SUJET + CORRIGÉ

OLYMPIADES DE MATHÉMATIQUES

ACADÉMIE DE RENNES

Classes de première S • 2013

ACADÉMIE DE RENNES

SESSION 2013

CLASSE DE PREMIÈRE

DURÉE : 4 heures

Du papier millimétré sera fourni aux candidats.
Ce sujet s'adresse à tous les élèves de première, quelle que soit leur série.

Il comporte huit pages et cinq exercices.

Chaque élève traitera quatre exercices dans l'ordre de son choix conformément aux dispositions ci-dessous :

- ***Tous les candidats traiteront les exercices 1, 2 et 3,***
- ***Les candidats des séries autres que S et STI traiteront en plus l'exercice 4,***
- ***Les candidats des séries S et STI traiteront en plus l'exercice 5.***

*Il est à noter qu'au niveau de chaque exercice, **toute trace de recherche, même incomplète, d'initiative même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.***

Les calculatrices sont autorisées.

<u>EXERCICE 1</u> (National - pour toutes séries)

LES NOMBRES HARSHAD

Un entier naturel non nul est un **nombre Harshad** s'il est divisible par la somme de ses chiffres.

Par exemple, $n = 24$ est un nombre Harshad car la somme de ses chiffres est $2 + 4 = 6$, et 24 est bien divisible par 6.

1. **a**. Montrer que 364 est un nombre Harshad.

b. Quel est le plus petit entier qui ne soit pas un nombre Harshad ?

2. **a**. Donner un nombre Harshad de 4 chiffres.

b. Soit n un entier non nul. Donner un nombre Harshad de *n* chiffres.

3. **a**. Montrer que 110, 111, 112 forment une liste de trois nombres Harshad consécutifs.

b. En insérant judicieusement le chiffre 0 dans l'écriture décimale des nombres précédents, construire une autre liste de trois nombres Harshad consécutifs.

c. Justifier l'existence d'une infinité de listes de trois nombres Harshad consécutifs.

4. **a**. Soit $A = 30 \times 31 \times 32 \times 33$. Calculer la somme des chiffres de A.

b. En déduire que 98 208 030, 98 208 031, 98 208 032 et 98 208 033 forment une liste de quatre nombres Harshad consécutifs.

c. Justifier l'existence d'une infinité de listes de quatre nombres Harshad consécutifs.

5. **a**. En s'inspirant de la question 4, trouver une liste de cinq nombres Harshad consécutifs.

b. Justifier l'existence d'une infinité de listes de cinq nombres Harshad consécutifs.

6. **a**. Soit *i* un chiffre compris entre 0 et 8.

Soit *p* un entier dont le chiffre des dizaines est *i* et le chiffre des unités est 9.

Montrer que soit la somme des chiffres du nombre *p*, soit celle de $p + 2$ est un nombre pair.

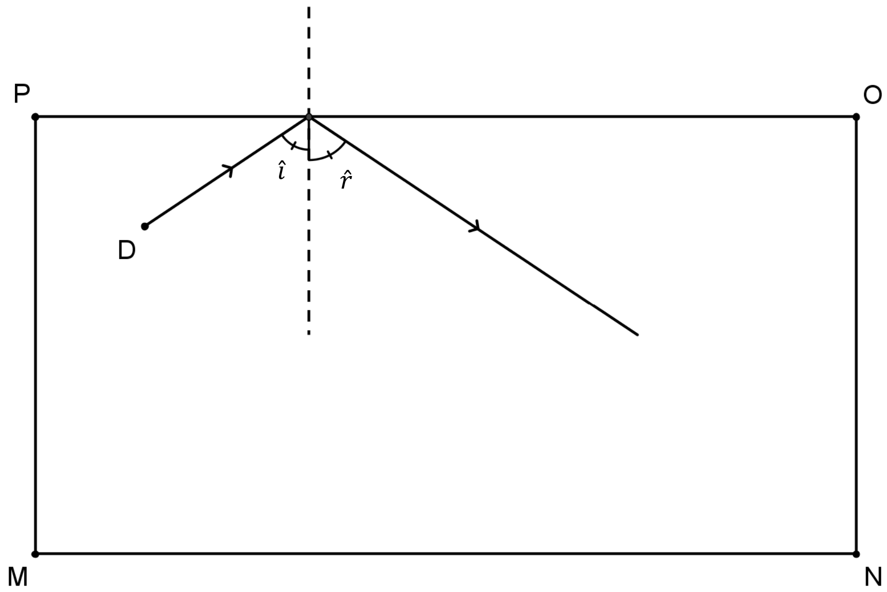
En déduire que *p* et $p + 2$ ne peuvent pas être tous les deux des nombres Harshad.

b. Existe-t-il une liste de 22 nombres Harshad consécutifs ?

