne de m par 26. Par exemple, $28\ \%\ 26 = 2$.

Cet algorithme permet de remplir le tableau de la question a.

```
Entrer a
Entrer b
x ←  0
Tant que x < 26
      m ← ax +b
      y ← m % 26
      Afficher x, y
      x ← x + 1
Fin tant que
```

a. Recopier sur la copie le tableau ci-dessous et le compléter pour tout l'alphabet.

Lettre	A	B	C	D	E	F	G	H	I	….
Rang x	0	1	2	3	4	5	…	…	…	….
$m = ax + b$	4									
Rang y	4									
En crypté	E									

b. La clé $(9\,;4)$ résout elle le problème rencontré à la question 5 ?

7. Décoder la partie du texte suivant, codé avec la clé $(a\ ;\ b) = (9\ ;\ 4)$

Texte 2 Le mot algorithme tire son origine de *Ez-Qpeuebyviy ro or kojt wort scetbo lyrgtk*, père de l'algèbre.	

8. Proposer un algorithme de décodage. Toute trace de recherche sera prise en compte.
9. Quel est le principal défaut des deux systèmes de codage vus précédemment ?

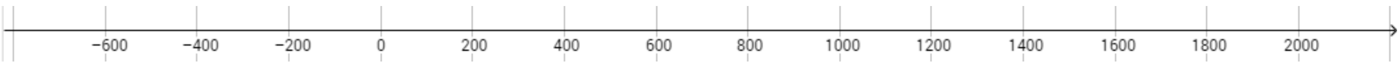
On peut reprendre le chiffre de César précédemment évoqué en changeant de clé pour chaque lettre. Ce chiffrement, le chiffrement de Vigenère, introduit la notion de clé, qui peut se présenter sous forme d'un mot ou d'une phrase. On choisit par exemple le mot clé VIGENERE, ce qui donnera :

- la clé 21 (lettre V) pour la 1re lettre du message à coder,
- la clé 8 (lettre I) pour la 2e lettre,
- la clé 6 (lettre G) pour la 3e lettre, etc...
- la clé 4 (lettre E) pour la 8e lettre puis on recommence avec la clé 21 (lettre V) pour la 9e lettre, etc.

10. Décoder avec cette clé la date de naissance de Blaise Vigenère.

Texte 3 HQRPR GZRL KKRG ZZRBB-ZVBMJ	

11. Remplir la frise ci-dessous avec les noms des trois mathématiciens évoqués dans les textes précédents ainsi que leur année de naissance, parfois approximative.



MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE ET DE LA JEUNESSE

Liberté • Égalité • Fraternité
RÉPUBLIQUE FRANÇAISE

académie Normandie
RÉGION ACADÉMIQUE
MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE ET DE LA JEUNESSE
MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR, DE LA RECHERCHE ET DE L'INNOVATION

Olympiades nationales de mathématiques 2020

Mercredi 11 mars

Sujet destiné aux candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité « mathématiques » de première générale

Seconde partie de l'épreuve : exercices académiques

Les calculatrices sont autorisées selon la réglementation en vigueur.

Il est conseillé aux candidats qui ne pourraient formuler une réponse complète à une question d'exposer le bilan des initiatives qu'ils ont pu prendre.

Les énoncés doivent être rendus au moment de quitter définitivement la salle de composition.

Exercice académique 1

Permutations de chiffres

Remarque préliminaire

Tout nombre entier naturel inférieur ou égal à 999 peut s'écrire sous la forme :

$$cdu = c \times 100 + d \times 10 + u,$$

où c est le chiffre des centaines, d celui des dizaines et u celui des unités.

Ainsi $235 = 2 \times 100 + 3 \times 10 + 5$.

1. Sophie dit à Pierre :

« Pense à un nombre entier formé de deux chiffres distincts, permute le chiffre des unités et celui des dizaines et effectue la différence entre ces deux nombres. Cette différence est nécessairement un multiple de 9 ».

a. Démontrer que Sophie a raison.

b. Pierre lui répond :

« J'ai calculé la somme de ces deux nombres entiers au lieu de calculer leur différence et j'ai trouvé 132 ».

Déterminer tous les nombres auxquels Pierre a pu penser.

