www.freemaths.fr

OLYMPIADES MATHÉMATIQUES
LYCÉE, PREMIÈRE

ACADÉMIE DE POITIERS
2020

SUJET + CORRIGÉ

20e OLYMPIADES DE MATHÉMATIQUES

Mercredi 11 mars 2020[1], 2 énoncés (national et académique) en 4 heures, élèves de première générale et technologique[2] et de début de terminale[3], inscription auprès de votre professeur de mathématiques avant les vacances d'hiver selon académie.

Liberté • Égalité • Fraternité
RÉPUBLIQUE FRANÇAISE
MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE

Sujet et Corrigé vous sont présentés par freemaths.fr . . .

Liberté • Égalité • Fraternité
RÉPUBLIQUE FRANÇAISE

MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE, DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE

Olympiades nationales de mathématiques 2020

Métropole-Europe-Afrique-Orient-Inde

L'épreuve se déroule en deux parties indépendantes de deux heures chacune, **les énoncés des deux parties sont donc séparés et distribués séparément à des moments différents**. Les copies rédigées sont ramassées à l'issue de la première partie (« exercices nationaux »). Une pause de cinq à quinze minutes est prévue, avant la seconde partie (« exercices académiques »). Des consignes de confinement peuvent être données selon la zone géographique de passation de l'épreuve.

Les calculatrices sont autorisées selon la législation en vigueur.

Il est conseillé aux candidats qui ne pourraient formuler une réponse complète à une question d'exposer le bilan des initiatives qu'ils ont pu prendre.

Les énoncés doivent être rendus au moment de quitter définitivement la salle de composition.

Exercices académiques

Académie de Poitiers

Les candidats traitent les **deux exercices.**

Texas Instruments Animath CASIO Google Crédit Mutuel Enseignant Inria Futuroscope NUMWORKS

Exercice académique n°1 : Pour tous

L'exercice est décomposé en trois problèmes entièrement indépendants.

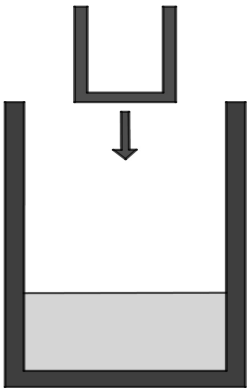
Problème 1 *: Un seau d'eau*

On considère un seau de forme cylindrique de diamètre intérieur 16 cm.

Le seau contient une quantité d'eau de hauteur 8 cm.

On place dans le seau un gobelet en fer de forme également cylindrique avec un diamètre extérieur de 8 cm et une hauteur extérieure de 10 cm. Le gobelet a une épaisseur de 1 cm.

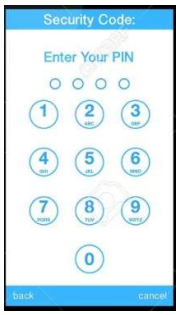
L'ouverture du gobelet est vers le haut. Le gobelet est tellement lourd qu'il descend verticalement et se pose au fond du seau.



1) Va-t-il rentrer de l'eau dans le gobelet ? Justifiez votre affirmation.
2) Si oui, quelle sera la hauteur d'eau dans le gobelet ?

Problème 2 *: Code PIN*

Pour le code PIN de son nouveau téléphone portable, Yasmine a décidé de choisir un code entier à 4 chiffres qui s'écrit *abba*, avec *a* et *b* des chiffres différents, compris entre 0 et 9 (par exemple : 1331 ou 0770, mais pas 5555).



Par la suite, on appellera « code de type S » un code du type *abba*, avec *a* et *b* des chiffres différents, tous les deux compris entre 0 et 9.

1) a) Combien y a-t-il de codes de type S ?

   b) Si Yasmine choisit un code de type S au hasard, quelle est la probabilité que ce soit un code de type S inférieur à 4000 ?

On dit que le code *baab* est le code jumeau de *abba*. On note *D* la différence entre le code *abba* et son code jumeau.

2) Démontrez que $D = 891(a - b)$.
3) Voici deux indices sur le code de type S que Yasmine a finalement choisi :
   - *D* est compris entre 3000 et 4000.
   - Le produit des chiffres de ce code est la puissance $5^{\text{ème}}$ d'un nombre entier non nul.

   Est-il possible de retrouver le code PIN de Yasmine ? Si oui, donnez-le.

