SUJET + CORRIGÉ

OLYMPIADES DE MATHÉMATIQUES

ACADÉMIE DE ROUEN

Classes de première S • 2016

MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE, DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE

Olympiades académiques de mathématiques

MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE, DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE

Classes de premières (série S)

Académie de Caen et de Rouen

Mercredi 16 mars

L'épreuve se déroule en deux parties indépendantes de deux heures chacune, **les énoncés des deux parties sont donc séparés et distribués séparément à des moments différents**. Les copies rédigées sont ramassées à l'issue de la première partie (« exercices nationaux »). Une pause de dix minutes est prévue, avant la seconde partie (« exercices académiques »). Sauf cas de force majeure, aucun candidat n'est autorisé à quitter définitivement la salle de composition moins de 2 heures après le début.

Les calculatrices sont autorisées selon la législation en vigueur.

Il est conseillé aux candidats qui ne pourraient formuler une réponse complète à une question d'exposer le bilan des initiatives qu'ils ont pu prendre.

Les énoncés doivent être rendus au moment de quitter définitivement la salle de composition.

Première partie de l'épreuve

Exercice national numéro 1 : Échanges thermiques

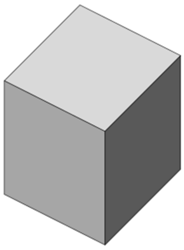
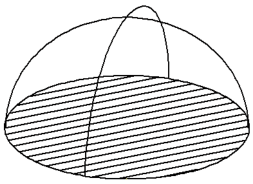
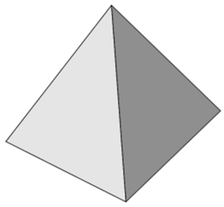
En architecture, on appelle facteur de compacité d'un bâtiment le rapport de la surface extérieure – y compris la base en contact avec le sol – de ce bâtiment, mesurée en m^2, *à son volume, mesuré en* m^3. *Le facteur de compacité* $\boldsymbol{c} = \frac{S}{V}$, exprimé en m^{-1}, *donne une première évaluation grossière des performances thermiques d'une construction d'habitation.*

1. Calculs de compacité pour quelques volumes usuels, dessinés ci-dessous.

a. Déterminer le facteur de compacité d'un cube de côté *a*.

b. Déterminer celui d'une demi-sphère de rayon r. On rappelle que le volume d'une sphère de rayon r est $\frac{4}{3}\pi r^3$ et que sa surface a pour aire $4\pi r^2$.

c. Déterminer celui d'une pyramide régulière à base carrée de côté *a*, et de hauteur verticale *a*.

d. En quoi, d'après vous, le facteur de compacité est-il lié aux performances thermiques d'un bâtiment ?

2. On se propose d'étudier le facteur de compacité d'un pavé droit de volume 1 dont les dimensions en mètres sont x, y et z .

a. Vérifier que pour tous nombres a, b et c :

$$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = \frac{1}{2}(a+b+c)[(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2]$$

b. En déduire que pour tous nombres réels positifs a, b et c, $a^3 + b^3 + c^3 \geq 3abc$.

c. En déduire que pour tous nombres réels positifs A, B et C dont le produit est égal à 1 :

$$A + B + C \geq 3.$$

d. Montrer que le facteur de compacité de ce pavé est : $c = 2\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right)$.

e. Quel est le pavé droit de volume 1 qui rend minimal le facteur de compacité ?

3. Dans cette question, on désire déterminer tous les pavés droits dont le facteur de compacité est égal à 1 et dont les dimensions p, q et r, exprimées en mètres, sont des nombres entiers. On prendra $p \leq q \leq r$.

a. Établir que résoudre ce problème consiste à déterminer les triplets ordonnés d'entiers p, q et r tels que

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} = \frac{1}{2}.$$

b. Démontrer que $3 \leq p \leq 6$.

c. Montrer que si $p = 3$ alors $7 \leq q \leq 12$.

d. Terminer la résolution.