2. Sophie dit à Pierre :

« On va faire un tour de magie. Pense à un nombre entier formé de trois chiffres distincts, permute le chiffre des centaines et celui des unités. Effectue la différence entre ces deux nombres et donne-moi le chiffre des unités du résultat ».

Pierre lui répond : le chiffre des unités de cette différence est 4.

Après quelques minutes de réflexion, Sophie lui répond : « cette différence est égale à 594 ».

a. Retrouver la démarche ayant permis à Sophie de trouver ce résultat.

b. Déterminer l'ensemble des nombres auxquels Pierre a pu penser, sachant que le chiffre des dizaines de ces nombres est 5.

3. Sophie dit enfin à Pierre :

« À présent, pense à un nombre entier formé de trois chiffres dont le chiffre des unités et celui des centaines ne sont ni égaux, ni consécutifs. Permute le chiffre des centaines et celui des unités, puis effectue la différence entre le plus grand et le plus petit de ces deux nombres. Permute le chiffre des centaines et celui des unités de ce résultat, puis fais la somme de ce dernier nombre et du résultat précédent. Tu vas trouver 1 089 ».

a. Montrer que le chiffre des dizaines de la différence est 9.

b. Expliquer comment Sophie arrive à ce résultat sans connaître le nombre initial.

Exercice académique 2

Calculs en base 8

Nathéo, d'un naturel original, aime écrire les entiers sans utiliser les chiffres 8 et 9. Pour cela, il a l'habitude de décomposer un nombre en utilisant les puissances de 8.

Exemple : $1\ 659 = \mathbf{3} \times 8^3 + \mathbf{1} \times 8^2 + \mathbf{7} \times 8 + \mathbf{3}$.

On dit que le nombre 1 659 a pour écriture $\overline{3173}$ en base 8 (1 659 est son écriture en base 10).

De même : $508 = \mathbf{7} \times 8^2 + \mathbf{7} \times 8 + \mathbf{4}$ donc le nombre 508 a pour écriture $\overline{774}$ en base 8.

Réciproquement, le nombre $\overline{131}$ (base 8) devient $\mathbf{1} \times 8^2 + \mathbf{3} \times 8 + \mathbf{1} = 89$ (base 10).

D'une manière générale, dire que l'entier naturel x a pour écriture $\overline{a_n a_{n-1} \dots \dots a_2 a_1 a_0}$ en base 8 signifie que $x = \boldsymbol{a_n} \times 8^n + \boldsymbol{a_{n-1}} \times 8^{n-1} + \dots \dots + \boldsymbol{a_2} \times 8^2 + \boldsymbol{a_1} \times 8 + \boldsymbol{a_0}$, où $a_n, a_{n-1}, \dots \dots, a_2, a_1$ et a_0 sont des chiffres **strictement inférieurs** à 8.

1. a. Déterminer l'écriture en base 8 du nombre $1\ 044$.
   b. Déterminer l'écriture en base 10 du nombre $\overline{5432}$.
2. À la manière de Nathéo, poser et effectuer les calculs suivants en base 8 :
   $\overline{131} + \overline{774}$; $\overline{3173} - \overline{131}$; $\overline{131} \times \overline{774}$.
3. a. N est un entier naturel dont l'écriture en base 8 est $\overline{12345676543210}$.
   N est-il divisible par 8 ?
   b. Soit x un entier naturel et $\overline{a_n a_{n-1} \dots \dots a_2 a_1 a_0}$ son écriture en base 8.
   Quelles sont les valeurs possibles de a_0 pour que x soit divisible par 4 ?
4. a. En admettant que, pour tout entier naturel k non nul, le reste de la division euclidienne de 8^k par 7 est égal à 1, déterminer un critère de divisibilité par 7 d'un entier naturel x écrit en base 8.
   b. Le nombre N défini à la question 3.a est-il divisible par 7 ?

www.freemaths.fr

OLYMPIADES MATHÉMATIQUES
LYCÉE, PREMIÈRE

CORRECTION !