EXERCICE 2 (National - pour toutes séries)

LE BILLARD RECTANGULAIRE

On considère un billard de forme rectangulaire, de longueur 300 cm et de largeur 160 cm dont les boules sont assimilées à des points.
Entre deux rebonds toutes les trajectoires sont rectilignes.
Lorsque la boule atteint l'un des bords (rails) du billard, elle y rebondit suivant les règles de la physique des chocs élastiques : l'angle d'incidence $\hat{\imath}$ étant égal à l'angle de réflexion $\hat{r}$, comme sur la figure ci-dessous ($\hat{\imath} = \hat{r}$).



1. On frappe une boule placée au milieu du rail [MN].

   a. Quel point du rail [PO] peut-on viser pour que la boule atteigne le point N en une bande (c'est-à-dire avec un seul rebond) ?

   b. Quel point du rail [PO] peut-on viser pour que la boule atteigne en une bande le milieu du rail [NO] ?

   c. Quel point du rail [NO] peut-on viser pour que la boule revienne à son point de départ en trois bandes (c'est-à-dire après exactement trois rebonds) ?

2. On frappe une boule placée en un point quelconque du rail [MN].

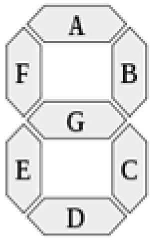
   a. Est-il possible d'atteindre en une bande n'importe quelle boule placée sur la surface de jeu ?

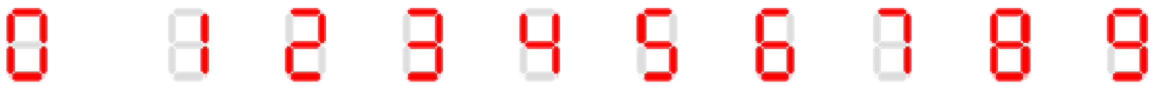
   b. Est-il toujours possible de la frapper de sorte qu'elle revienne en trois bandes à son point initial ?

EXERCICE 3 (Académique - pour toutes séries)

L'AFFICHEUR

Les afficheurs 7 segments sont un type d'afficheur très présent sur les calculatrices et les montres à affichage numérique : les caractères (des chiffres, bien que quelques lettres soient parfois également utilisées) s'écrivent en allumant ou en éteignant des segments qui sont au nombre de sept. Par exemple, quand les 7 segments sont allumés, on obtient le chiffre 8 ; pour afficher le 4, quatre segments sont allumés : *B*, *C*, *F* et *G*, les autres sont éteints.





1. Compléter le tableau suivant par des 0 et des 1 : 0 signifiant le segment est éteint et 1 signifiant le segment est allumé.

Chiffre	Segment A	Segment B	Segment C	Segment D	Segment E	Segment F	Segment G
0							
1							
2							
3							
4	0	1	1	0	0	1	1
5							
6							
7							
8	1	1	1	1	1	1	1
9							

2. a. Quand on écrit tous ces 10 chiffres quel est le segment le plus souvent allumé ?
Et le moins souvent allumé ?

b. Pour chacun des chiffres de 0 à 9, donner le nombre total de segments allumés.

c. Lequel de ces deux nombres nécessite le plus de segments allumés : 8744 ou 2379 ?

3. Parmi tous les nombres de deux chiffres de 00 à 99, quel est celui qui possède le moins de segments allumés ? Et celui qui en possède le plus ?

4. Donner la liste **par ordre croissant** des 20 nombres de deux chiffres compris entre 00 et 99 qui possèdent 11 segments allumés.

5. Parmi tous les nombres de trois chiffres de 000 à 999, donner la liste **par ordre croissant** de tous les nombres ayant 9 segments allumés.

6.

Un réveil, comme celui-ci-dessus, indique les heures (de 00 à 23) les minutes (de 00 à 59) et les secondes (de 00 à 59). Il est minuit, le réveil affiche donc 00 : 00 00.
Au bout de combien de temps en heures, minutes et secondes ce réveil aura-t-il pour la première fois 30 segments allumés ?