Exercice national numéro 2 : Liber abaci

Il y a 4000 ans, les anciens égyptiens utilisaient en calcul une propriété arithmétique bien étonnante : tout nombre rationnel $\frac{p}{q}$ strictement positif s'écrit comme une somme de fractions unitaires, c'est-à-dire d'inverses d'entiers positifs, tous différents les uns des autres. Depuis lors, une telle décomposition s'appelle une « écriture égyptienne ». Ainsi, la somme $\frac{1}{6}+\frac{1}{17}+\frac{1}{102}$ est-elle une « écriture égyptienne » du quotient $\frac{4}{17}$, tandis que les sommes $\frac{1}{17}+\frac{1}{17}+\frac{1}{17}+\frac{1}{17}$ et $\frac{1}{17}+\frac{3}{17}$ n'en sont pas. Plusieurs questions sur ces écritures demeurent, aujourd'hui, encore ouvertes.

1. Pourquoi les deux dernières décompositions données en préambule ne sont-elles pas des « écritures égyptiennes » ? Proposer une écriture égyptienne de $\frac{2}{3}$ comportant deux fractions unitaires, puis une autre de $\frac{2}{3}$ en comportant trois.

2. Un algorithme.

Soient p et q des entiers tels que $0<p<q$. Le quotient $\frac{p}{q}$ est donc un élément de $]0;1[$

Poser $k=1$, $p_1=p$, $q_1=q$.
Tant que $p_k \neq 0$

> **Déterminer le plus petit entier positif n_k tel que $\frac{1}{n_k} \leq \frac{p_k}{q_k}$. Ainsi : $\frac{1}{n_k} \leq \frac{p_k}{q_k} < \frac{1}{n_k-1}$.**
>
> **Poser $p_{k+1}=p_k n_k - q_k$ et $q_{k+1}=q_k n_k$. Ainsi : $\frac{p_{k+1}}{q_{k+1}}=\frac{p_k}{q_k}-\frac{1}{n_k}$.**
>
> **Incrémenter k, c'est-à-dire augmenter la valeur du compteur k d'une unité.**

Fin du Tant que.

a. On fait ici tourner l'algorithme sur le quotient $\frac{p}{q}=\frac{4}{17}$. Au début du premier tour de boucle, $k=1$, $p_1=4$, $q_1=17$. On détermine alors $n_1=5$. Puis $p_2=3$, $q_2=85$ et k vaut 2 avant d'entrer dans le deuxième tour de boucle. Poursuivre jusqu'à l'arrêt complet. Que vaut $\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}+\frac{1}{n_3}+\frac{1}{n_4}$? Les quatre fractions unitaires sont-elles distinctes ?
b. On suppose que l'algorithme prend fin à l'issue du *N*-ième tour de boucle. Justifier qu'il permet de donner une « écriture égyptienne » du quotient $\frac{p}{q}$.
c. Justifier clairement que l'algorithme ne peut être illimité.
Cet algorithme permet donc de donner une « écriture égyptienne » de n'importe quel nombre rationnel élément de $]0;1[$. Il appartient à une classe d'algorithmes dits « gloutons » et est attribué à Léonard de Pise, auteur du *Liber abaci* (1202).

L'adjectif « glouton » s'applique à des algorithmes faisant, à chaque étape, un choix optimal. L'optimalité globale n'est pas nécessairement atteinte comme en témoignent les deux décompositions de $\frac{4}{17}$ rencontrées dans ce problème.

3. Et pour $\frac{p}{q} \geq 1$?

a. L'algorithme précédent fonctionne-t-il pour $\frac{p}{q}>1$?
b. Soit a un entier supérieur ou égal à 3.
Justifier que : $\frac{1}{a+1}+\frac{1}{a+2}+\frac{1}{a+3}\dots+\frac{1}{2a-1}+\frac{1}{2a}>\frac{1}{2}$ et $\frac{1}{a+1}+\frac{1}{a+2}+\frac{1}{a+3}\dots+\frac{1}{4a-1}+\frac{1}{4a}>1$
c. En déduire qu'il existe un entier naturel $b>a$ tel que :

$$\frac{1}{a+1}+\frac{1}{a+2}+\cdots+\frac{1}{b-1}+\frac{1}{b} \leq 1 < \frac{1}{a+1}+\frac{1}{a+2}\dots+\frac{1}{b-1}+\frac{1}{b}+\frac{1}{b+1}.$$

d. Établir alors que tout rationnel $\frac{p}{q} \geq 1$ admet lui aussi une « écriture égyptienne », puis une infinité.