Épreuve ▪ 2020

MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE ET DE LA JEUNESSE

Liberté • Égalité • Fraternité
RÉPUBLIQUE FRANÇAISE

Olympiades nationales de mathématiques 2020

Métropole-Europe-Afrique-Orient-Inde

Exercice national 1

Pour tous les candidats

Batailles navales : éléments de correction

Partie A

1. **a.** 6 positions différentes. Il peut occuper une ligne (3 possibilités) ou une colonne (3 possibilités).
   b. Plusieurs possibilités. Par exemple :

	×	
		×
×		

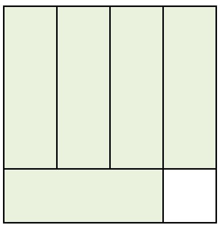
ou

×		
	×	
		×

c. Avec deux tirs, on ne touche qu'une ou deux lignes (resp. colonnes). Un bateau placé sur une des lignes (resp colonnes) non touchées n'est pas atteint. On ne peut donc pas réaliser de jeu optimal avec deux tirs.

d. D'après c. $J(3) > 2$. D'après b. $J(3) \leq 3$. Donc $J(3) = 3$.

2. **a.**



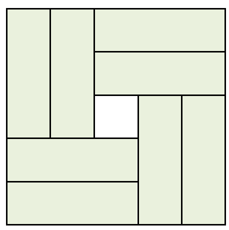
Il faut au moins cinq tirs pour toucher à coup sûr chacune de ces positions possibles du bateau. Donc $J(4) \geq 5$.

b. Par exemple :

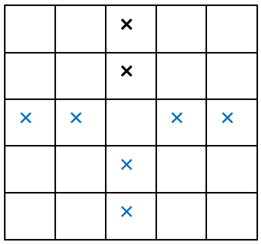
	×		
		×	
×			×
	×		

Que le bateau soit sur une ligne (2 positions possibles par ligne) ou sur une colonne (2 positions possibles par colonne), il est touché par un des tirs représentés par des x ci-contre. Et on ne peut pas réaliser cela avec moins de cinq tirs (cf a.). Donc le jeu représenté est un jeu optimal et $J(4) = 5$.

3. On peut placer le bateau sur l'une des huit positions deux à deux disjointes grisées ci- contre.
Un jeu optimal doit permettre de toucher le bateau dans toutes ces positions (et dans d'autres). Il faut au moins huit tirs, un au moins par zone grisée. Donc $J(5) \geq 8$



Que le bateau soit sur une ligne (3 positions possibles par ligne) ou sur une colonne (3 positions possibles par colonne) il est touché par un des tirs représentés par des x ci- contre.
Le jeu visualisé ci-contre permet donc à coup sûr de toucher le bateau, où qu'il soit.
Ce jeu comporte huit tirs. Donc $J(5) \leq 8$.

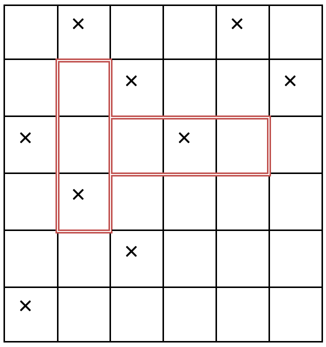


$J(5) \geq 8$ et $J(5) \leq 8$ donc : $J(5) = 8$

Partie B

1. Cas $n = 3p$

a. On peut identifier sur chaque ligne (ou colonne) p blocs successifs de trois cases. Ceci sur $3p$ lignes (ou colonnes). Cela permet de recouvrir complétement le damier à l'aide de $3p^2$ blocs deux à deux disjoints de trois cases alignées. Il faut donc au moins $3p^2$ tirs pour espérer toucher le bateau, où qu'il se trouve. Donc $J(3p) \geq 3p^2$.



b. et c. On considère le damier $n \times n$ comme une juxtaposition de p^2 damiers 3×3 cases. On place dans chacun de ces damiers les croix de la même façon, comme en A-1-b. On vérifie que, sur chaque ligne, les croix successives sont espacées de deux cases. Ce qui ne laisse pas de place à trois cases consécutives non atteintes par un tir. De même sur les colonnes.

Ce jeu permet donc de toucher le bateau où qu'il soit. Et il est composé de $3p^2$ tirs. D'après a., il n'existe pas de jeu comportant moins de tirs et permettant de toucher le bateau où qu'il soit. Donc ce jeu est optimal et $J(3p) = 3p^2$.

