SUJET + CORRIGÉ

OLYMPIADES DE MATHÉMATIQUES

ACADÉMIE DE ROUEN

Classes de première S • 2011

académie
Rouen

MINISTÈRE DE
L'ÉDUCATION NATIONALE,
DE LA JEUNESSE
ET DE LA VIE ASSOCIATIVE

MINISTÈRE DE
L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR
ET DE LA RECHERCHE

OLYMPIADES ACADÉMIQUES DE MATHÉMATIQUES

Classes de premières (séries S et STI)

Concours 2011

♦ ♦ ♦

Mercredi 23 Mars 2011

Durée de l'épreuve : 4 heures.
Les calculatrices sont autorisées.

♦ ♦ ♦

Les quatre exercices sont à traiter. Les candidats sont invités à faire figurer sur les copies les résultats, même partiels, auxquels ils sont parvenus et les idées qui leur sont venues.

Exercice numéro 1

Les essuie-glaces

(*Les parties 1, 2 et 3 sont indépendantes*)

On se propose de calculer l'aire de la surface essuyée par plusieurs modèles de balais d'essuie-glace d'un véhicule. On considèrera que les pare-brises sont des surfaces planes.

1. Un premier véhicule est équipé d'un seul balai porté par une tige métallique de 60 cm, modélisée par un segment [OB]. Soit A le point de [OB] tel que OA = 15 cm. Le balai en caoutchouc est alors modélisé par le segment [AB] (*voir figure 1 ci-dessous*).

   Déterminer la valeur exacte de l'aire de la surface essuyée par le balai, en admettant que celui ci décrit autour du point O un angle de 180°. En donner la valeur arrondie au cm^2.

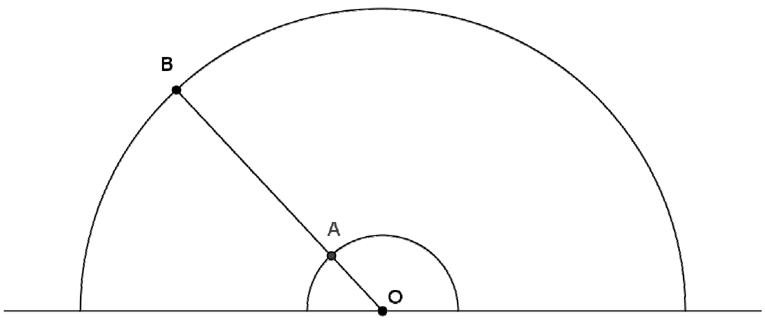


Fig. 1

2. Le pare-brise d'un second véhicule possède deux essuie-glaces modélisés par deux segments [OB] et [O'B'] de même longueur R, l'un tournant autour d'un point O, l'autre autour d'un point O', tels que OO' = R (*voir figure 2 ci-dessous*). Ces balais en caoutchouc couvrent la longueur totale de chaque segment. L'extrémité de chaque segment décrit un demi-cercle au-dessus de la droite (OO').
   Déterminer l'aire de la surface du pare-brise essuyée par les balais.

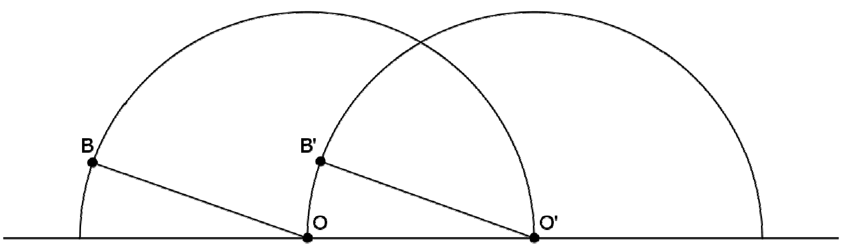


Fig. 2

3. Un troisième véhicule est équipé d'un essuie-glace dont le support métallique est modélisé par la réunion de deux segments (voir la figure 3 ci-dessous) : un segment [AB], qui porte le balai en caoutchouc sur toute sa longueur, et un segment [OC] qui relie le centre de rotation O à un point C du segment [AB] tels que $\widehat{OCA} = 30°$, CB = 4 CA et $OC = \sqrt{3} \times CA$. On pose CA = *a*.

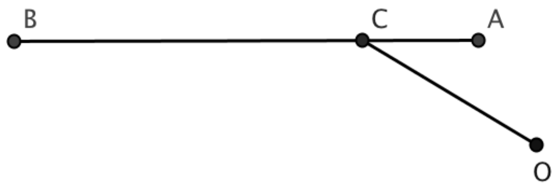


Fig. 3

a. Démontrer que le triangle AOC est isocèle.
b. Lorsqu'il essuie le pare-brise du véhicule, l'essuie-glace tourne autour du point O. En début de course le balai en caoutchouc est en position horizontale : les points A, B et C coïncident respectivement avec les points M, N et P du pare-brise tels que [MN] est horizontal (*voir la figure 4 ci-dessous*). En fin de course A, B, C coïncident respectivement avec les points M', N' et P' du pare-brise tels que le segment [OM'] est horizontal.

