SUJET + CORRIGÉ

OLYMPIADES DE MATHÉMATIQUES

ACADÉMIE DE ROUEN

Classes de première S • 2013

OLYMPIADES ACADÉMIQUES DE MATHÉMATIQUES

Classes de premières (séries S et STI2D)

Concours 2013

♦ ♦ ♦

Mercredi 20 Mars 2013

Durée de l'épreuve : 4 heures.
Les calculatrices sont autorisées.

♦ ♦ ♦

Les quatre exercices sont à traiter. Les candidats sont invités à faire figurer sur les copies les résultats, même partiels, auxquels ils sont parvenus et les idées qui leur sont venues.

Exercice numéro 1 : les nombres Harshad

Un entier naturel non nul est un **nombre Harshad** s'il est divisible par la somme de ses chiffres.

Par exemple, $n = 24$ est un nombre Harshad car la somme de ses chiffres est $2 + 4 = 6$, et 24 est bien divisible par 6.

1. a. Montrer que 364 est un nombre Harshad.

b. Quel est le plus petit entier qui ne soit pas un nombre Harshad ?

2. a. Donner un nombre Harshad de 4 chiffres.

b. Soit n un entier non nul. Donner un nombre Harshad de n chiffres.

3. a. Montrer que 110, 111, 112 forment une liste de trois nombres Harshad consécutifs.

b. En insérant judicieusement le chiffre 0 dans l'écriture décimale des nombres précédents, construire une autre liste de trois nombres Harshad consécutifs.

c. Justifier l'existence d'une infinité de listes de trois nombres Harshad consécutifs.

4. a. Soit $A = 30 \times 31 \times 32 \times 33$. Calculer la somme des chiffres de A.

b. En déduire que 98 208 030, 98 208 031, 98 208 032 et 98 208 033 forment une liste de quatre nombres Harshad consécutifs.

c. Justifier l'existence d'une infinité de listes de quatre nombres Harshad consécutifs.

5. a. En s'inspirant de la question 4, trouver une liste de cinq nombres Harshad consécutifs.

b. Justifier l'existence d'une infinité de listes de cinq nombres Harshad consécutifs.

6. a. Soit i un chiffre compris entre 0 et 8.

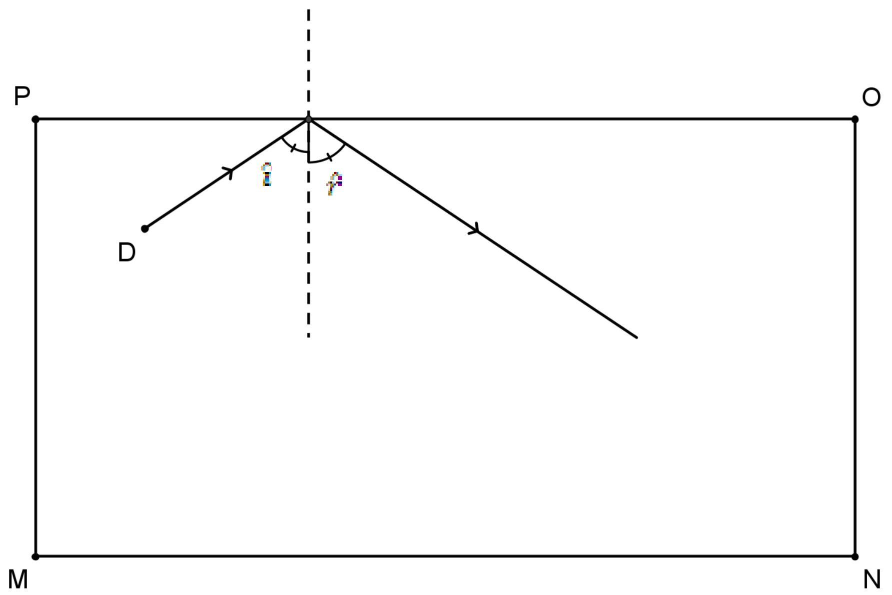
Soit p un entier dont le chiffre des dizaines est i et le chiffre des unités est 9.

Montrer que, soit la somme des chiffres du nombre p, soit celle de $p + 2$ est un nombre pair.
En déduire que p et $p + 2$ ne peuvent pas être tous les deux des nombres Harshad.

b. Existe-t-il une liste de 22 nombres Harshad consécutifs ?

Exercice numéro 2 : le billard rectangulaire

On considère un billard de forme rectangulaire, de longueur 300 cm et de largeur 160 cm dont les boules sont assimilées à des points.
Entre deux rebonds toutes les trajectoires sont rectilignes.
Lorsque la boule atteint l'un des bords (rails) du billard, elle y rebondit suivant les règles de la physique des chocs élastiques : l'angle d'incidence $\hat{\imath}$ étant égal à l'angle de réflexion $\hat{r}$, comme sur la figure ci-dessous ($\hat{\imath} = \hat{r}$)



1. On frappe une boule placée au milieu du rail [MN].

a. Quel point du rail [PO] peut-on viser pour que la boule atteigne le point N en une bande (c'est-à-dire avec un seul rebond) ?

b. Quel point du rail [PO] peut-on viser pour que la boule atteigne en une bande le milieu du rail [NO] ?