2. Cas $n = 3p + 1$

a. Pour obtenir le damier $(3p + 1) \times (3p + 1)$ on complète le damier $3p \times 3p$ par une ligne de $3p + 1$ cases en bas et une colonne de $3p$ cases à droite. À partir des $3p^2$ blocs successifs de trois cases déjà obtenus sur le damier $3p \times 3p$, on peut ajouter p blocs successifs de trois cases en position horizontale en bas et p blocs successifs de trois cases en position verticale à droite. Il reste une case non recouverte dans le coin. On obtient ainsi $3p^2 + 2p$ blocs successifs de trois cases deux à deux disjoints.

Donc $J(3p + 1) \geq 3p^2 + 2p$.

b. et c. Reprenant la grille du jeu optimal pour le cas $n = 3p$, on complète par des croix comme dans A-2-b., sur la ligne rajoutée en bas et sur la colonne rajoutée à droite. On rajoute ainsi $2p$ croix aux $3p^2$ croix déjà placées. D'où un jeu de $3p^2 + 2p$ tirs qui permet de toucher à coup sûr le bateau. Il est optimal d'après a. et $J(3p + 1) = 3p^2 + 2p$.

3.

a. Plusieurs démarches possibles. Par exemple :

Dans tous les cas, $J(n)$ est un entier (par sa définition même).

<u>Si $n = 3p$</u> : $J(n) = 3p^2$ et $\frac{n^2}{3} = 3p^2$.

Donc , $J(n)$, qui est égal à $\frac{n^2}{3}$, est a fortiori inférieur ou égal à $\frac{n^2}{3}$ et l'entier suivant, $J(n) + 1$est strictement supérieur à $\frac{n^2}{3}$. Donc $J(n)$ est bien le plus grand entier inférieur ou égal à $\frac{n^2}{3}$.

<u>Si $n = 3p + 1$</u> : $J(n) = 3p^2 + 2p$ et $\frac{n^2}{3} = 3p^2 + 2p + \frac{1}{3}$. Donc $J(n) < \frac{n^2}{3}$.

Et $J(n) + 1 = 3p^2 + 2p + 1$. Donc $\frac{n^2}{3} < J(n) + 1$.

Donc $J(n)$ est bien le plus grand entier inférieur ou égal à $\frac{n^2}{3}$.

<u>Si $n = 3p + 2$</u> : $J(n) = 3p^2 + 4p + 1$ et $\frac{n^2}{3} = 3p^2 + 4p + \frac{4}{3} = 3p^2 + 4p + 1 + \frac{1}{3}$. Donc $J(n) < \frac{n^2}{3}$.

Et $J(n) + 1 = 3p^2 + 4p + 2$. Donc : $\frac{n^2}{3} < J(n) + 1$.

Donc $J(n)$ est bien le plus grand entier inférieur ou égal à $\frac{n^2}{3}$.

b. La réponse est non : En effet $\frac{77^2}{3} < 1977$ et $2028 = \frac{78^2}{3}$ donc $J(n) < 2020$ si $n \leq 77$ et $J(n) > 2020$ si $n \geq 78$.

Exercice national 2

Pour les candidats ayant choisi la spécialité « mathématiques »

Ensembles surprenants : éléments de correction

1. *a.* Soit $E = \{1, 2, 3, 2\,020\}$. $P(E) = 1 \times 2 \times 3 \times 2\,020 = 12\,120$
et $C(E) = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 2\,020^2 = 4\,080\,414$. Donc E n'est pas surprenant.
b. Soit $F = \{6, 15, 87\}$. $P(F) = 6 \times 15 \times 87 = 7\,830$ et $6^2 + 15^2 + 87^2 = 7\,830$. F est un ensemble surprenant.

