SUJET + CORRIGÉ

OLYMPIADES DE MATHÉMATIQUES

ACADÉMIE DE RENNES

Classes de première S • 2014

OLYMPIADES ACADÉMIQUES DE MATHÉMATIQUES

ACADÉMIE DE RENNES

SESSION 2014

CLASSE DE PREMIÈRE

DURÉE : 4 heures

Ce sujet s'adresse à tous les élèves de première, quelle que soit leur série.

Il comporte quatorze pages et cinq exercices.
Les annexes situées en pages 13 et 14 sont à rendre avec la copie.

Chaque élève traitera quatre exercices dans l'ordre de son choix conformément aux dispositions ci-dessous :

- ***Tous les candidats traiteront les exercices 1, 4 et 5,***
- ***Les candidats des séries autres que S et STI traiteront en plus l'exercice 2,***
- ***Les candidats des séries S et STI traiteront en plus l'exercice 3.***

*Il est à noter qu'au niveau de chaque exercice, **toute trace de recherche, même incomplète, d'initiative même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.***

Les calculatrices sont autorisées conformément à la réglementation en vigueur.

<u>EXERCICE 1</u> (Académique - pour toutes séries)

LA PÉTANQUE BRETONNE

Règle du jeu :

Le jeu se joue un contre un. Chaque joueur a 3 palets.

On tire au hasard le premier lanceur. À tour de rôle, les joueurs lancent un palet à plat le plus près possible du phare quille sans le faire tomber.

Si un joueur fait tomber le phare quille, il perd 1 point, l'autre n'en marque pas, et la partie est terminée. Sinon le gagnant marque autant de points qu'il a de palets mieux placés que le meilleur palet de l'équipe adverse.

Ainsi, sur une partie le gagnant obtient soit 0, 1, 2 ou 3 points (on suppose qu'il n'y a jamais égalité sur une partie). Le gagnant recommence à jouer pour la partie suivante. Il faut totaliser un minimum de 15 points pour gagner une manche.

I) Paul et Martine jouent à la pétanque bretonne. Paul est le gagnant de la première manche sur le score de 15 contre 11. Il n'y a pas eu de phare quille renversé durant cette manche, et les joueurs ont effectué 15 parties. Paul en a gagné 6.

a. Montrer que Paul a gagné au moins trois parties à 3 points.

b. Écrire les possibilités de scores sur les parties remportées par Paul : nombre de parties à 3 points, nombre de parties à 2 points, et nombre de parties à 1 point (sans tenir compte de l'ordre d'obtention des points).

c. Montrer que Martine a gagné au moins 7 parties à 1 point.

d. Écrire les possibilités de scores sur les parties remportées par Martine (sans tenir compte de l'ordre).

II) Martine a remporté la deuxième manche sur le score de 15 contre 13. Chacun a gagné 8 parties. Il n'y a pas eu de phare quille renversé durant cette manche.

a. On note x le nombre de parties à 3 points remportées par Martine durant cette manche, y le nombre de parties à 2 points, et z le nombre de parties à 1 point. (x, y, z) est appelé un triplet.

1) Montrer que $2x + y = 7$.

2) En déduire tous les triplets (x, y, z) qui peuvent amener aux 15 points obtenus par Martine.

b. Déterminer, de façon analogue, tous les triplets (x', y', z') qui peuvent amener aux 13 points obtenus par Paul (x' le nombre de parties à 3 points remportées par Paul ...).

III) Généralisation du II).

Considérons maintenant une manche au cours de laquelle le phare quille n'est jamais tombé, et remportée en 15 points exactement par un joueur A. On peut reprendre les notations du I) et désigner par x le nombre de parties à 3 points remportées par A durant cette manche, y le nombre de parties à 2 points, et z le nombre de parties à 1 point.

a. Dans le cas où $x = 0$, écrire les 8 possibilités de couples (y, z).

b. Dénombrer tous les triplets (x, y, z) qui amènent aux 15 points pour le joueur A.

IV) Comme Martine et Paul ont gagné chacun une manche, ils décident de faire une manche décisive. Pour gagner du temps, ils ne font que deux parties. On considère que le phare quille peut tomber. Paul gagne cette manche décisive.

On décide de comptabiliser le nombre de façons différentes pour Paul de gagner cette manche, en tenant compte de l'ordre.

Voici quatre exemples de façons dont Paul peut remporter la manche décisive :

$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ Ceci signifie que Paul gagne la première partie avec 1 point et la seconde avec 2 points.

$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ Ceci signifie que Paul gagne la première partie avec 2 points et la seconde avec 1 point.