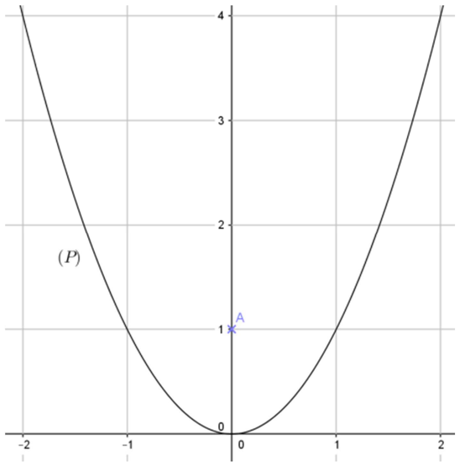
Seconde partie de l'épreuve

Exercice académique numéro 1 : À la recherche du triangle d'or

Dans un repère orthonormé $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$ du plan, on note (P) la parabole d'équation $y\ = x^2$ et on appelle A le point de coordonnées (0 ; 1).

On s'intéresse, dans cet exercice, aux triangles AMM', où M et M' sont deux points de la parabole (P).

L'objectif est de déterminer tous les couples de points M et M' appartenant à (P) pour lesquels le triangle **AMM' soit isocèle rectangle en A**.



Partie A – Quelques exemples

a. Représenter sur le graphique ci-contre deux exemples simples de triangles AMM', symétriques, qui satisfont le problème (aucune justification n'est attendue).

b. Vérifier que les points $\mathrm{M}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\ ;\ \frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)$ et $\mathrm{M}'\left(-\frac{1+\sqrt{5}}{2}\ ;\ \frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)$ appartiennent à (P) et forment un couple de points également solution au problème.

Partie B – Avec un cercle

On considère le cercle (C) de centre A et de rayon *r* (avec *r* > 0).

Ci-dessous le cercle (C) a été représenté dans le même repère que la parabole (P) pour cinq valeurs particulières de *r*.

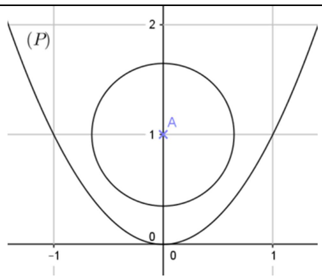


Figure 1

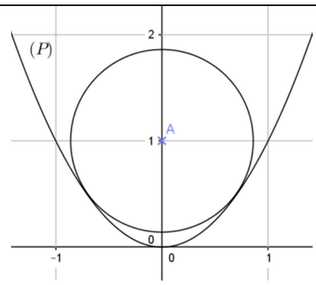


Figure 2

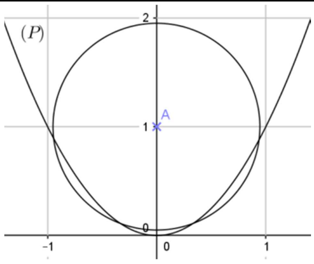


Figure 3

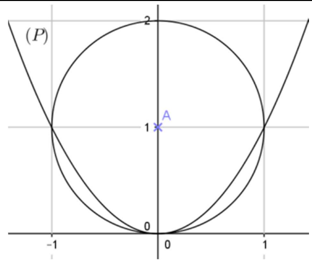


Figure 4

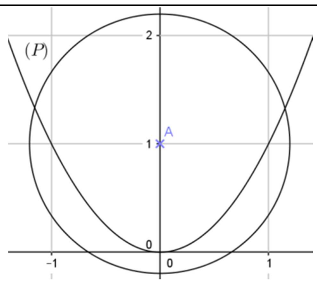


Figure 5

1. Soit $\mathrm{M}(x\,;\,y)$ un point quelconque du plan.
   Démontrer que M appartient au cercle (C) si et seulement si $\boldsymbol{x^2+y^2-2y+1=r^2}$.