2. a. L'égalité s'écrit aussi : $(x-1)(P(A) - 1 - x) = 0$. Il y a deux solutions : 1 et $P(A) - 1$.
b. Supposons que le nombre $P(A) - 1$ appartienne à A. Il existe donc un entier k tel que $P(A) = k(P(A) - 1)$.
On peut encore écrire : $(k-1)P(A) = k$, ce qui implique que $k - 1$ divise k et donc que $k = 2$ et finalement $P(A) = 2$, ce qui est exclu par l'énoncé.
c. Comme $A' = A \cup \{P(A) - 1\}$, on a : $P(A') = P(A) \times (P(A) - 1)$ et $C(A') = C(A) + (P(A) - 1)^2$.
On obtient $P(A') - C(A') = P(A) - C(A) - 1$.
d. En ajoutant un élément nouveau (bien choisi) à l'ensemble A, on obtient un nouvel ensemble pour lequel la différence entre le produit des éléments et la somme des carrés est diminuée de 1 par rapport à A. En opérant $n = P(A) - C(A)$ fois cet élargissement, on parvient à $A_n = B$ tel que $P(A_n) - C(A_n) = 0$, donc à un ensemble surprenant contenant A. Il n'y a pas de risque de rencontrer un élément déjà dans l'ensemble d'après **2. b.**
e. Appliquons l'algorithme précédent à l'ensemble $G = \{3, 4, 9\}$

Éléments de l'ensemble	Leur produit $\boldsymbol{P}$	La somme de leurs carrés	$\boldsymbol{P - 1}$
$3, 4, 9$	108	106	107
$3,4,9,107$	$11\,556$	$11\,555$	$11\,555$
$3, 4, 9, 107, 11\,555$	$133\,529\,580$	$133\,529\,580$	

Comme dit plus haut, il a fallu deux opérations pour parvenir à un ensemble surprenant.

3. a. Supposons que le nombre $P(A) - 2$ appartienne à A. Il existe un entier k tel que $P(A) = k(P(A) - 2)$. Cette égalité s'écrit : $(k-1)P(A) = 2k$. On en conclut que $k - 1$ divise $2k$. Il s'ensuit que $k = 2$ ou $k = 3$ (*), ce qui donne les possibilités $P(A) = 4$ ou $P(A) = 3$, contrairement à l'hypothèse.
b. Comme dans la question précédente, nous adjoignons le nombre $P(A) - 2$ à l'ensemble A pour obtenir l'ensemble A_1. Pour toute partie finie X de $\mathbb{N}^*$, notons $f(X) = P(X) - C(X)$. On compare $f(A_1)$ et $f(A)$:

$$f(A_1) - f(A) = P(A)(P(A) - 2) - C(A) - (P(A) - 2)^2 - P(A) + C(A)$$

Ou encore : $f(A_1) - f(A) = P(A) + 4$.
En passant de A à A_1, la différence entre le produit des éléments et la somme de leurs carrés (qui est, au départ, négative, augmente). On poursuit le processus jusqu'à trouver par adjonction successive d'éléments (là encore il n'y a pas possibilité de redondance), un ensemble A_n tel que :
- ou bien $f(A_n) = 0$, auquel cas, c'est terminé et A_n est surprenant ;
- ou bien $f(A_n) > 0$, et on est ramené à la situation de la question **2.** On sait comment continuer pour trouver un ensemble surprenant qui contienne tous ceux qui l'ont précédé dans le processus, dont A.

4. Il ne reste plus à examiner que les sous-ensembles finis non vides de **N*** dont le produit des éléments est strictement inférieur à 5. Pour chacun d'entre eux, on cherche un ensemble surprenant qui le contienne. On peut adjoindre à chacun le nombre 5, qui assure que le (nouveau) produit est supérieur à 5 et on se ramène aux cas précédents.

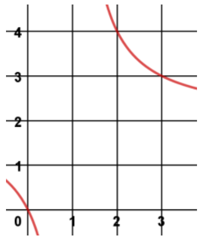
5. On a vu au début de l'énoncé que $P(A) = 10$ et $C(A) = 30$. On applique l'algorithme du **3. b.**

Éléments de l'ensemble	**Leur produit P**	**La somme de leurs carrés**	$P - 2$
$1, 2, 5$	10	30	8
$1, 2, 5, 8$	80	94	78
$1, 2, 5, 8, 78$	$6\,240$	6178	

La différence $f(A_2) - f(A)$ est cette fois égale à 62 ; elle relève donc de l'algorithme du **2. d.** Avec cette méthode, on adjoint 62 éléments aux 5 de A_2. Cela en fait 67 (on ne saurait les écrire tous, le nombre de chiffres augmente très vite…)