4) Y a-t-il des codes de type S qui sont des nombres premiers ? Justifiez.

Texas Instruments Animath CASIO Google Crédit Mutuel Enseignant Inria Futuroscope NUMWORKS

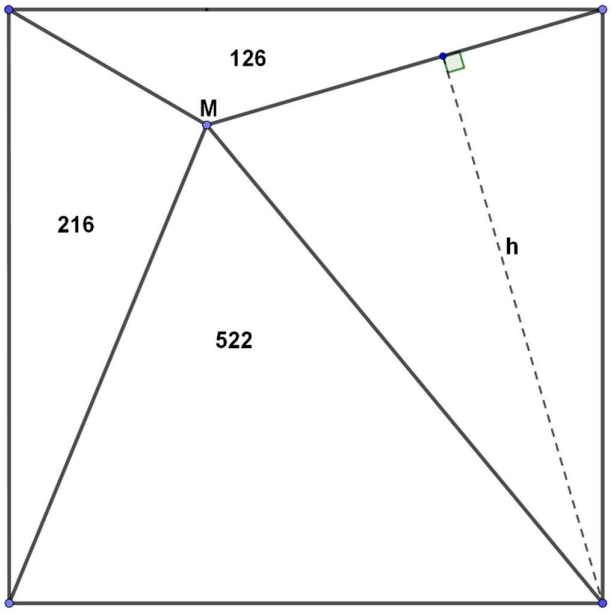
<u>Problème 3</u> : Partage d'un carré

A l'intérieur d'un carré, on place un point M que l'on relie à chacun des quatre sommets.

Quatre triangles sont ainsi formés, et l'on connaît seulement les aires de trois d'entre eux (indiquées directement sur les triangles).

1) Peut-on trouver l'aire du quatrième triangle ? Justifiez votre affirmation.

2) Quelle est la longueur *h* de la hauteur de ce quatrième triangle représentée sur la figure ?



Texas Instruments Animath CASIO Google Crédit Mutuel Enseignant Inria Futuroscope NUMWORKS

Exercice académique n°2 : Pour les élèves suivant l'enseignement de spécialité mathématiques de première générale

Pièces en chocolat

Partie I : Trucage et pépites de chocolat

Thierry est un grand amateur de cacao qui aime fabriquer des pièces en chocolat.

Chacune de ses pièces présente deux faces : une avec le chiffre 1 et l'autre avec le chiffre 2.

1) On lance deux pièces parfaitement équilibrées et on additionne les nombres obtenus avec chacune des pièces.
   À l'aide d'un arbre de probabilités, calculer les probabilités d'obtenir une somme égale à 2, 3 ou 4.

Thierry regrette qu'il n'y ait pas équiprobabilité entre les différentes sommes possibles (2, 3 ou 4).

Margot lui suggère alors de truquer les pièces en positionnant habilement quelques pépites de chocolat.

On note respectivement p_1 et p_2 les probabilités d'obtenir 1 avec la première et la deuxième pièce.

2) a) Montrer que l'équiprobabilité des trois sommes implique que $p_1 + p_2 = 1$ et $p_1 p_2 = \frac{1}{3}$.

   b) Est-il possible de truquer les pièces pour obtenir l'équiprobabilité des trois sommes ?

Partie II : En choisissant bien les faces

Charlotte suggère à Thierry de changer les valeurs indiquées sur chacune des faces des pièces pour obtenir des sommes équiprobables en additionnant les nombres obtenus avec chaque pièce.

On notera $\langle x|y \rangle$ une pièce sur laquelle les deux valeurs indiquées sont *x* et *y*.

Remarque : $\langle x|y \rangle$ et $\langle y|x \rangle$ désignent donc la même pièce.

Dans cette partie, les pièces sont supposées bien équilibrées.

1) On joue avec deux pièces : $\langle 0|2 \rangle$ et $\langle 1|2 \rangle$.
   Montrer que les probabilités d'obtenir les sommes 1, 2, 3 et 4 sont égales.

2) Thierry ne souhaite inscrire que des entiers naturels sur les faces de ses pièces.
   En jouant avec trois pièces, est-il possible que les sommes 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 et 8 aient la même probabilité ?