7.

Un calendrier, comme celui-ci-dessus, indique le jour (un nombre de 01 à 31) et le mois (un nombre de 01 à 12). Une date est donc un nombre à quatre chiffres ; par exemple le 5 novembre est noté 05 :11 et sur la photo ci-dessus, la date est le 12 août. Nous sommes en 2013 qui n'est pas une année bissextile (28 jours en février).

a. Quelle est la date historique correspondant à la date ayant le moins de segments allumés ?
Quelle est la date ayant le plus de segments allumés ?

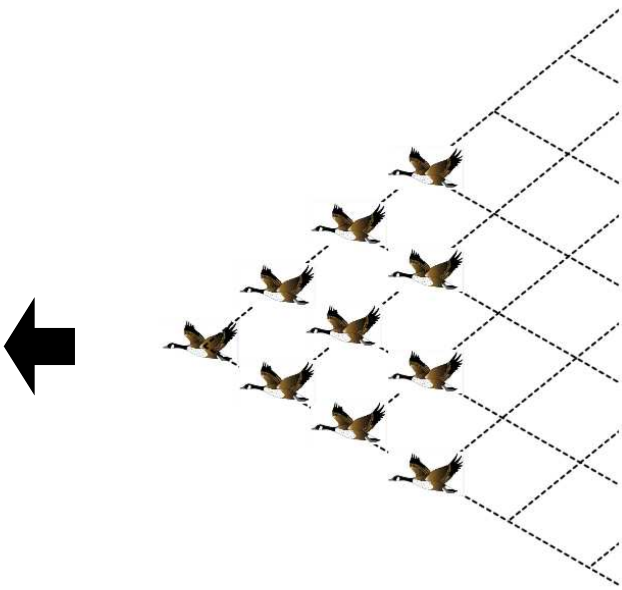
b. Quelles sont les 34 dates ayant 22 segments allumés ?

Sources : d'après http://fr.wikipedia.org/wiki/Afficheur_7_segments ;
Image réveil : http://www.canford.fr/Products/20774/58-781_WHARTON-490A02RS-HORLOGE-affichage-20mm-rouge-montage-sur-surface
Image calendrier : http://www.amazon.fr/gp/product/images/B001LNNICC/ref=dp_image_text_z_0?ie=UTF8&n=13910681&s=home-theater

<u>EXERCICE 4</u> (Académique - pour toute série <u>autre que</u> S et STI)

LES OIES SAUVAGES

Un groupe de 200 oies sauvages se sont rassemblées pour leur migration annuelle, un certain nombre d'entre elles se sont regroupées pour voler en formant un triangle équilatéral comme ci-dessous.



Un bruit soudain retentit et 7 oies affolées quittent le groupe en prenant une autre direction.
Toutes les autres oies du groupe, après un court moment d'hésitation, se reforment en deux nouveaux triangles équilatéraux et reprennent leur vol.

1. **Pouvait-il y avoir 28 oies dans le vol triangulaire initial?**

2. **Donner toutes les configurations possibles du vol triangulaire initial ?**

<u>Source</u> : d'après "Rallye Mathématique du Centre "

EXERCICE 5 **(Académique - pour les séries S et STI)**

LE THÉOREME DE PYTHAGORE REVISITÉ

Damien affirme, tout fier de montrer son savoir :

"*Dans un triangle rectangle, le carré de l'hypoténuse*

est égal à la somme des longueurs des deux autres côtés!"

Mathilde lui répond : "Tu es sûr?". "Certain!" rétorque Damien.

Mathilde réfléchit et dit : "Tu t'es trompé! J'ai trouvé un triangle rectangle qui ne vérifie pas ta propriété."

1. Trouver un triangle auquel Mathilde aurait pu penser.

Décontenancé un instant, Damien essaie de se rattraper en disant : "Ah, mais je n'ai pas dit tous les triangles rectangles, mais il y en a qui ont cette propriété!".

Il réfléchit très fort et dit : "Tiens, regarde ce triangle là!"

2. Trouver un triangle auquel Damien aurait pu penser.

Mathilde, moyennement convaincue de la bonne foi de Damien, le relance en disant : "Mais ça ne fait qu'un seul triangle, et tu as dis qu'il y en avait plusieurs!"

Nous allons essayer d'aider Damien, en cherchant des triangles rectangles vérifiant la propriété qu'il a énoncée.