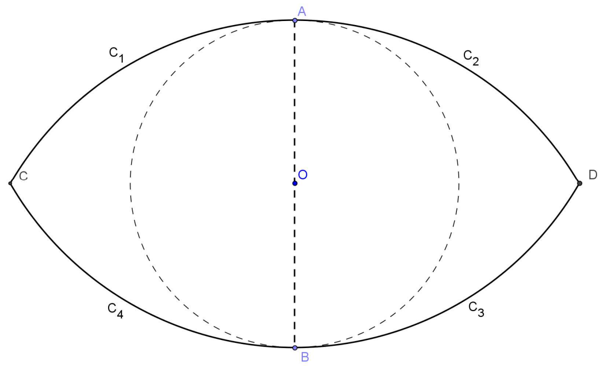
c. Quel point du rail [NO] peut-on viser pour que la boule revienne à son point de départ en trois bandes (c'est-à-dire après exactement trois rebonds) ?

2. On frappe une boule placée en un point quelconque du rail [MN].

a. Est-il possible d'atteindre en une bande n'importe quelle boule placée sur la surface de jeu ?

b. Est-il toujours possible de la frapper de sorte qu'elle revienne en trois bandes à son point initial ?

Exercice numéro 3 : Lancer de fléchettes et triangle acutangle



On considère la cible particulière suivante :
La hauteur [AB] de la cible mesure $2a$.

C_1 et C_2 forment un arc de cercle de centre B et de rayon $2a$.
C_3 et C_4 forment un arc de cercle de centre A et de rayon $2a$.

La cible est constituée de deux zones :
- une zone circulaire centrale représentée par un disque de centre O et de rayon a, rapportant 5 points.
- la zone restante, rapportant 10 points.

Un joueur lance au hasard une fléchette sur cette cible. On note F le point d'impact de la fléchette.

Problème : On cherche à déterminer la probabilité p que le triangle ABF ainsi formé soit **acutangle**.
(*On appelle triangle acutangle un triangle dont tous les angles sont aigus).*

Partie A
1. Expliquer le lien entre le problème et la présence de la zone à 5 points.
2. Exprimer la probabilité q que le triangle ABF ne soit pas acutangle sous forme d'un rapport d'aires.
3. En déduire p. Cette probabilité dépend-elle de a ?

Partie B
On choisit désormais $a = 1$ et on se place dans un repère orthonormé $(O ; \vec{u} ; \vec{v})$ tel que $\vec{v} = \overrightarrow{OA}$.
On note $(x ; y)$ les coordonnées du point F dans ce repère.

1. Justifier que $-\sqrt{3} \leq x \leq \sqrt{3}$ et $-1 \leq y \leq 1$.
2. Démontrer que F appartient à la cible si et seulement si : $x^2 + (y+1)^2 \leq 4$ et $x^2 + (y-1)^2 \leq 4$.
3. On considère l'algorithme suivant :

```
Choisir n
CompteurA ← 0
CompteurB ← 0
    Pour i allant de 1 à n
     x ← réel aléatoire compris entre – √3 et √3
     y ← réel aléatoire compris entre – 1 et 1
        Si (x² + (y + 1)²  ≤ 4) et  (x² + (y – 1)² ≤ 4), alors
            CompteurA ← CompteurA  + 1
            Si ……………………………….., alors
            CompteurB ←  CompteurB  + 1
            FinSi
        FinSi
    FinPour
f ← ………………………………..
Afficher f
```

Compléter les pointillés ci-dessus de telle sorte que l'algorithme puisse être utilisé afin d'obtenir une estimation de la probabilité p.

Exercice numéro 4 : Les osselets

Le jeu des osselets remonte à l'Antiquité grecque et se pratique à l'aide de plusieurs osselets, à l'origine des petits os (astragales) des pattes avant du mouton ou de la chèvre.

Un osselet présente quatre faces d'un aspect différent :
- des deux plus larges faces, l'une est convexe (bombée), l'autre concave (creuse).
- des deux plus étroites, l'une est plate, l'autre sinueuse.

Suivant le rapport des auteurs de l'Antiquité, à chacune de ces faces était associée une valeur numérique :
la face plate correspondait à la valeur 1, la face concave à la valeur 3, la face convexe à la valeur 4 et la face sinueuse à la valeur 6.