3) Soit *n* un entier naturel supérieur ou égal à 2.
   On suppose qu'on dispose de *n* pièces permettant d'obtenir les sommes 1, 2, 3, ... , 2^n avec la même probabilité.
   Montrer qu'il est possible de confectionner $n+1$ pièces permettant d'obtenir les sommes 1, 2, 3, ... , 2^{n+1} avec la même probabilité.

Texas Instruments Animath CASIO Google Crédit Mutuel Enseignant Inria Futuroscope NUMWORKS

Exercice académique n°2 : Pour les élèves ne suivant pas l'enseignement de spécialité mathématiques de première générale

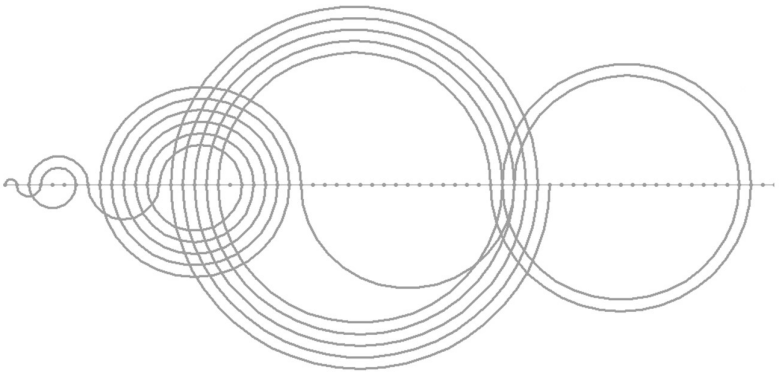
Un petit singe calculateur et gourmand

Des souches d'arbres sont alignées tous les mètres et numérotées de 1 à 70. Au pied de chacune des souches est disposé un peu de nourriture.
Dans le cadre d'une expérimentation, des chercheurs installent un petit singe, Kala, sur la souche n°1.
Des étudiants curieux observent la scène.
Un chercheur explique : « Kala va passer de la souche n°1 à la souche n°2, et il a l'autorisation de manger la friandise cachée au pied de la souche ; puis de la souche n°2, il va sauter sur la souche n°4 et se régaler à nouveau. En fait, il agrandit son saut d'une unité à chaque fois ce qui le conduit ensuite à la souche n°7 »
Un étudiant attentif continue : « Ensuite il ira sur la souche n°11, puis sur la souche n°16. »
Le chercheur le coupe alors : « Eh bien, justement non ! Ce que je ne vous ai pas encore dit, c'est que Kala est entraîné à faire ses déplacements prioritairement en arrière. Il ne fait son saut vers l'avant que si le saut en arrière l'amène sur une souche sur laquelle il est déjà passé, ou avant la première souche. Ainsi, après la souche n°7, il ira sur la souche n°3, et non pas sur la n°11. »
Et il rajoute : « Si Kala se trompe, il est ramené dans sa cage, et il est alors privé des morceaux de fruits qu'il aurait trouvés au pied de chaque souche, s'il ne s'était pas trompé ».
Après quelques jours d'entraînement, le petit singe, stimulé par les récompenses, ne se trompe plus.

1) a) Vérifier qu'après 8 sauts, Kala se trouve sur la souche n°13.
   b) Sur quelle souche se trouve Kala après son 12ème saut ?
2) La liste des souches successives constituant le parcours du singe une fois le n-ième (n>0) saut accompli peut être obtenue par l'algorithme suivant, à compléter :

```
listesouche ={1}
pour i variant de 1 à n :
        si listesouche(i-1)-i >0 et si ……..  n'est pas dans listesouche.
                alors on ajoute ……..à   listesouche.
        sinon
                on ajoute …….. ……. à ……..
fin pour.
écrire listesouche
```

3) Tout d'un coup, en arrivant sur une souche, Kala montre des signes de nervosité. Il pousse des petits cris, descendant de la souche puis y remontant, dévoilant ses dents de façon agressive. Il continue néanmoins son parcours. Expliquer le comportement de Kala.
4) Le début du parcours du singe est codé par la figure ci-dessous.
   a) Expliquer comment est codé le parcours.
   b) Combien de sauts du singe ont été codés sur cette figure ?
   c) Le dessin montre que certaines souches devraient être atteintes 2 fois par le singe. Lesquelles ?



OLYMPIADES MATHÉMATIQUES
LYCÉE, PREMIÈRE

CORRECTION !