2. En déduire que $\mathrm{M}(x\,;\,y)$appartient à la fois au cercle (C) et à la parabole (P) si et seulement si $\begin{cases} \boldsymbol{y=x^2} \\ \boldsymbol{y^2-y+1-r^2=0} \end{cases}$.

3. Expliquer en quoi la résolution de ce système contribue à la résolution du problème initialement présenté.

4. ***a.*** Déterminer, selon la valeur de *r*, le nombre de solutions de l'équation :
   $$\boldsymbol{y^2-y+1-r^2=0}$$
   b. À quel graphique ci-dessus le cas « $r=\frac{\sqrt{3}}{2}$ » correspond-il ?

5. ***On suppose dans la suite que : r*** $\geq \boldsymbol{\frac{\sqrt{3}}{2}}$.
   a. Soient $\mathrm{M}(x\,;\,y)$ *et* $\mathrm{M}'(x'\,;\,y')$ deux points appartenant à la fois à (C) et (P) **et symétriques par rapport à l'axe des ordonnées**.
   Justifier que si le triangle AMM' est rectangle en A alors $\boldsymbol{y^2-3y+1=0}$.

   b. À l'aide des représentations graphiques ci-dessus, et en raisonnant selon la valeur de *r*, terminer la résolution du problème, c'est-à-dire, déterminer tous les couples de points M et M' appartenant à (P) pour lesquels le triangle **AMM' est isocèle rectangle en A.**

Exercice académique numéro 2 : Retouche d'images

Une image numérique en noir et blanc est composée de petits carrés (pixels) dont la couleur va du noir au blanc en passant par toutes les nuances de gris. Chaque nuance est codée par un nombre réel x de la façon suivante :
- x = 0 pour le noir ;
- x = 1 pour le blanc ;
- x varie de 0 à 1 pour toutes les nuances de gris intermédiaires (du foncé au clair).

L'image A, ci-dessous, est composée de quatre pixels et donne un échantillon de ces nuances avec leurs codes.
Un logiciel de retouche d'image utilise des fonctions numériques dites « fonctions de retouche ».
Une fonction *f* définie sur l'intervalle [0 ; 1] est dite « **fonction de retouche** » si elle possède au moins les trois propriétés suivantes :
- $f\ (0)=0$;
- $f\ (1)=1$;
- f est croissante sur l'intervalle [0 ; 1].

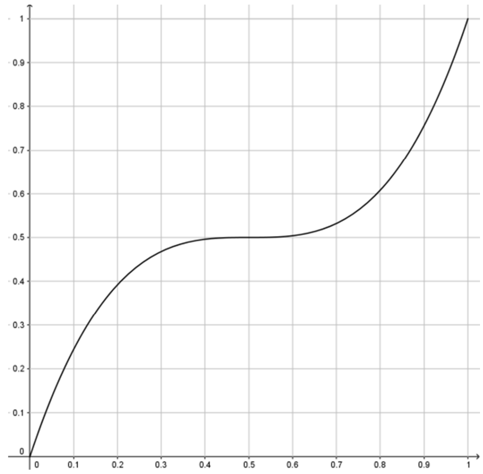
Une nuance codée $\boldsymbol{x_0}$ est dite :
- assombrie par la fonction f si $f(x_0)\leq x_0$;
- éclaircie par la fonction f si $f(x_0)\geq\ x_0$.

Ainsi, si $f(x)=x^2$, un pixel de nuance codée 0,2 prendra la nuance codée $0{,}2^2$ = 0,04.
L'image A sera transformée en l'image B ci-dessous.
Si $f\ (x)=\ \sqrt{x}$, un pixel de nuance codée 0,2 prendra la nuance codée $\sqrt{0{,}2}\approx 0{,}45$.
L'image A sera transformée en l'image C ci-dessous.