____

(*) Si on ne veut pas utiliser l'arithmétique, il suffit de regarder les points à coordonnées entières positives de l'hyperbole $x \longmapsto \frac{2x}{x-1}$



Exercice national 2

Pour les candidats n'ayant pas suivi la spécialité « mathématiques »

Mathématiques et cryptographie, une longue histoire ! : éléments de correction

1. *ROBPSLDGHV*
2. ANNEE DES MATHEMATIQUES
3. Chers amateurs de mathématiques,

Depuis ma naissance en *mille neuf cent douze*, ou presque, la cryptographie me passionne. Le décodage est simpliste même si *Pythagore né au sixième siècle avant Jésus Christ* l'aurait trouvé brillant.

Alan Turing

4. Le rang de la lettre B est 1. $22 \times 1 + 4 = 26$; le reste de la division euclidienne de 26 par 26 est 0 qui correspond à la lettre A.

5. Lettre D : $22 \times 3 + 4 = 70$ et $70 = 26 \times 2 + 18$. D est codée par S.

Lettre Q : $22 \times 16 + 4 = 356$ et $356 = 22 \times 16 + 4$. Q est aussi codée par S.

Ce codage n'est pas envisageable car deux lettres différentes sont codées par une même lettre, le décodage n'est donc pas unique.

6.a.

Lettre	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
Rang x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$m = ax + b$	4	13	22	31	40	49	58	67	76	85	94	103	112
Rang y	4	13	22	5	14	23	6	15	24	7	16	25	8
En crypté	E	N	W	F	O	X	G	P	Y	H	Q	Z	I
Lettre	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
Rang x	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
$m = ax + b$	121	130	139	148	157	166	175	184	193	202	211	220	229
Rang y	17	0	9	18	1	10	19	2	11	20	3	12	21
En crypté	R	A	J	S	B	K	T	C	L	U	D	M	V

b. La clé résout le problème évoqué à la question 5, car la dernière ligne contient des éléments distincts : deux lettres différentes sont codées différemment, rendant unique le décodage.

7. Le mot algorithme tire son origine de *Al-Khawarizmi, né en sept cent quatre-vingts*, père de l'algèbre.

8. Exemples d'algorithme de décodage

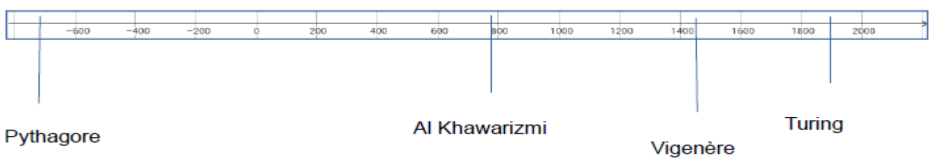
```
N ← 0
Tant que N < 26
   M ← 3*N + 14
   Tant que M > 25
      M ← M - 26
   Fin tant que
   Afficher M
   N ← N + 1
Fin tant que
```

```
N ← 0
X ← 0
Tant que X < 26
   M ← 9*X + 4
   R ← M%26
   Si R = N
      Afficher X.
   Fin si
Fin tant que
```

9. Dans ces deux types de codage, une lettre est toujours codée par une même autre lettre ce qui facilite le décodage, c'est un défaut …

10. *mille cinq cent vingt trois*

11.



Exercice académique 1

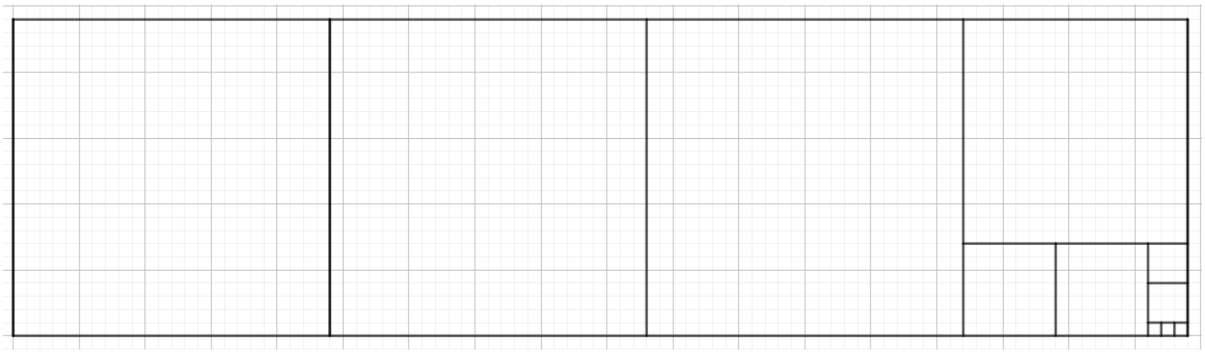
Pour les candidats ayant suivi la spécialité « mathématiques »