Épreuve ▪ 2020

CORRECTION OLYMPIADES

EXERCICES ACADÉMIQUES

Poitiers 2020

Exercice 1

Problème 1 : Un seau d'eau

Rappelons que le volume V d'un cylindre de hauteur h et de rayon R est donné par la formule : $V = \pi h R^2$.

En fonction de sa hauteur h et de son diamètre d, égal à $2R$, le volume de ce cylindre est par conséquent donné par la formule : $V = \frac{1}{4}\pi h d^2$. Tous les volumes seront exprimés en cm^3.

1. Commençons par calculer le volume V_e de l'eau contenue dans le seau.

Par hypothèse, cette eau remplit un cylindre de hauteur 8 cm et de diamètre 16 cm : $V_e = \frac{1}{4}\pi \times 8 \times 16^2 = 512\pi$

Cherchons ensuite le volume V_d de l'espace disponible entre le seau et le gobelet. Puisque la hauteur du gobelet est 10 cm, ce volume est celui d'un cylindre de hauteur 10 cm et de diamètre 16 cm évidé d'un autre cylindre de hauteur 10 cm et de diamètre 8 cm. Ce volume est égal à la différence des volumes des deux cylindres :

$$V_d = \left(\frac{1}{4}\pi \times 10 \times 16^2\right) - \left(\frac{1}{4}\pi \times 10 \times 8^2\right) = 480\pi$$

Ce volume disponible est ***strictement inférieur*** à V_e, donc il entrera de l'eau dans le gobelet.

2. Une partie de l'eau contenue dans le seau occupera tout l'espace disponible entre le seau et le gobelet, mais la quantité excédentaire $V_e - V_d = 512\pi - 480\pi = 32\pi$ entrera dans le gobelet.

Le diamètre intérieur du gobelet est égal au diamètre extérieur diminué de deux fois l'épaisseur de métal, il est égal à 6 cm. La hauteur h d'eau dans le gobelet est la hauteur d'un cylindre de diamètre 6 cm et dont le volume est égal à la quantité excédentaire.

Le nombre h est solution de l'équation : $\frac{1}{4}\pi h \times 6^2 = 32\pi$, c'est-à-dire de l'équation : $9h = 32$. Ainsi :

$h = \frac{32}{9} = 3{,}6$ à 0,1 près.

La hauteur d'eau dans le gobelet est égale à 3,6 cm, à 0,1 cm près.

Problème 2 : Code pin

1.a. Le choix d'un code de type S équivaut à un tirage exhaustif ordonné de deux éléments dans un ensemble de 10 éléments. Il y a donc $10 \times 9 = 90$ codes de type S.

1.b. Un code S, noté *abba*, est plus petit que 4000 si et seulement si son chiffre des milliers a appartient à l'ensemble des quatre chiffres $\{0, 1, 2, 3\}$. Il y a donc $4 \times 9 = 36$ codes de type S qui sont inférieurs (strictement) à 4000.

Le choix « au hasard » d'un code S amène à considérer l'espace probabilisé Ω constitué par l'ensemble des 90 codes possibles muni de l'équiprobabilité. Cet espace étant muni de l'équiprobabilité, la probabilité d'un évènement A est égale au rapport : $p(A) = \frac{nombre\ d'éléments\ de\ A}{nombre\ d'éléments\ de\ \Omega}$.

Si A désigne l'évènement : « obtenir un code plus petit que 4000 », alors $p(A) = \frac{36}{90} = \frac{2}{5}$.

2. L'entier N dont l'écriture décimale est $\overline{abba}$ est l'entier : $N = 1000a + 100b + 10b + a = 1001a + 110b$.

Son jumeau N' a pour écriture décimale $\overline{baab}$, c'est l'entier : $N' = 1000b + 100a + 10a + b = 1001b + 110a$.

Leur différence est : $N - N' = (1001a + 110b) - (1001b + 110a) = (1001 - 110)(a - b)$.

Or : $1001 - 110 = 891$. C'est pourquoi nous obtenons la relation : $N - N' = 891(a - b)$

3. Dire que D est compris entre 3000 et 4000 équivaut à dire que $3000 \leq 891(a - b) \leq 4000$.

Or, un seul multiple de 891 figure dans cette fourchette, il s'agit du nombre : $3564 = 4 \times 891$.