Déterminer l'angle dont a tourné le dispositif autour du point O pour passer d'une position à l'autre, puis exprimer en fonction de *a* l'aire de la surface essuyée par le balai.

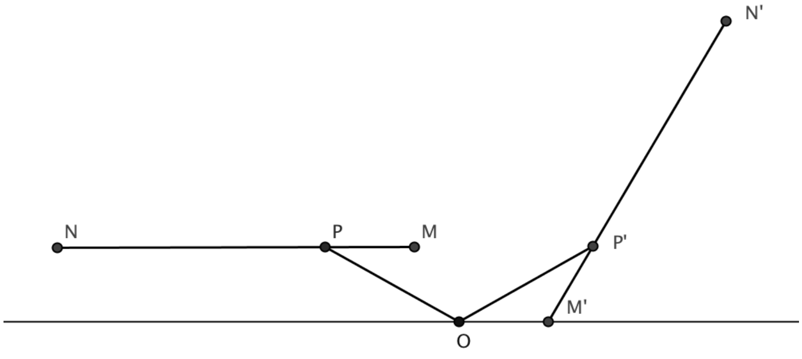


Fig. 4

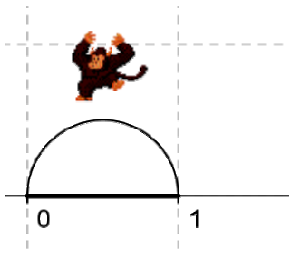
Exercice Numéro 2

Le singe sauteur

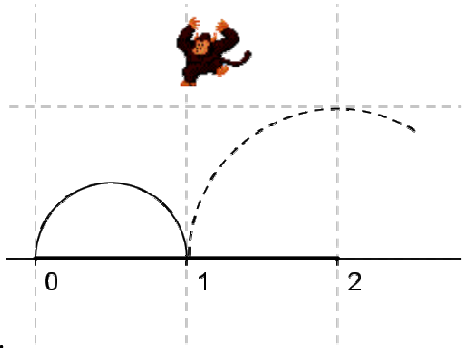
J'ai un petit singe sauteur qui passe son temps à faire des bonds sur une demi-droite graduée en choisissant d'aller vers l'avant ou vers l'arrière.

Le nombre *n* est dit ***atteignable*** si le singe peut, en partant de l'**origine** (position d'abscisse 0), atteindre la position d'abscisse *n* en **exactement** *n* bonds successifs (en avant ou en arrière) de longueurs 1, 2, …, *n* (**effectués** dans cet ordre) et sans **jamais** sortir du segment [0 ; *n*].

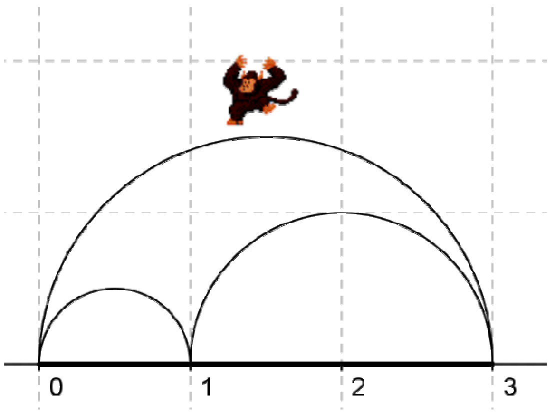
Par exemple : Le nombre 1 est atteignable en un bond.



Mais le nombre 2 ne l'est pas car, après avoir fait le bond de longueur 1 (qu'il est obligé de faire vers l'avant), s'il fait un bond de longueur 2 en avant ou en arrière il sort de l'intervalle [0 ; 2].



Le nombre 3 n'est pas atteignable pour une autre raison : après avoir fait un bond de longueur 1 et un autre de longueur 2 vers l'avant, il est obligé de faire un bond de longueur 3 vers l'arrière (sinon il sort de l'intervalle [0 ; 3]) et se trouve sur le nombre 0 au lieu de 3.



Questions

1. Montrer que le nombre 4 est atteignable et ceci d'une seule façon.
2. Montrer que le nombre 5 n'est pas atteignable.

On peut montrer de la même façon que les nombres 6, 7 et 8 ne sont pas atteignables ; *ce résultat est admis*.

3. Le nombre 9 est-il atteignable ?

Pour la suite, on rappelle que, pour tout nombre entier *m*, on a : $1+2+3+....+m=\dfrac{m(m+1)}{2}$.