$\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$ Ceci signifie que Martine gagne la première partie avec 2 points et Paul la seconde avec 3 points.

$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$ Ceci signifie que Paul a fait tomber le phare quille à la première partie et a gagné la seconde avec 3 points.

a. Écrire, en suivant le modèle proposé, la liste de tous les cas possibles.

b. Paul a-t-il plus de chance d'avoir gagné cette manche décisive en ayant totalisé 2 points ou 3 points ?

<u>EXERCICE 2</u> (Académique - pour toute série <u>autre que</u> S et STI)

PAR 2, PAR 3, PAR 5, PAR 9...ENCORE PLUS FORT ? PAR 11 !

Olympe et Mat doivent travailler ensemble sur un défi lancé par leur professeur :

Défi : on sait tous reconnaître si un nombre est divisible par 2, par 3, par 5 ou par 9 grâce à des critères simples. Je sais aussi reconnaître si un nombre est divisible par 11 sans utiliser la calculatrice. Et vous ?

Olympe et Mat commencent leur recherche chacun dans leur coin.
Tout à coup, Olympe s'écrie : « J'ai une idée. »
Mais elle veut ménager le suspense et ne pas tout lui dévoiler immédiatement. Elle lui raconte sa démarche.

Partie A

1. « J'ai effectué les produits suivants : 11×11 ; 34×11 ; 24×11, 54×11 ; 38×11 et 64×11 et j'ai fait un constat. Trouveras-tu la même chose que moi ? »

Mettez-vous à la place de Mat et retrouvez le constat d'Olympe. Émettez alors une conjecture.

2. En écriture décimale, un nombre à deux chiffres s'écrit $\overline{ab}$ où a et b sont deux entiers naturels compris entre 0 et 9.

La valeur de $\overline{ab}$ est alors $\overline{ab} = a \times 10 + b$ avec a qui représente le chiffre des dizaines et b qui représente le chiffre des unités.

Ainsi le nombre 25 s'écrit $\overline{25} = 2 \times 10 + 5$.

Donnez la valeur de la multiplication de $\overline{ab}$ par $\overline{11}$ et justifiez ainsi votre conjecture (on pourra montrer que $\overline{ab} \times \overline{11} = a \times 100 + (a + b) \times 10 + b$).

3. Est-ce que l'on peut étendre ce résultat à tout nombre à trois chiffres $\overline{abc}$ où a, b et c sont des entiers naturels compris entre 0 et 9 ($\overline{abc} = a \times 100 + b \times 10 + c$) ? Justifiez votre réponse.

Partie B

Olympe et Mat commencent par regarder les nombres à trois chiffres. On les notera $\overline{abc}$ où a, b et c sont des entiers naturels compris entre 0 et 9.

1. Mat dit alors à Olympe : « Ça y est, j'ai trouvé le critère de divisibilité par 11 ! C'est facile, il te suffit d'observer que 110, 374, 594, 154, 781, 352, 242 et 231 sont des nombres divisibles par 11. »

a) Qu'a-t-il ainsi pu proposer comme critère de divisibilité par 11 ?

b) Olympe réfléchit et lui répond : « Regarde, $704 = 11 \times 64$. 704 est bien divisible par 11 et pourtant ton critère ne fonctionne pas. »
Que pouvez-vous en déduire concernant le critère de Mat ?

2. Tous deux veulent désormais trouver un critère infaillible. En cherchant sur Internet, ils ont trouvé un tableau donné ci-dessous qu'ils ont décidé de remplir et de comprendre.

a) Mettez-vous à la place d'Olympe et Mat et remplissez ce tableau sur **l'annexe 1 page 13** (à rendre avec la copie) :

Nombre abc	***ab***	***c***	***ab-c***
231	23	1	22
704			
154			
781			
594			
418			

b) Quel nouveau critère peuvent conjecturer Olympe et Mat ?

c) Ne trouvant pas d'idée pour justifier leur critère, Mat fouille dans la bibliothèque de sa grande sœur et tombe sur un livre dans lequel il trouve un théorème qui pourrait les aider. Il le montre à Olympe.

Théorème : a, b et c sont des entiers naturels non nuls.
si a et b sont deux nombres divisibles par c, alors a+b est divisible par c.

Mat écrit au brouillon des calculs et voyant qu'Olympe n'y arrive pas, il lui dit : « Tiens regarde, on a écrit $231 = 23 \times 10 + 1$. »

Montrer que si $ab - c$ est divisible par 11, alors abc est divisible par 11.

3. Olympe demande alors à Mat : « Et pour le nombre 3 564, ton critère marche-t-il encore ? »

Expliquez la démarche que va utiliser Mat pour savoir si 3 564 est divisible ou non par 11.
Que pouvez-vous en déduire ?