Cet indice nous indique que les chiffres a et b vérifient nécessairement la relation : $a - b = 4$.

Ainsi, $a = b + 4$ et puisqu'il faut que a soit un chiffre, donc soit au plus égal à 9, b est l'un des entiers 0, 1, 2, 3, 4 ou 5.

Le produit des chiffres du code est le nombre : $a \times b \times b \times a = (b+4)^2 \times b^2$

Tant vaut tester si, parmi les six entiers 0, 1, 2, 3, 4 ou 5, il y en a un pour lequel $(b+4)^2 \times b^2$ est par un heureux hasard la puissance cinquième d'un entier non nul (ce qui déjà exclut le cas $b = 0$, reste cinq entiers à tester).

b	1	2	3	4	5
$(b+4)^2 \times b^2$	25	144	441	1024	2025

Des cinq nombres obtenus, un, et un seul, est effectivement la puissance cinquième d'un entier, c'est 1024 qui est la puissance cinquième de 4. Ainsi, le problème a bien une solution, et une seule : $b = 4$; $a = 8$.

Le code PIN de Yasmine est le code : 8448.

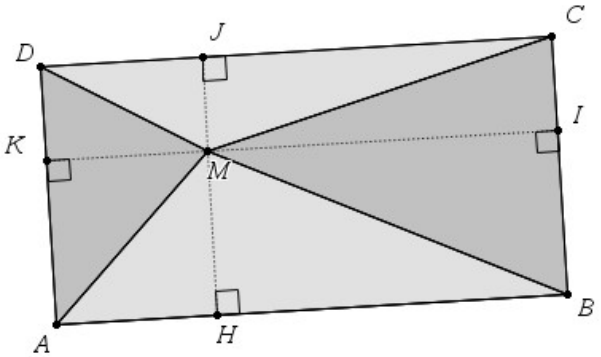
4. Nous avons vu que l'entier dont l'écriture décimale est $\overline{abba}$ est : $N = 1001a + 110b = 11 \times (91a + 10b)$

Cet entier est divisible par 11. Il ne pourrait être premier que s'il pouvait s'agir de 11 lui-même, c'est-à-dire si l'on pouvait trouver deux chiffres a et b tels que : $91a + 10b = 1$, ce qui est impossible.

Aucun des codes S n'est un nombre premier.

Problème 3 : Partage d'un carré

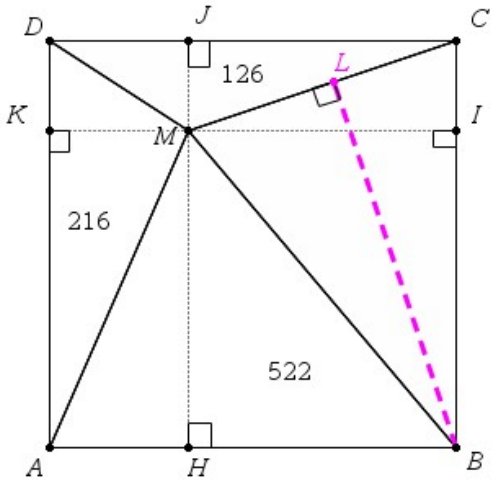
1. La réponse est oui, et sa justification a un rapport direct avec une propriété générale des rectangles (*dont la démonstration*[1] *donnée en note de bas de page n'était probablement pas exigée*) :



Soit *ABCD* un rectangle et *M* un point strictement intérieur à ce rectangle. Alors, la somme des aires des triangles *MAB* et *MCD* est égale à la somme des aires des triangles *MBC* et *MDA* (voir figure):

$$aire(MAB) + aire(MCD) = aire(MBC) + aire(MDA)$$

Chacune de ces sommes est égale à la moitié de l'aire du rectangle.



Commençons par compléter le codage de la figure, en notant *A, B, C, D* les sommets du carré.

Appliquons au carré *ABCD* et à son point *M* intérieur la « propriété générale des rectangles » citée ci-dessus :

$522 + 126 = aire(MBC) + 216$

Et par conséquent :

$aire(MBC) = 522 + 126 - 216 = 432$

L'aire du triangle *MBC* est égale à 432 unités d'aire.