4. Montrer que tous les nombres entiers qui sont des carrés sont atteignables.

5.
   a. Montrer que si le nombre entier *n* est atteignable alors le produit $n(n-1)$ est divisible par 4. En déduire une condition sur l'entier *n* pour qu'il soit atteignable.
   b. La réciproque de cette proposition est-elle vraie ?

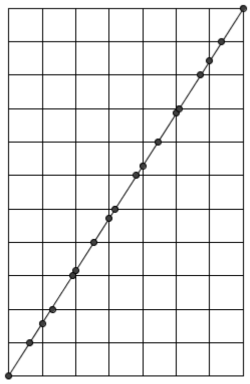
6. On suppose N $\geq$ 6 et atteignable par une séquence qui commence par 1+2+3 … Montrer que N+4 est aussi atteignable.

Exercice Numéro 3

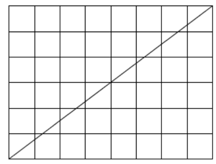
Plage et parasols

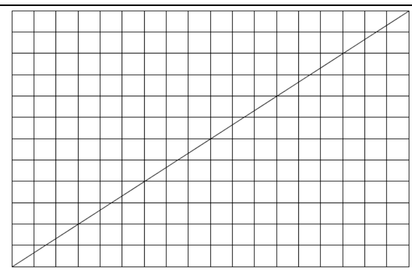
1. On donne un quadrillage constitué de carrés identiques à l'intérieur d'un rectangle.
On considère une diagonale du rectangle. En s'inspirant de l'exemple ci-dessous, recopier et compléter, pour les rectangles 1 et 2, les tableaux suivants :

Exemple



Dimensions (en nombre de carrés)	7 carrés sur 11
Nombre de sommets rencontrés	2 (les extrémités de la diagonale)
Nombre de carrés traversés	17

Rectangle 1	
Dimensions (en nombre de carrés)	
Nombre de sommets rencontrés	
Nombre de carrés traversés	

Rectangle 2	
Dimensions (en nombre de carrés)	
Nombre de sommets rencontrés	
Nombre de carrés traversés	

2. Un club de vacances souhaite aménager la plage artificielle qui borde sa piscine.
La plage, qui peut-être découpée en 2009 parcelles carrées de côté 1 unité de longueur, forme un rectangle BEAU.

a. Déterminer les dimensions possibles du rectangle constitué par la plage.

b. Un marchand ambulant souhaite parcourir la plage en ligne droite du point A au point B.
Lorsque son trajet ne rencontre pas une parcelle ou ne la rencontre qu'en un sommet, on considère que le marchand ne traverse pas cette parcelle.
Dans le cas de ce rectangle BEAU, combien de parcelles sera-t-il amené à traverser ?

c. La plagiste souhaite disposer un parasol à chaque sommet des parcelles formant la plage, à l'exception du point A. Les parasols sont tous de la même forme et plantés de la même façon.

c.1. Combien faut-il de parasols pour une plage de 2009 parcelles ?
c.2. La plagiste se tient debout au point A.
Elle voit tous les parasols de la plage, sauf ceux qui sont parfaitement plantés sur la diagonale partant de A et cachés derrière le premier parasol visible de la diagonale.
Combien voit-elle de parasols ?

Exercice Numéro 4

Fort de café

Tous les matins, Maël boit un café à la gare dans un gobelet en carton recyclé.

1. Le stand de boissons auprès duquel il se fournit possède une machine à café capricieuse. Chaque jour, Maël relève la qualité du café qui lui a été distribué par cette machine. Au bout de 100 visites, il obtient les résultats suivants :

   - les cafés sont trop chauds dans 20 % des cas.

   - 1 fois sur 20, du marc de café s'est infiltré dans le gobelet.

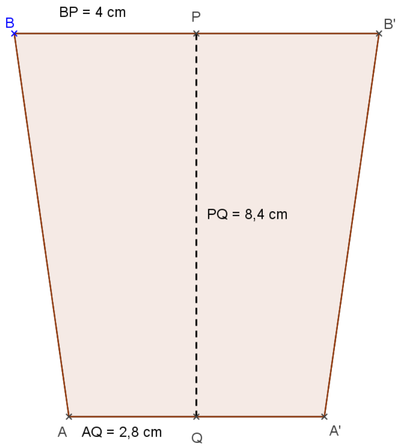
   - dans 23 % des cas, cette machine distribue un café qui déplait à Maël c'est-à-dire trop chaud ou contenant du marc.

   a. Recopier et compléter le tableau suivant :

Café	*Température convenable*	*Café trop chaud*	*Total*
Contient du marc			
Ne contient pas de marc			
Total			*100*

   b. Maël considère que cet échantillon de 100 cafés permet de modéliser la production de cette machine.
   On suppose que le choix d'un café se fait dans une situation d'équiprobabilité.
   Quand Maël trouve du marc dans un café trop chaud, il décide de ne pas le boire.
   Quelle est la probabilité que Maël ne boive pas son café ?