<u>EXERCICE 3</u> (Académique - pour les séries S et STI)

LE GATEAU DE JULIE

*Dans cet exercice toutes les constructions sont à réaliser sur l'**annexe 2 page 14**, en utilisant uniquement un **compas** et une **règle** sans utiliser ses graduations. On laissera apparents tous les traits qui ont servi aux constructions.*

(Pour obtenir le milieu d'un segment on peut construire sa médiatrice.)

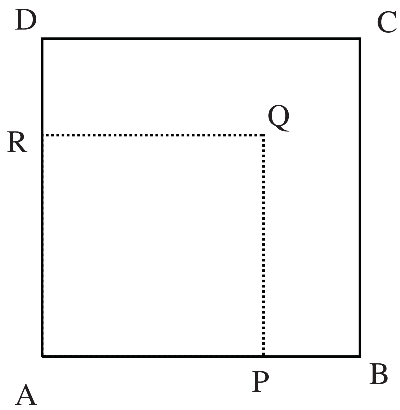
Demain c'est l'anniversaire de Julie et elle m'a chargé de faire le gâteau. Comme elle adore les carrés, j'ai décidé de lui faire un gâteau carré.

Le découpage du gâteau est assimilé au partage d'un carré par des segments. La part de Julie sera toujours **<u>carrée</u>**. Par souci d'équité, toutes les parts auront **<u>la même aire</u>**.

La longueur du côté du carré représentant le gâteau est choisie égale à 1.

1. Julie dit : « Si on est quatre, le partage sera facile ! »
Proposer sur la ***<u>figure 1</u>*** **de l'annexe 2 page 14** une construction possible.

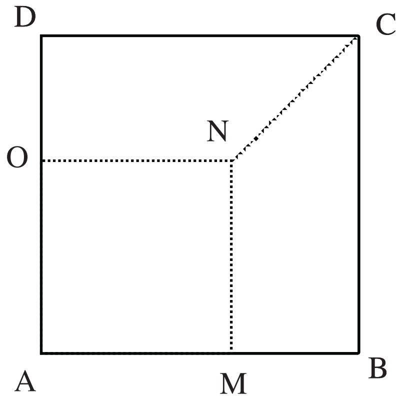
2. Puis elle ajoute : « Par contre si on est deux, je ne vois pas. »
Pour l'aider, j'ai imaginé un partage comme ci-dessous (les schémas ne sont pas à échelle).



a) Calculer la distance AP de sorte que l'aire du carré APQR soit égale à celle de l'hexagone PQRDCB.

b) Sur la ***<u>figure 2</u>*** **de l'annexe 2 page 14** (à rendre avec la copie), construire le découpage des deux parts.

3. « Mais si ma copine Amélie vient, nous serons trois, et là tu fais quoi ? »
Après réflexion, je propose le découpage suivant :



a) Calculer la distance à laquelle il me faudra placer le point M du point A.

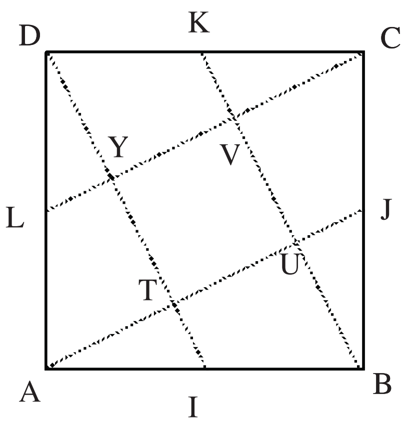
b) Pour réaliser ce découpage je propose la construction suivante :

- Construire le triangle équilatéral BCS, S étant à l'extérieur du carré ABCD.
- Construire le centre de gravité G du triangle BCS.

Montrer que la distance GS est égale à la longueur du côté de la part de Julie (on pourra utiliser le fait que le centre de gravité d'un triangle se situe aux deux tiers de la médiane en partant du sommet).

c) Réaliser sur la ***figure 3*** **de l'annexe 2 page 14** la construction permettant de découper le gâteau (à rendre avec la copie).

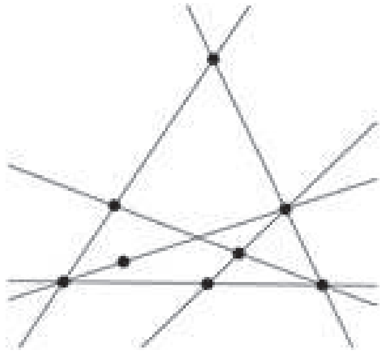
4. « Ah, mais Papa et Maman voudront aussi une part ! »
Après bien des essais, je pense à la construction ci-dessous. Les points I, J, K et L sont les milieux des côtés du carré ABCD.