Image A Image B Image C

Partie A

1. On considère la fonction f_1 définie sur l'intervalle [0 ; 1] par $f_1(x) = 4x^3 - 6x^2 + 3x$.
Sa courbe représentative est donnée ci-contre.



a. Démontrer que la fonction f_1 est une fonction de retouche.

b. À l'aide du graphique, quelles sont les nuances codées x appartenant à l'intervalle [0 ; 1] qui seront assombries par la fonction f_1 ?

c. Résoudre par le calcul l'inéquation $f_1(x) \leq x$.

2. ***a.*** Proposer une fonction de retouche f_2 définie sur [0 ; 1] éclaircissant toute nuance x appartenant à l'intervalle [0 ; 1].
b. Proposer une fonction de retouche f_3 définie sur [0 ; 1] assombrissant toute nuance x appartenant à l'intervalle [0 ; 1].

Partie B

1. On considère une fonction polynôme du second degré g_1 définie sur [0 ; 1] vérifiant $g_1\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{2}{3}$.
Sachant que g_1 est une fonction de retouche, justifier qu'elle est définie sur [0 ; 1] par :

$$g_1(x) = -\frac{2}{3}x^2 + \frac{5}{3}x.$$

2. On cherche maintenant une fonction de retouche g_2 définie sur [0 ; 1] qui, après l'application de la fonction de retouche g_1, permettrait de revenir aux nuances initiales.

a. Donner les valeurs de $g_2(0), g_2(1)\ et\ g_2\left(\frac{2}{3}\right)$.

b. Calculer $g_2\left(\frac{1}{6}\right)$.

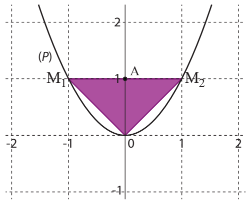
c. Résoudre l'équation de la variable x, $g_1(x) = y$, avec $x \in$ [0 ; 1] et $y \in$ [0 ; 1].
En déduire l'expression de la fonction de retouche g_2 qui, après l'application de la fonction de retouche g_1, permet de revenir aux nuances initiales.

CORRECTION, CAEN 2016

Premier exercice Académique

Olympiades mathématiques, S

Partie A - Quelques exemples



a) Voir ci-contre.

b) On vérifie que $\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 = \left(\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 = \dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$ pour justifier l'appartenance à (P).

Partie B - Avec un cercle

1. Soit $\mathrm{M}(x;y)$ un point quelconque du plan.
M appartient au cercle $\mathscr{C}$ si et seulement si $AM^2 = r^2$. Autrement dit : M appartient au cercle $\mathscr{C}$ si et seulement si $x^2+(y-1)^2 = r^2$
M appartient au cercle $\mathscr{C}$ si et seulement si $x^2+y^2-2y+1 = r^2$.
2. $\mathrm{M}(x\,;y)$ appartient à la fois au cercle $\mathscr{C}$ et à la parabole (P) si et seulement si :

$$\left\{\begin{array}{rcl} y & = & x^2 \\ x^2+y^2-2y+1 & = & r^2) \end{array}\right.$$

Autrement dit $\mathrm{M}(x\,;y)$ appartient à la fois au cercle $\mathscr{C}$ et à la parabole (P) si et seulement si

$$\left\{\begin{array}{rcl} y & = & x^2 \\ y^2-y+1-r^2 & = & 0) \end{array}\right.$$

La résolution de ce système permet d'obtenir les coordonnées des points M et M' sur la parabole (P) tels que AMM' soit isocèle.
3. a) et b) On considère l'équation : $y^2-y+1-r^2 = 0\,;\, \Delta = 4r^2-3$.

Si $r < \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ (figure 1), pas de solution.

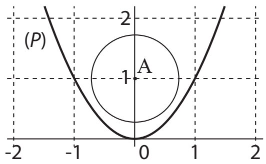


Figure 1

Si $r = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ (figure 2), une unique solution : $y = \dfrac{1}{2}$.

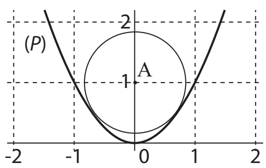


Figure 2

Si $r > \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ (figures 3, 4, 5) deux solutions envisageables données par $y = \dfrac{1 \pm \sqrt{4r^2-3}}{2}$. L'étude du signe de ces solutions amènera à distinguer les cas $r \leqslant 1$ et $r > 1$.