1. Étude d'un osselet

Notons p_1, p_3, p_4 et p_6 les probabilités d'obtenir respectivement les valeurs 1, 3, 4 et 6 lorsqu'on lance un osselet. Des expériences statistiques ont permis d'établir que $p_1 = p_3$, $p_4 = p_6$ et $p_1 = 4p_4$.

Calculer les probabilités élémentaires associées aux quatre faces.

2. Lancer de quatre osselets

En Grèce, quatre osselets étaient utilisés pour jouer. Les jeunes joueurs romains les lançaient simultanément et tentaient de réaliser des combinaisons de coups, repérées par des noms (Aphrodite, Midas, Chevelure de Bérénice, Stésichore, etc.)

Le plus mauvais coup, appelé « le coup du chien », consistait à obtenir quatre faces numérotées 1.
Le plus heureux des coups avait pour nom «le coup de Vénus » : il correspondait au cas où l'on obtient le 1, le 3, le 4 et le 6.

a. Vérifier que, si l'on lance simultanément quatre osselets, il y a 35 combinaisons de coups possibles.

b. Quelle est la probabilité d'obtenir « le coup du chien » ?

c. Quelle est la probabilité d'obtenir le coup constitué de trois 1 et d'un 3 ?

d. Le coup de Stésichore est un coup dont la somme des valeurs des faces est 8.

Quelle est la probabilité d'obtenir ce coup en jetant simultanément les quatre osselets ?

Exercice numéro 3 : Lancer de fléchettes et triangle acutangle
CORRECTION

Partie A :

1. Le disque de centre O et de rayon a correspond à l'ensemble des points F pour lesquels le triangle ABF n'est pas acutangle.
2. q = Aire (disque)/Aire (cible).
3. Aire (cible) = 2 × Aire (portion_ADB), c'est-à-dire : 2× (2 × aire (arc_de_disque_ABD) − aire (triangle_ABD)).

   Aire (cible) $= 2a^2\left(\dfrac{4\pi}{3} - \sqrt{3}\right)$

   Donc $q = \dfrac{\pi a^2}{2a^2\left(\dfrac{4\pi}{3} - \sqrt{3}\right)}$, puis $p = 1 - q$, soit environ 0,36.

Partie B :

1. $\sqrt{3}$ est la demi-longueur de la cible.
2. C appartient à la cible si et seulement si : $AF \leqslant 2a$ et $BF \leqslant 2a$,
   Autrement dit : $x^2 + (y+1)^2 \leqslant 4$ et $x^2 + (y-1)2 \leqslant 4$.
3. Par exemple :

```
Choisir n
CompteurA ← 0
CompteurB ← 0
        Pour i allant de 1 à n
        x ← réel aléatoire compris entre −√3 et √3
        y ← réel aléatoire compris entre −1 et 1
                Si (x² + (y + 1)² ⩽ 4) et (x² + (y − 1)² ⩽ 4) alors
                        CompteurA ← CompteurA+1
                        Si [x² + y² > 1] , alors
                        CompteurB ← CompteurB + 1
                        FinSi
                FinSi
        FinPour
f ← compteurB/compteurA
Afficher f
```

   CompteurA compte le nombre de points dans la cible.
   CompteurB compte le nombre de points dans la zone où le triangle ABF est acutangle.
   L'algorithme affiche alors une estimation de p.

Exercice numéro 4 : Les osselets
CORRECTION

1. **Étude d'un osselet**
   $p_1 + p_3 + p_4 + p_6 = 1$ puis $4p_4 + 4p_4 + p_4 + p_4 = 1$

   Donc $p_4 = p_6 = \dfrac{1}{10}$ et $p_1 = p_3 = \dfrac{4}{10}$.
2. **Lancer de quatre osselets**
   a) Liste de ces combinaisons : 1111, 1113, 1114, 1116, 1133, 1134, 1136, 1144, 1146, 1166, 1333, 1334, 1336, 1344, 1346, 1366, 1444, 1446, 1466, 1666, 3333, 3334, 3336, 3344, 3346, 3366, 3444, 3446, 3466, 3666, 4444, 4446, 4466, 4666, 6666

   b) Le coup du chien s'obtient grâce au tirage 1111. Sa probabilité est donc :
   $(p_1)^4 = \dfrac{4^4}{10^4} = \dfrac{16}{625} = 0,0256.$

   c) Il y a 4 possibilités : 1113, 1131, 1311 et 3111.
   Donc la probabilité d'obtenir le coup constitué de trois 1 et d'un 3 vaut :
   $4 \times (p_1)^3 \times p_3 = 4 \times \dfrac{4^4}{10^4} = \dfrac{64}{625} = 0,1024.$

   d) On a $8 = 1 + 1 + 3 + 3$.
   Il y a 6 façons (équiprobables) de le réaliser : 1133, 1313, 1331, 3113, 3131, 3311. La probabilité du coup de Stésichore est donc : $6 \times \dfrac{4^4}{10^4} = \dfrac{96}{625} = 0,1536.$