Montrer qu'à partir de cette construction on peut réaliser un partage répondant aux conditions : une part carrée pour Julie, et quatre autres parts de même aire.

EXERCICE 4 (National - pour toutes séries)

FIGURES ÉQUILIBRÉES



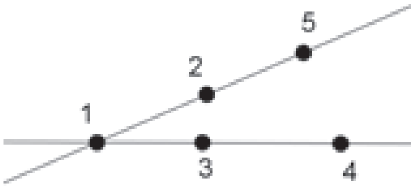
La figure ci-contre est constituée d'un ensemble de droites (ici, 6 droites) et de points marqués (ici, 8 points).
Elle possède la propriété suivante :
Sur chacune de ces droites, il y a exactement trois points marqués.

Une figure vérifiant cette propriété est dite ***équilibrée***.

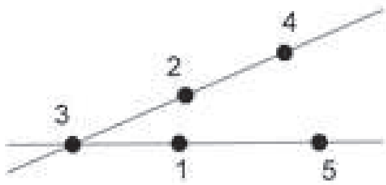
1. Construire une figure équilibrée constituée :
   a) de 7 points marqués et 5 droites ;
   b) de 9 points marqués et 8 droites.

Dans la suite, on considère une figure équilibrée comportant p points marqués qu'on a numérotés par les entiers de 1 à p.
Cette numérotation est alors dite ***magique*** s'il existe un entier K, tel que la somme des trois entiers (correspondant à la numérotation des points marqués) de chaque droite de la figure est égale à K. Cet entier K est appelé ***constante magique*** de la numérotation.

2. Voici par exemple une figure équilibrée (avec 2 droites et 5 points marqués) ayant plusieurs numérotations magiques :



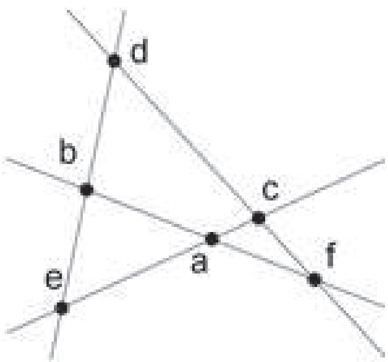
$K = 8$



$K = 9$

Trouver une numérotation de cette figure qui ne soit pas magique.
Trouver une numérotation magique de cette figure dont la constante magique n'est ni 8 ni 9.

3. La figure équilibrée ci-contre est constituée de 6 points et 4 droites. Les entiers 1, 2, 3, 4, 5, 6, affectés aux points marqués dans un certain ordre, sont notés a, b, c, d, e, f sur la figure.



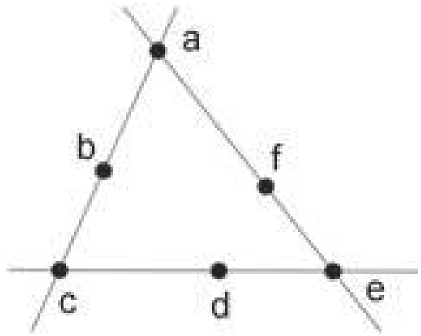
   a) Démontrer que si la figure est magique, de constante magique K, alors $4 \times K = 42$.
   b) Peut-on trouver une numérotation magique de cette figure ?
   Si oui, la donner ; si non, expliquer pourquoi.

4. La figure équilibrée ci-contre est constituée de 6 points et 3 droites. Les entiers 1, 2, 3, 4, 5, 6, affectés aux points marqués dans un certain ordre, sont notés à nouveau a, b, c, d, e, f sur la figure.

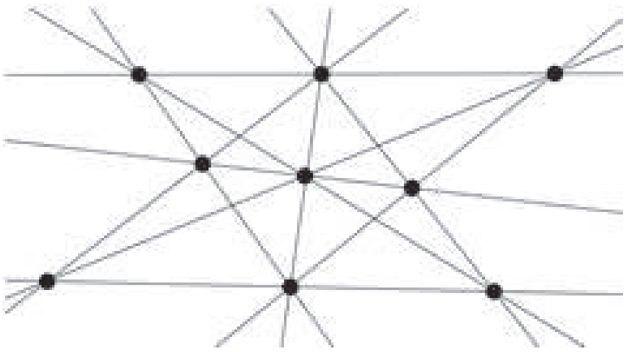
a) Démontrer que $a + c + e$ est compris entre 6 et 15.

b) Démontrer que si la numérotation de cette figure est magique, de constante K, alors $a + c + e = 3(K - 7)$.

c) Déterminer la(les) constante(s) magique(s) pour cette figure.