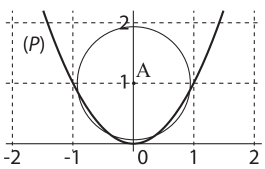


Figure 3

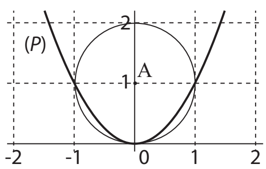


Figure 4

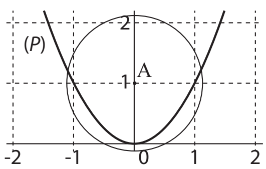


Figure 5

4. **Cas général : on suppose dans la suite que** : $r \geqslant \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

   a) M(x ;y), M'(x' ; y') appartiennent à la fois à $\mathscr{C}$ et (P) et sont symétriques par rapport à l'axe des ordonnées. On a donc les relations : $y = x^2$, $y' = x?^2$, $y = y'$ et $x = -x'$.
   Le théorème de Pythagore ou le produit scalaire permettent d'obtenir l'égalité souhaitée :$y^2 - 3y + 1 = 0$.

   b) Si $\boldsymbol{r} > \mathbf{1}$, alors l'équation $y^2 - y + 1 - r^2 = 0$ possède une unique solution positive : $y = \dfrac{1+\sqrt{4r^2-3}}{2}$.
   La résolution de l'équation $y = x^2$ donnera deux solutions opposées pour x, soient deux points M et M' qui vérifient les conditions de la question 5.a. et après résolution de l'équation du second degré $y^2 - 3y + 1 = 0$, on obtient $y = \dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$ et donc $x = \pm\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.
   Réciproquement, on sait que cette solution convient d'après la Partie A. b.

   Si $\boldsymbol{r}$= 1, la résolution du système de la question 2 donne trois points solutions M_1(0 ;0), M_2(1 ;1) et M_3(-1 ;1) qui correspondent aux deux triangles de la partie A. a. (figure 4)

   Si $r \in \left]\dfrac{\sqrt{3}}{2}\ ;\ 1\right[$, alors $\Delta > 0$ et $\sqrt{4r^2-3} \leqslant 1$ donc l'équation $y^2 - y + 1 - r^2 = 0$ possède deux solutions y strictement positives donnant chacune deux valeurs opposées pour x.
   On vérifie (Pythagore, considérations géométriques,...) qu'aucun des quatre triangles ne convient.

   Enfin, si $\boldsymbol{r}$= $\dfrac{\boldsymbol{\sqrt{3}}}{\mathbf{2}}$, alors $y = \dfrac{1}{2}$ et $x = \pm\dfrac{1}{\sqrt{2}} = \pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.
   On vérifie que le triangle AMM' avec M $\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\ ;\ \dfrac{1}{2}\right)$ et M' $(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\ ;\ \dfrac{1}{2})$ convient (figure 2).

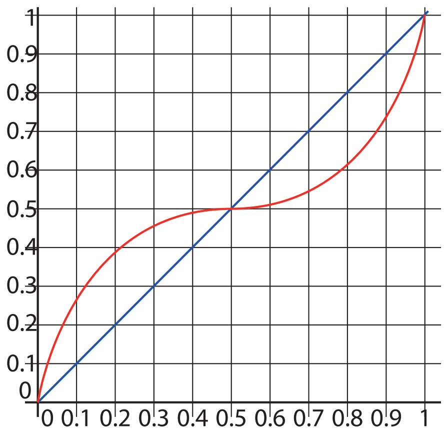
CORRECTION, CAEN 2016

Second exercice Académique

Olympiades mathématiques, S

Partie A

1. On considère la fonction f_1 définie sur l'intervalle $[0\,;\,1]$ par $f_1(x) = 4x^3 - 6x^2 + 3x$. Sa courbe représentative est donnée ci-contre.