---

[1] *Démonstration :* Soit *H, I, J, L* les projections orthogonales de *M* sur les côtés [*AB*], [*BC*], [*CD*], [*DA*] du rectangle. Chacun des quadrilatères *MHBI*, *MICJ*, *MJDK*, *MKAH* est un rectangle, car pourvu de trois angles droits.
Leurs diagonales respectives [*MB*], [*MC*], [*MD*], [*MA*] les partagent chacun en deux triangles superposables.

$aire(MAB) + aire(MCD) = (aire(MHA) + aire(MHB)) + (aire(MJC) + aire(MJD))$

En tenant compte que les triangles superposables en jeu sont deux à deux de même aire :

$aire(MAB) + aire(MCD) = (aire(MKA) + aire(MIB)) + (aire(MIC) + aire(MKD))$ soit en associant autrement :

$aire(MAB) + aire(MCD) = (aire(MKA) + aire(MKD)) + (aire(MIC) + aire(MID))$

On obtient ainsi la relation : $aire(MAB) + aire(MCD) = aire(MDA) + aire(MBC)$

Les sommes $aire(MAB) + aire(MCD)$ d'une part et $aire(MDA) + aire(MBC)$ d'autre part sont égales.

L'aire du rectangle étant la somme des quatre aires $(aire(MAB) + aire(MCD)) + (aire(MDA) + aire(MBC))$, elle est égale à deux fois l'une des deux.

2. Soit *H, I, J, K* les projections orthogonales de *M* sur les côtés du carré, et *L* le pied de la hauteur issue de *B* dans le triangle *MBC*. La mission est de calculer la longueur du segment [*BL*].

Nous allons d'abord tenter de calculer la longueur du segment[*MC*]. Plusieurs étapes sont nécessaires.

- Calcul de l'aire du carré : deux fois la somme $aire(MAB)+aire(MCD)$, c'est-à-dire $2(522+126)=1296$
- Calcul du côté du carré : la racine carrée de l'aire du carré, c'est-à-dire : $\sqrt{1296}=36$
- Calcul de *MJ* (hauteur du triangle *MCD*) : $\frac{1}{2}MJ\times CD=aire(MCD)$ soit $\frac{1}{2}MJ\times 36=126$, relation qui nous donne : $MJ=7$
- Calcul de *MI* (hauteur du triangle *MBC*) : $\frac{1}{2}MI\times BC=aire(MBC)$ soit $\frac{1}{2}MI\times 36=432$, relation qui nous donne : $MI=24$
- Le segment[*MC*] est une diagonale du rectangle *MICJ*, dont nous connaissons la longueur des côtés. La longueur de la diagonale d'un rectangle est égale à la racine carrée de la somme des carrés des côtés. Soit : $MC=\sqrt{MJ^2+MI^2}=\sqrt{7^2+24^2}=\sqrt{625}=25$

Nous sommes maintenant en mesure de calculer *BL* en exprimant d'une deuxième façon, en fonction de *MC* et de *BL* maintenant, l'aire du triangle *MBC* :

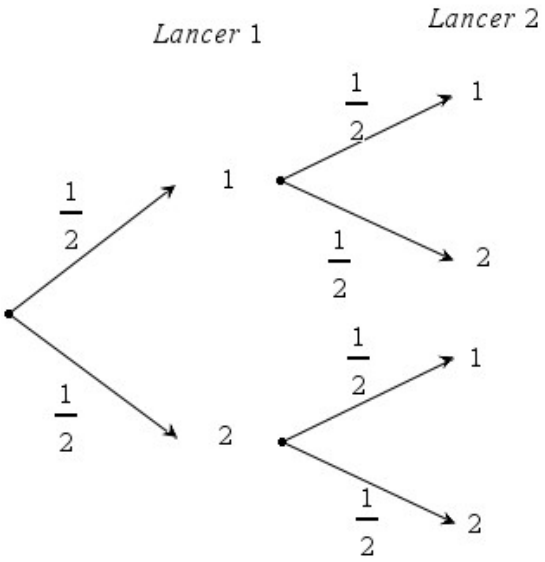
$\frac{1}{2}BL\times MC=aire(MBC)$ soit $\frac{1}{2}BL\times 25=432$, relation qui nous donne : $BL=\frac{864}{25}=34{,}56$.

La longueur *h* de la « hauteur du quatrième triangle » est égale à **34,56 unités de longueur**.