5. La figure équilibrée ci-contre est constituée de 9 points et 10 droites.
Cette figure admet-elle une numérotation magique ?



EXERCICE 5 (National - pour toutes séries)

LE PLUS COURT POSSIBLE

Quatre villes – Alençon, Bélançon, Célançon et Délançon – sont situées aux quatre sommets d'un carré dont le côté mesure 100 km.
La Direction Départementale de l'Équipement souhaite les relier les unes aux autres par le réseau routier le plus court possible.

Partie A

« On pourrait construire des routes allant d'Alençon à Bélançon, puis Célançon, puis Délançon » dit l'assistant n°1.

« Ou alors, on pourrait construire deux routes diagonales : une d'Alençon à Célançon et l'autre de Délançon à Bélançon » propose l'assistant n°2.

« Et pourquoi pas, construire une route semi-circulaire complétée par deux segments ? » propose l'assistant n°3.

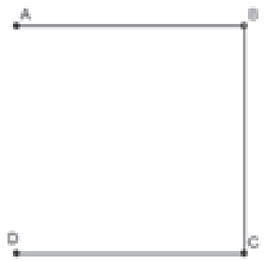


fig. 1
Assistant n°1

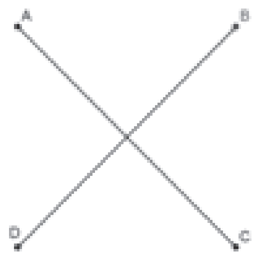


fig. 2
Assistant n°2

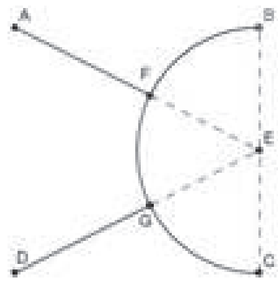


fig. 3
Assistant n°3

1. Quel assistant propose le réseau routier le plus court ?

2. Un mathématicien qui était présent propose une autre solution :
« On pourrait relier Alençon et Délançon par un triangle isocèle (triangle AED de la fig. 4), puis Bélançon et Célançon par un triangle isocèle de même forme (triangle BFC) et relier les deux sommets E et F comme le suggère la figure ci-contre » :

Si EF = 20 km, le réseau routier envisagé sur la figure 4 est-il plus court que ceux proposés par les assistants ?

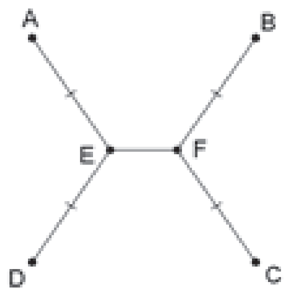


fig. 4

Partie B

Dans cette partie, on souhaite prouver que le réseau routier le plus court est effectivement du modèle proposé par le mathématicien. On cherchera par la suite la longueur EF qui réalise ce plus court chemin.

Rappels de géométrie :

Si A, B, C sont trois points du plan, en notant AB la distance entre A et B :

on a toujours $AB + BC \geq AC$;

on a l'égalité $AB + BC = AC$ si, et seulement si, B appartient au segment [AC].

On admettra aussi que si on trace une courbe quelconque entre A et B, la longueur de la courbe est toujours supérieure ou égale à la longueur du segment [AB] (le plus court chemin étant la ligne droite).

1. Revenons à notre réseau routier.

On admettra qu'on peut sans restreindre la généralité supposer que le réseau solution est formé de deux courbes joignant les sommets opposés (A et C d'une part, B et D d'autre part), et que ces courbes sont à l'intérieur du carré de 100km de coté, comme dans le dessin suivant.

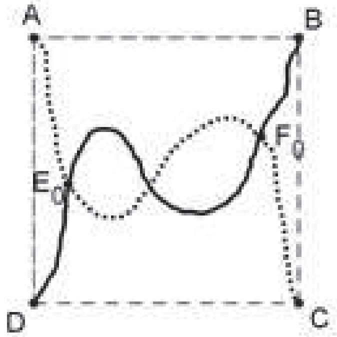


fig. 5

On considère un réseau formé de deux courbes comme sur la figure 5.

En parcourant la route entre Alençon et Célançon en partant d'Alençon, on appelle E_0 le premier point d'intersection rencontré et F_0 le dernier point d'intersection rencontré (ces deux points pouvant être confondus). (*fig. 5*).

Montrer qu'alors la longueur du réseau de la fig. 5 est supérieure ou égale à celle du réseau suivant, constitué de segments (*fig. 6*).