Dallage et fractions continues : éléments de correction

Une méthode de dallage

1. a. $u_1 = 3$ $u_2 = 2$ $u_3 = 4$

b. Dallage du rectangle de dimensions 89 et 24 :



Approche numérique du dallage

2. a. $\frac{31}{9} = u_1 + \frac{1}{u_2 + \frac{1}{u_3}}$

b. $89 = 3 \times 24 + 17$ donc $\frac{89}{24} = 3 + \frac{17}{24}$; or $\frac{17}{24} = \frac{1}{\frac{24}{17}}$.

$24 = 1 \times 17 + 7$ donc $\frac{24}{17} = 1 + \frac{7}{17}$; or $\frac{7}{17} = \frac{1}{\frac{17}{7}}$.

$17 = 2 \times 7 + 3$ donc $\frac{17}{7} = 2 + \frac{3}{7}$; or $\frac{3}{7} = \frac{1}{\frac{7}{3}}$

$7 = 2 \times 3 + 1$ donc $\frac{7}{3} = 2 + \frac{1}{3}$.

On obtient ainsi : $\frac{89}{24} = 3 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{3}}}}$

On remarque que (3 ; 1 ; 2 ; 2 ; 3) correspond aux nombres de carrés à chaque étape de la construction du 1.b.

Autour du nombre d'or

3. a. $\phi = \frac{L}{l}$ avec $L > l > 0$ tels que $\frac{L+l}{L} = \frac{L}{l}$

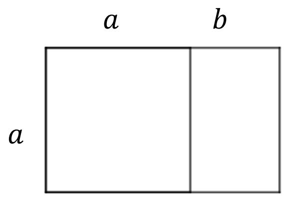
On a $\phi = \frac{L+l}{L} = 1 + \frac{l}{L} = 1 + \frac{1}{\phi}$.

On a donc $\phi = \frac{\phi + 1}{\phi}$ d'où $\phi^2 = \phi + 1$ et ainsi $\phi^2 - \phi - 1 = 0$.

ϕ est donc solution de l'équation $x^2 - x - 1 = 0$.

b. $\Delta = (-1)^2 - 4 \times 1 \times (-1) = 5$ et $\Delta > 0$. L'équation a deux solutions: $x_1 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ et $x_2 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

x_2 est la seule solution positive de cette équation donc $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.



4. a. Le grand rectangle est un rectangle d'or donc $\frac{a+b}{a} = \phi$.

Par définition de ϕ ou en utilisant les égalités $1+\frac{b}{a}=\phi=1+\frac{1}{\phi}$, on obtient $\phi=\frac{a}{b}$.

Le petit rectangle obtenu est donc aussi un rectangle d'or.

b. Le nombre d'étapes du dallage est donc infini.

c. D'après ce qui précède ou d'après la formule $\phi=1+\frac{1}{\phi}$.

On a donc $\phi=1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{\dots}}}}$.

Exercice académique 1

Pour les candidats n'ayant pas suivi la spécialité « mathématiques »

Exercice académique 2

Pour les candidats ayant suivi la spécialité « mathématiques »

Permutations de chiffres : éléments de correction

1.a. Soit $A=10y+x$, le premier nombre et soit $B=10x+y$ le second nombre.

$A-B=9\,(y-x)$; or $y-x$ est un entier donc 9 divise $A-B$.

b. $A+B=132$. 9 divise $A-B$ donc $A-B$ est un multiple de 9 et $A-B$ est un nombre pair car, sinon, $2A$ serait impair.

Donc les valeurs possibles de $A-B$ sont 18, 36 et 54.