3. En appelant x et y chacune des longueurs des deux côtés de l'angle droit d'un tel triangle, montrer qu'elles sont liées par la relation :

$$x^2 + y^2 = x + y \quad (1)$$

4. Réfléchissons aux couples de nombres strictement positifs qui vérifient cette relation.

a. Montrer que les deux nombres x et y ne peuvent pas être tous les deux strictement supérieurs à 1.

b. Montrer qu'aucun de ces deux nombres ne peut être strictement supérieur à 2.

c. Montrer que si l'un des nombres est strictement inférieur à 1, alors l'autre est strictement supérieur à 1.

d. Vérifier que le couple $\left(\frac{\sqrt{2}+1}{2};\frac{1}{2}\right)$ vérifie la relation (1). Que peut-on en déduire comme réponse à la recherche de Damien ?

5. Cherchons l'ensemble des couples de nombres $(x;\,y)$ qui vérifient la relation (1).

a. Montrer que cette relation est équivalente à

$$\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{2}$$

b. Dans le plan muni d'un repère orthonormal, on considère le point I de coordonnées $\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$. Déduire de la question précédente, l'ensemble des points dont les coordonnées $(x;\,y)$ vérifient la relation (1).

6. Que peut répondre Damien à Mathilde, de la façon la plus précise possible, pour essayer de sauver la face?

Exercice numéro 3 : L'afficheur
CORRECTION

1.

Chiffre	Segment A	Segment B	Segment C	Segment D	Segment E	Segment F	Segment G
0	1	1	1	1	1	1	0
1	0	1	1	0	0	0	0
2	1	1	0	1	1	0	1
3	1	1	1	1	0	0	1
4	0	1	1	0	0	1	1
5	1	0	1	1	0	1	1
6	1	0	1	1	1	1	1
7	1	1	1	0	0	0	0
8	1	1	1	1	1	1	1
9	1	1	1	1	0	1	1

2. a) Le segments le plus souvent utilisé est le C.
   Le moins souvent allumé est le E.

   b)

Chiffres	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Nombre de segments allumés	6	2	5	5	4	5	6	3	7	6

   c) C'est le nombre 2379 car 8744 nécessite 18 segments allumés et 2379 nécessite 19 segments allumés.

3. Parmi tous les nombres de deux chiffres de 00 à 99, celui qui possède le moins de segments allumés est le 11 et celui qui en possède le plus est le 88.

4. Pour obtenir 11 segments allumés avec deux chiffres, on a soit $(7+4)$ segments allumés soit $(6+5)$.
   Avec 7 et 4 segments allumés les nombres sont 48 et 84.
   Avec 6 et 5 segments allumés, on a les chiffres :
   0 et 2 ou 0 et 3 ou 0 et 5 ou 6 et 2 ou 6 et 3 ou 6 et 5 ou 9 et 2 ou 9 et 3 ou 9 et 5. On obtient donc dans l'ordre croissant les 20 nombres suivants :
   02, 03, 05, 20, 26, 29, 30, 36, 39, 48, 50, 56, 59, 62, 63, 65, 84, 92, 93 et 95.

5. Pour obtenir 9 segments allumés avec trois chiffres, on a soit $(5+2+2)$ segments allumés soit $(4+3+2)$ segments allumés soit $(3+3+3)$ segments allumés.
   Avec 5, 2 et 2 segments allumés, on a les chiffres :
   2, 1 et 1 ou 3, 1 et 1 ou 5, 1 et 1.
   Avec 4, 3 et 2 segments allumés, on a :
   1, 4 et 7.
   Avec 3, 3 et 3 segments allumés on a le nombre 777.
   On obtient donc dans l'ordre croissant les 16 nombres suivants :
   112, 113, 115, 121, 131, 151, 147, 174, 211, 311, 417, 471, 511, 714, 741 et 777.

6. Il est minuit, le réveil affiche 00 00 00, il y a donc 36 segments allumés. Avec les cinq premiers zéros il a déjà 30 segments allumés. L'avant dernier chiffre ne peut donc pas être zéro.
   On essaye avec un 1 comme avant dernier chiffre ; il a donc, sans compter le dernier chiffre, 26 segments allumés. Il faut donc si possible que le dernier chiffre ait 4 segments allumés ; c'est le cas avec le 4.
   Au bout de 0 heure, 0 minute et 14 secondes ce réveil aura pour la première fois 30 segments allumés.