a) Démontrer que la fonction f_1 est une fonction de retouche.
$f_1(0) = 0\,;\, f_1(1) = 1$.
De plus f_1 est dérivable sur l'intervalle $[0\,;\,1]$ et $f_1'(x) = 12x^2 - 12x + 3 = 3(2x-1)^2$.
$f_1'(x) \geqslant 0$,pour tout x de l'intervalle $[0\,;\,1]$.
f_1 est donc croissante sur l'intervalle $[0\,;\,1]$.
La fonction f_1 est donc une fonction de retouche.

b) À l'aide du graphique, les nuances codées x appartenant à l'intervalle $[0{,}5\,;\,1]$ seront assombries par la fonction f_1.

c) Pour x appartenant à l'intervalle $[0\,;\,1]$, $f_1(x) \leqslant x$ équivaut à : $4x^3 - 6x^2 + 3x \leqslant x$
$2x(2x^2 - 3x + 1) \leqslant 0$
$2x(2x-1)(x-1) \leqslant 0$
Or $x \in [0;1]$ donc $f_1(x) \leqslant x$ équivaut à : $2x - 1 \geqslant 0$, c'est–à–dire $x \in \left[\frac{1}{2}\,;\,1\right]$].
Conclusion : $S = \left[\frac{1}{2}\,;\,1\right]$.

2. a) Exemple de fonction de retouche f_2 définie sur $[0\,;\,1]$ éclaircissant toute nuance x appartenant à l'intervalle $[0\,;\,1]$: $f_2(x) = \sqrt{x}$.

b) Exemple de fonction de retouche f_3 définie sur $[0\,;\,1]$ assombrissant toute nuance x appartenant à l'intervalle $[0\,;\,1]$: $f_3(x) = x^2$.

Partie B

1. g_1 est une fonction polynôme du second degré donc $g_1(x) = ax^2 + bx + c$, avec x appartenant à l'intervalle $[0\,;\,1]$. g_1 est une fonction de retouche, donc $g_1(0) = 0$ et $g?_1(1) = 1$.
Ceci se traduit par $c = 0$ et $a + b = 1$
. Donc $g_1(x) = ax^2 + (1-a)x$.
De plus $g_1\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{2}{3}$.
Par conséquent $\frac{1}{4}a + \frac{1}{2}(1-a) = \frac{2}{3}$ c'est-à-dire $a = -\frac{2}{3}$.
Donc g_1 est définie sur $[0\,;\,1]$ par : $g_1(x) = -\frac{2}{3}x^2 + \frac{5}{3}x$.

2. On cherche maintenant une fonction de retouche g_2 définie sur $[0\,;\,1]$ qui, après l'application de la fonction de retouche g_1, permettrait de revenir aux nuances initiales.

a) $g_2(0) = 0, g_2(1 = 1)$ et $g_2\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{1}{2}$.

b) $g_2\left(\frac{1}{6}\right)$ équivaut à $-\frac{2}{3}x^2 + \frac{5}{3}x = \frac{1}{6}$
ou encore : $4x^2 - 10x + 1 = 0$. $\Delta = 84$.
Deux solutions : $\frac{5-\sqrt{21}}{4}$ et $\frac{5+\sqrt{21}}{4}$, mais seule la première appartient à l'intervalle $[0\,;\,1]$.
Par conséquent $g_2\left(\frac{1}{6}\right) = \frac{5-\sqrt{21}}{4}$.

c) Pour $x \in [0;1]$ et $y \in [0;1]$:
$g_1(x) = y$ équivaut à $-\frac{2}{3}x^2 + \frac{5}{3}x = y$.
ou encore : $2x^2 - 5x + 3y = 0$. $\Delta = 25 - 24y$.
Comme $y \in [0;1]$, $\Delta > 0$.

Donc deux solutions : $\dfrac{5-\sqrt{25-4y}}{4}$)/4 et $\dfrac{5+\sqrt{25-4y}}{4}$, mais seule la première appartient à l'intervalle $[0\,;\,1]$.
On en déduit l'expression de la fonction de retouche g_2 qui, après l'application de la fonction de retouche g_1, permet de revenir aux nuances initiales :
$g_2(x) = \dfrac{5-\sqrt{25-4y}}{4}$ et on peut vérifier que c'est bien une fonction de retouche.