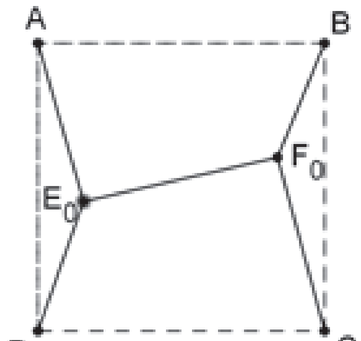


fig. 6

2. On considère les droites Δ_E et Δ_F, parallèles à (AD) passant par E_0 et F_0 (voir figure 7 ci-dessous).

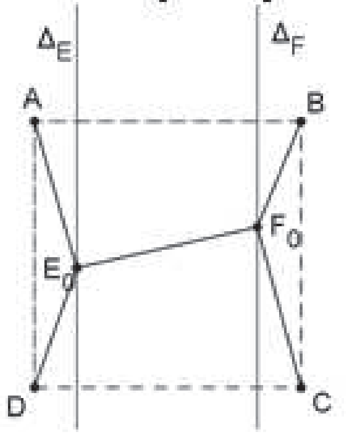


fig. 7

a) Déterminer le point E de Δ_E tel que la somme des distances DE + EA soit minimale.
On appelle F le point trouvé en faisant le même raisonnement pour F_0.

b) Montrer que $EF \leq E_0F_0$.

c) Déduire de ce qui précède que le réseau recherché est nécessairement de la forme suivante où E et F sont sur la médiatrice du segment [AD] (*fig. 8*).

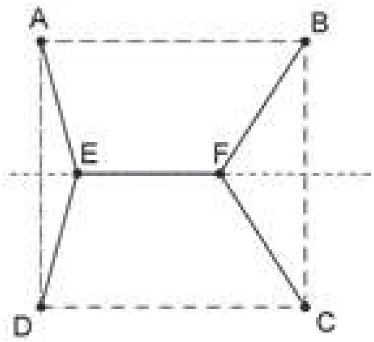


fig. 8

3. On admettra que dans le réseau recherché, les points E et F doivent être de part et d'autre de la médiatrice de [AB].

a) Justifier que le réseau recherché doit être symétrique par rapport à la médiatrice de [AB].

b) D'après ce qui précède, le réseau recherché a donc la même forme que celui que proposait le mathématicien (*fig. 4*).
Pouvez-vous l'aider à déterminer la longueur EF pour laquelle ce type de réseau routier sera le plus court possible ?

c) Quelle est alors la valeur de l'angle $\widehat{DEA}$?

Annexe 1- Exercice 2 (Académique - pour toute série <u>autre que</u> S et STI)

Nombre abc	***ab***	***c***	***ab-c***
231	23	1	22
704			
154			
781			
594			
418			

Annexe 2- Exercice 3 (Académique - pour les séries S et STI)

Figure 1. Partage en quatre parts

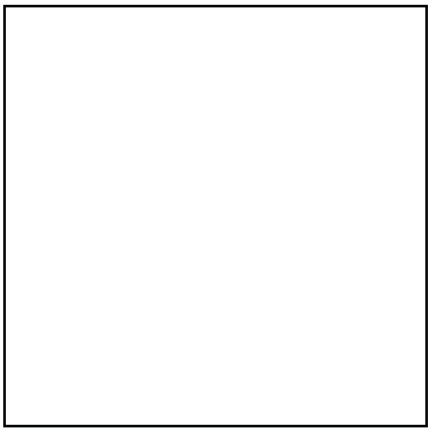


Figure 2. Partage en deux parts

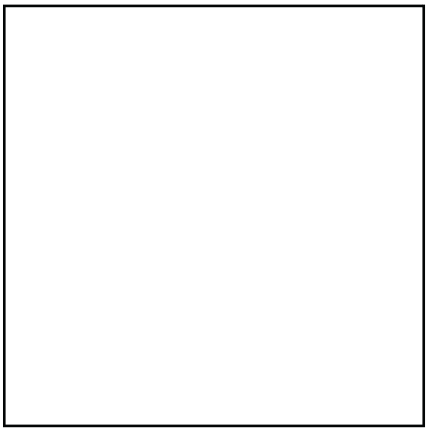
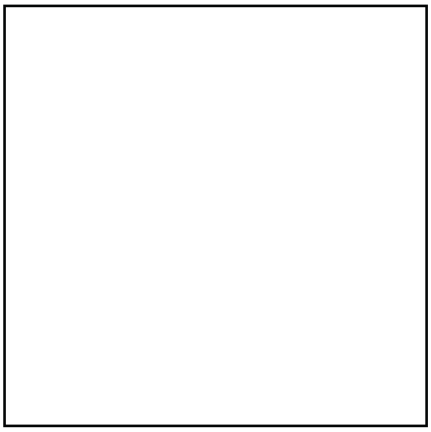