7. a) La date ayant le moins de segments allumés est le 1111 c'est–à–dire le 11 novembre. Et celle ayant le plus de segments allumés est le 0808 c'est–à–dire le 8 août.

   b) On remplit mois par mois le tableau de la page suivante :

Mois	Numéro du mois	Nombre de segments allumés	Nombre de segments restants	Couples de segments	Numéro des jours
Janvier	01	8	14	7 et 7	impossible
Février	02	11	11	7, 4 ; 6, 5	02, 03, 05, 20, 26
Mars	02	11	11	idem	02, 03, 05, 20, 26, 29, 30
Avril	04	10	12	7, 5 ; 6, 6	26
Mai	05	11	11	7, 4 ; 6, 5	02, 03, 05, 20, 26, 26, 30
Juin	06	12	10	5,5 ; 6,4 ; 7, 3	04, 22, 23, 25
Juillet	07	9	13	7, 6	08
Août	08	13	9	7, 2 ; 6, 3 ; 5, 4	07, 18, 24
Septembre	09	12	10	5,5 ; 6, 4 ; 7, 3	04, 22, 23, 25
Octobre	10	8	14	7, 7	Impossible
Novembre	1	4	18	Impossible	Impossible
Décembre	12	7	15	Impossible	Impossible

On obtient 34 dates ayant 22 segments allumés.
En février : 0202, 0302, 0502, 2002 et 2602.
En mars : 0203, 0303, 0503, 2003, 2603, 2903 et 3003.
En avril : 0604, 0904 et 2804.
En mai : 0205, 0305, 0505, 2005, 2605, 2905 et 3005.
En juin : 0406, 2206, 2306 et 2506.
En juillet : 0807.
En août : 0708, 1808 et 2408.
En septembre : 0409, 2209, 2309 et 2509.

Exercice numéro 5 : Le théorème de Pythagore revisité
CORRECTION

1. Mathilde aurait pu penser à un triangle de dimensions $AB = 3, AC = 4$ et $BC = 5$.
   On a $3^2 + 4^2 = 5^2$ et $3 + 4 \neq 5^2$. Damien aurait pu penser à un triangle de dimensions $AB = 1, AC = 1$ et $BC = \sqrt{2}$.
   On a $1^2 + 1^2 = (\sqrt{2})^2$ et $1 + 1 = \sqrt{2}$.
2. Si z est la longueur de l'hypoténuse comme $z^2 = x^2 + y^2$ et $z^2 = x + y$, on a $x^2 + y^2 = x + y$.
3. a) Si $x < 1$, on a $x^2 < x$ et si $y > 1$, on a $y^2 > y$ donc si $x > 1$ et $y > 1$, on a $x^2 + y^2 > x + y$.

   b) Si $x > 2$ on a $x^2 > 2x$ d'où $x^2 - x > x > 2$ et comme $y - y^2 = x^2 - x$, on a $y - y^2 > 2$, ce qui donne $y^2 - y + 2 < 0$ ce qui est impossible ($\Delta = -8$ et $a = 1$)
   On fait la même chose si $y > 2$.
   On peut aussi utiliser les variations de $x \mapsto x^2 - x$
   N.B. on peut mettre des inégalités larges.

   c) Si $x1$ on a $x^2 < x$ puisque $x > 0$ d'où $x^2 - x < 0$.
   On en déduit, puisque $y - y^2 = x^2 - x$ que $y - y^2 < 0$, ce qui prouve que $y < 1$.

   d) $\left(\dfrac{\sqrt{2}+1}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{1}{2}\right)^2 = \dfrac{2 + 2\sqrt{2} + 1}{4} + \dfrac{1}{4} = \dfrac{2\sqrt{2} + 4}{4} = \dfrac{\sqrt{2}+1}{2} + \dfrac{1}{2}$.
4. a) $\left(x - \dfrac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \dfrac{1}{2}\right)^2 = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow x^2 - x + \dfrac{1}{4} + y^2 - y + \dfrac{1}{4} = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow x^2 - x + y^2 - y = 0$.

   b) Si M$(x; y)$: $x^2 - x + y^2 - y = 0 \Leftrightarrow IM^2 = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow IM = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.
   L'ensemble cherché est l'arc de cercle de centre I et de rayon $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ situé dans le plan $x > 0$ et $y > 0$.
5. Il peut lui répondre qu'il y en a quand même une infinité.