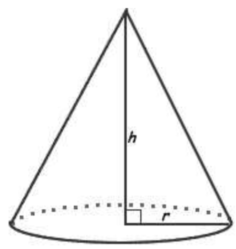
2. Ce matin, Maël a décidé de ne pas boire son café. Il s'intéresse alors au gobelet qu'il tient entre les mains.
   Ce gobelet est un cône tronqué. Il mesure 8,4 cm de haut et les cercles qui le délimitent ont pour rayons respectifs 4 cm pour l'ouverture du haut, 2,8 cm pour le fond. On estime à 20 cL le volume de café versé par la machine dans ce gobelet.



Gobelet vu de face

Rappels

- volume d'un cône



Volume $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$

- un décimètre cube équivaut à 1 litre.

Calculer le pourcentage du volume du gobelet qu'occupe le café.

Exercice numéro 3 : Plage et parasols
CORRECTION

1. Rectangle 1 : 8 carrés sur 6 ; 3 sommets rencontrés ; 12 carrés traversés
   Rectangle 2 : 18 carrés sur 12 ; 7 sommets rencontrés ; 24 carrés traversés.
2. a. $2009 = 7 \times 7 \times 41$;
   les dimensions possibles du rectangle sont donc : 1 sur 2009 ; 7 sur 287 ; 41 sur 49.
   b. Le nombre de parcelles traversées est égal à la somme du nombre de carrés sur chaque dimension du rectangle BEAU, en enlevant 1 à chaque fois que l'on on passe par un sommet de carré (sauf le sommet de départ).
   Il y a $\text{pgcd}(n\,;\,p)$ nœuds du quadrillage sur la diagonale (y compris le point B, sans compter A).
   Donc, si la plage mesure n sur p, le marchand va donc croiser $n + p - \text{pgcd}(n; p)$ parcelles :
   Cas 1 : $1 + 2009 - 1 = 2009$ parcelles ;
   Cas 2 : $7 + 287 - 7 = 287$ parcelles ;
   Cas 3 : $41 + 49 - 1 = 89$ parcelles.
   c. Si la plage mesure n sur p, il y a $(n+1)(p+1)$ nœuds dans ce quadrillage. On enlève le parasol de A : il reste donc $(n + 1)(p + 1) - 1$ parasols.
      1. Pour une plage de 2009 parcelles, il faut donc :
         Cas 1 : $2 \times 2010 - 1 = 4019$ parasols ;
         Cas 2 : $8 \times 288 - 1 = 2303$ parasols ;
         Cas 3 : $42 \times 50 - 1 = 2099$ parasols.
      2. On enlève tous les parasols cachés derrière le premier sur la diagonale. Il y a $\text{pgcd}(n\,;\,p)$ nœuds du quadrillage sur la diagonale (y compris le point B, sans compter A).
         Il y a donc $(\text{pgcd}(n; p) - 1)$ parasols cachés sur la diagonale (car la plagiste voit le premier parasol)
         Par conséquent, la plagiste peut voir $(n+1)(p+1)-1-(\text{pgcd}(n; p)-1)$ parasols c'est-à-dire $(n + 1)(p + 1) - \text{pgcd}(n; p)$ parasols.
         Cas 1 : $2 \times 2010 - 1 = 4019$ parasols ;
         Cas 2 : $8 \times 288 - 7 = 2297$ parasols ;
         Cas 3 : $42 \times 50 - 1 = 2099$ parasols.

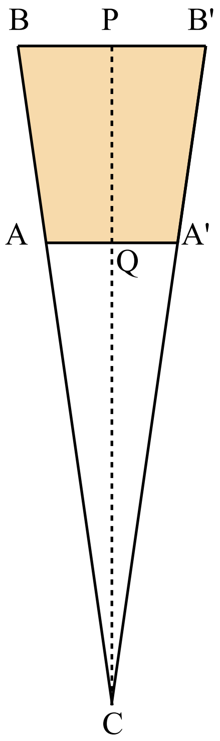
Exercice numéro 4 : Fort de café
CORRECTION

1. a.

Café	*Température convenable*	*Café trop chaud*	*Total*
Contient du marc	3	2	5
Ne contient pas de marc	77	18	95
Total	80	20	100

b. La probabilité de ne pas boire le café est donc de 0,02.

2.



$CQ = 19,6$ cm donc $CP = 28$ cm
Donc le volume V du gobelet est :

$V = \dfrac{1}{3}\pi\left(4^2 \times 28 - 2,8^2 \times 19.6\right)$ soit environ 30,8 cL.

Le café occupe donc environ 65% du gobelet.