Figure 3. Partage en trois parts



Exercice numéro 1 : La pétanque bretonne
CORRECTION

1. a) Supposons que Paul ait gagné exactement 2 parties à 3 points, il reste alors 4 parties et $15 - 2 \times 3 = 9$ points, avec au maximum 2 points à gagner par partie, et $4 \times 2 = 8 < 9$: on aboutit donc à une contradiction.
   Il en est évidemment « de même » s'il a gagné exactement 1 partie à 3 points ou encore aucune. Pour obtenir 15 points en 6 parties, Paul a donc gagné au moins trois parties à 3 points.

   b) Paul ne peut pas avoir gagné 5 parties à 3 points ($5 \times 3 = 15$ c'est trop car il a gagné une 6^{e} partie !).
   On note par triplets (x, y, z) avec x nombre de parties à 3 points gagnées, y à 2 points et z à 1 point.
   Les deux seules possibilités sont (3,3,0) et (4,1,1).

   c) Les joueurs ont effectué 15 parties, Martine en a donc gagné $15 - 6 = 9$ parties.
   Supposons que Martine ait gagné exactement 6 parties à 1 point ; il reste 3 parties et $11 - 6 = 5$ points, avec au minimum 2 points par partie, et $3 \times 2 = 6 > 5$. On aboutit donc à une contradiction : Pour obtenir 11 points en 9 parties, Martine a gagné au moins 7 parties à 1 point.

   a) Il n'y a que deux possibilités : (0,2,7) et (1,0,8).

2. a) α) Martine a gagné en exactement 15 points donc $3x + 2y + z = 15$ (1).
   Comme elle a remporté 8 parties, $x + y + z = 8$ (2).
   (1) − (2) implique $2x + y = 7$ (3).

   β) Si $x = 0$ alors $y = 7$ (d'après (3))
   d'où $z = 1$, soit le triplet $(0, 7, 1)$.

   De même, si $x = 1$, alors $y = 5$ d'où $z = 2$, soit le triplet $(1, 5, 2)$.
   On obtient de la même façon les triplets $(2, 3, 3)$ et $(3, 1, 4)$ ($x = 4$ s'avère impossible).

   b) Déterminer, de façon analogue, tous les triplets (x', y', z') qui peuvent amener aux 13 points obtenus par Paul (x' le nombre de parties à 3 points remportées par Pauly' le nombre de parties à 2 point et z' le nombre de parties à 1 point.).
   Paul a obtenu 13 points donc $3x + 2y + z = 13$ (1)
   Comme il a remporté 8 parties, $x + y + z = 8$ (2)
   (1) − (2) implique $2x + y = 5$ (3)
   En procédant comme à la question a.2) on obtient les triplets $(0, 5, 3), (1, 3, 4)$ et $(2, 1; 5)$ ($x = 3$ s'avère impossible).

3. a) Dans le cas où $x = 0$, comme $3x + 2y + z = 15$,on a donc $2y + z = 15$.
   Les 8 possibilités pour (y, z) sont alors : (0,15), (1,13), (2,11), (3,9), (4,7), (5,5), (6,3) et (7,1)

   b) On pose $x = 1$. cela induit que $2y + z = 12$ et on obtient **les 7 possibilités** pour (y, z) : (0,12), (1,10), (2,8), (3,6), (4,4), (5,2) et (6,0).
   On pose $x = 2$ .Cela induit que $2y + z = 9$ et on obtient **les 5 possibilités** : (0,9), (1,7), (2,5), (3,3) et (4,1)
   De même, $x = 3$ implique **les 4 possibilités** (0,6), (1,4), (2,2) et (3,0).
   $x = 4$ implique **les 2 possibilités** (0,3) et (1,1).
   Enfin $x = 5$ implique **1 possibilité** (0 ;0).
   Il y a donc en tout $8 + 7 + 5 + 4 + 2 + 1 = 27$ triplets qui amènent 15 points pour A.

4. a) Il « faut » ordonner :

Si Paul fait tomber le phare quille en première partie	Si Paul marque 0 point à la première partie	Si Paul marque 1 point à la première partie	Si Paul marque 2 points à la première partie	Si Paul marque 3 points à la première partie
$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$
2 possibilités	7 possibilités	4 possibilités	6 possibilités	7 possibilités

Total : 26 possibilités.

b) On ajoute le total des points de la première colonne (points de Paul).
(Ici l'addition est dans l'ordre du nombre de cas dans chaque colonne du tableau)
Il y a $1 + 2 + 1 + 2 + 1 = 7$ **façons d'obtenir 2 points**.
Il y a $0 + 3 + 1 + 1 + 3 = 8$ **façons d'obtenir 3 points**.