On élimine 72 et 90 car les valeurs de A seraient supérieures à 100.

Les nombres auxquels Pierre a pu penser sont donc 57 ; 75 ; 48 ; 84 ; 39 ou 93 (on vérifie que ces solutions sont valides).

2.a. Soit $A=100z+10y+x$ le premier nombre, avec $100\leq A\leq 999$.

Le second nombre est donc $B=100x+10y+z$.

$A-B=99(z-x)$ donc 99 divise $A-B$. Donc les valeurs possibles de $A-B$ sont 99 ; 198 ; 297 ; …….. ; 891, car $z\neq x$. Or le chiffre des unités est 4 donc $A-B=594$.

Remarque : Le chiffres des dizaines de $A-B$ est toujours égal à 9.

b. $z-x=6$ et $y=5$. Donc les nombres possibles sont : 157 ; 258 ; 359 ; 650 ; 751 ; 852 et 953.

3. a. Vu au 2.

b. $A-B=99(z-x)$, avec $z-x>1$ donc $A-B$ est formé de trois chiffres.

Dans la question 2. a. on a vu que le chiffre des dizaines de $A-B$ est 9.

Donc $A-B=100\,t+90+s$.

D'où la somme $S=(100t+90+s)+(100s+90+t)=101t+101s+180=101(t+s)+180$. Or $A-B=100\,t+90+s=99(z-x)$, donc $t+s+99t+90=99(z-x)$.

D'où $t+s=9(11z-11x-11t-10)$. Donc 9 divise $t+s$.

D'où $t+s=9$. En effet : t et s sont deux entiers compris entre 0 et 9 donc $t+s\leq 18$.

Si $t+s=18$ alors $t=s=9$ et $A-B=999$. Impossible car $A-B<900$.

Donc $S=101\times 9+180=1\,089$.

Remarque : sachant que les valeurs possibles de $A-B$ sont 99 ; 198 ; 297 ; …….. ; 891, on peut se contenter d'étudier ces différents résultats pour vérifier que $S=1089$.

Exercice académique 2

Pour les candidats n'ayant pas suivi la spécialité « mathématiques »

Calculs en base 8 : éléments de correction

1. a. $1\,044 = \mathbf{2} \times 8^3 + \mathbf{0} \times 8^2 + \mathbf{2} \times 8 + \mathbf{4}$ donc $1\,044 = \overline{2024}$

   b. $\overline{5432} = \mathbf{5} \times 8^3 + \mathbf{4} \times 8^2 + \mathbf{3} \times 8 + \mathbf{2} = 2\,842.$

2. $\overline{131} + \overline{774} = \overline{1125}$

   $\overline{3173} - \overline{131} = \overline{3042}$

   $\overline{131} \times \overline{774} = \overline{130234}$

3. a. Pour tout entier naturel k non nul, 8 divise 8^k, donc un nombre est divisible par 8 lorsque son chiffre des unités en base 8 est 0. N donc est divisible par 8.

   b. 4 divise 8 donc, pour tout entier $k \geq 1$, 4 divise 8^k. Donc 4 divise x si et seulement si : $a_0 = 0$ ou $a_0 = 4$.

   Un nombre est donc divisible par 4 si et seulement si le chiffre des unités dans sa décomposition en base 8 est 0 ou 4.

4. a. On admet que, pour tout entier $k \geq 1$, le reste de la division euclidienne par 7 de 8^k est 1.

   Donc il existe n entiers naturels $q_1, q_2, \dots, q_n$ tels que

   $x = a_n(7q_n + 1) + a_{n-1}(7q_{n-1} + 1) + \cdots\ a_1(7q_1 + 1) + a_0.$

   D'où $x = 7(a_n q_n + a_{n-1}q_{n-1} + \cdots\ a_1 q_1) + a_n + a_{n-1} + \cdots +\ a_1 + a_0.$

   Donc 7 divise x si et seulement si 7 divise $(a_n + a_{n-1} + \cdots +\ a_1 + a_0)$.

   Donc un nombre est divisible par 7 si et seulement si la somme de ses chiffres dans sa décomposition en base 8 est un multiple de 7.

   b. $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 + 0 = 49$ donc 7 divise N.