Paul a donc plus de chance d'avoir gagné en ayant totalisé 3 points

Exercice numéro 3 : Le gâteau de Julie
CORRECTION

1. La construction seule, avec les traits de construction, suffit à la réponse.
Construction des médiatrices de deux côtés consécutifs du carré.
Mise en évidence des segments inclus dans le carré.

2. a) L'aire du carré APQR doit être la moitié de celle du carré ABCD afin que le partage soit équitable.
Il faut donc $AP^2 = \frac{1}{2}$, soit $AP = \frac{1}{\sqrt{2}}$, ou encore $AP = \frac{\sqrt{2}}{2}$
   b) Tracé d'une diagonale, construction de son milieu (au plus simple par la seconde diagonale).
Report de la longueur de la demi-diagonale (au plus simple sur chacun des quatre côtés).
Construction du carré APQR, et mise en évidence des segments [PQ] et [QR].

3. a) L'aire du carré AMNO doit être le tiers de celle du carré ABCD. Il faut donc : $AM^2 = \frac{1}{3}$, soit $AM = \frac{1}{\sqrt{3}}$, ou encore $AM = \frac{\sqrt{3}}{3}$.
   b) On sait (ou si on ne sait pas on démontre à l'aide du théorème de Pythagore) que dans un triangle équilatéral de côté 1 les médianes mesurent $\frac{\sqrt{3}}{2}$. Or le centre de gravité d'un triangle se situe aux deux-tiers de la médiane. On sait (ou si on ne sait pas on démontre à l'aide du théorème de Pythagore) que dans un triangle équilatéral de côté 1 les médianes mesurent $\frac{\sqrt{3}}{2}$, deux tiers de la médiane en partant du sommet.
La distance GS vaut donc $\frac{2}{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{3}$.
Il s'agit bien de la distance AP, c'est à dire la longueur du côté de la part carrée de Julie.

   c) Construction du triangle BCS et de deux de ses médiatrices.
Report de la distance GS sur les côtés du carré ABCD.
Construction et mise en évidence des segments [MN], [NO] et [NC].

4. Le carré ABCD est symétrique par rapport à son centre. La symétrie centrale conservant les milieux, on peut aussi affirmer que le quadrilatère IJKL admet le même centre de symétrie. Par intersection de droites symétriques, on peut aussi conclure que le quadrilatère TUVY admet le même centre de symétrie.
La figure admet donc un centre de symétrie, les paires de points nommés symétriques étant : {A, C}, {B, D}, {I, K}, {J, L}, {T, V} et {U, Y}.
Les triangles ABJ, BCK, CDL et ADI sont des triangles rectangles dont les côtés de l'angle droit mesurent 1 et $\frac{1}{2}$. Ils sont donc superposables. En particulier $\widehat{JAB} = \widehat{KBC}$.
Or les angles $\widehat{JAB}$ et $\widehat{BJA} = \widehat{BJU}$ sont complémentaires. On en déduit que les angles $\widehat{KBC} = \widehat{UBJ}$ et $\widehat{BJU}$ sont complémentaires. Le triangle BJU est donc rectangle en U.
Par symétrie on en déduit que les triangles BJU, CVK, DYL et ATI sont rectangles, superposables, et des réductions des triangles ABJ, BCK, CDL et DAI.
Il vient que le quadrilatère TUVY est un rectangle, et par symétrie on démontre que ses côtés ont même mesure. **Le quadrilatère TUVY est donc un carré**.
Les triangles superposables à ABJ ont pour aire $\frac{1}{2} \times 1 \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$.
D'après le théorème de Pythagore employé dans le triangle ABJ on obtient : $AJ = \frac{\sqrt{5}}{2}$.
Les triangles superposables à BUJ sont donc des réductions du triangle ABJ dans le rapport $\frac{BJ}{AI} = \frac{1}{\sqrt{5}}$.
Leur aire est donc égale à $\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^2 \times \frac{1}{4} = \frac{1}{20}$.
Les triangles AUB, BVC, CYD et DTA ont donc pour aire : $\frac{1}{4} - \frac{1}{20} = \frac{1}{5}$.
Le carré TUVY a donc pour aire : $1 - 4 \times \frac{1}{5}$.
Un découpage du gâteau selon les segments [DT], [AU], [BV] et [CY] fournira donc cinq parts de même aire dont une est un carré, conformément à l'équité et au goût de Julie.