Exercice 2 : Pièces en chocolat

Partie I : Trucage et pépites de chocolat

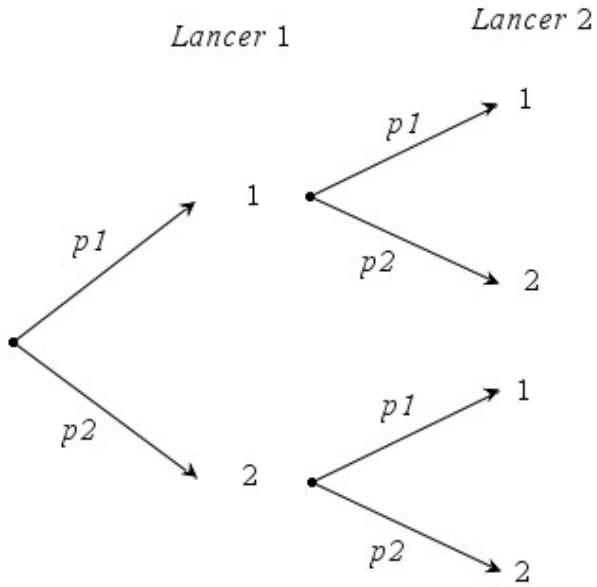
1. Nous pouvons associer à cette expérience l'univers $\Omega = \{(1,1)\,;\,(1,2)\,;(2,1)\,;\,(2,2)\} = \{1,2\} \times \{1,2\}$ des quatre couples de nombres que l'on peut obtenir. Les pièces étant supposées « équilibrées », cet univers est muni de l'équiprobabilité, chaque élément de Ω a pour probabilité $\frac{1}{4}$.



La variable aléatoire S = « somme des nombres obtenus » prend les valeurs 2 et 4 pour un seul couple, et la valeur 3 pour deux couples. Il en résulte :

$$P["S=2"] = P["S=4"] = \frac{1}{4} \text{ et } P["S=3"] = \frac{1}{2}$$

2. Dans cette question l'univers Ω est le même, mais il n'est plus muni de l'équiprobabilité. Nous devons calculer les probabilités de chacune des quatre éventualités. Par simple lecture sur l'arbre de probabilité ci-contre :
$P[(1,1)] = p_1^{\,2}$; $P[(1,2)] = P[(2,1)] = p_1\,p_2$; $P[(2,2)] = p_2^{\,2}$.



La distribution de probabilité de la variable aléatoire S est maintenant la suivante :

$$P["S=2"] = p_1^{\,2},\quad P["S=4"] = p_2^{\,2} \text{ et } P["S=3"] = 2\,p_1 p_2$$

2.a. Les probabilités p_1 et p_2 sont les probabilités de deux évènements complémentaires, puisque les évènements « la pièce tombe sur 1 » et « la pièce tombe sur 2 » constituent une alternative. Donc la relation : $p_1 + p_2 = 1$ doit être vérifiée.

D'autre part, une équiprobabilité des trois valeurs prises par S nécessiterait que : $p_1^{\,2} = p_2^{\,2} = 2p_1p_2 = \frac{1}{3}$, et, entre autres relations, $p_1p_2 = \frac{1}{6}$ (et non $\frac{1}{3}$ comme le prétend l'énoncé).

b. La relation $p_1p_2 = \frac{1}{6}$ n'est pas immédiatement décisive pour conclure. En revanche, les relations nécessaires $p_1^{\,2} = p_2^{\,2} = \frac{1}{3}$ impliqueraient que $p_1 = p_2 = \sqrt{\frac{1}{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$ ce qui est incompatible avec la relation $p_1 + p_2 = 1$.
Il n'est pas possible de truquer les deux pièces de façon à obtenir l'équiprobabilité des trois valeurs.

Partie II : En choisissant bien les faces

Dans cette partie, ce n'est pas tellement l'univers Ω qui change, mais plutôt les valeurs que prend la variable aléatoire S sur cet univers.

1. Si $<0/2>$ et $<1/2>$ désignent les deux pièces utilisées : $\Omega = \{(0,1)\,;\,(0,2)\,;(2,1)\,;\,(2,2)\} = \{0,2\} \times \{1,2\}$. Cet univers est toujours constitué de quatre éléments et est toujours muni de l'équiprobabilité, comme dans la question **I.1**. Rien de changé.

En revanche, la variable aléatoire S = « somme des nombres obtenus » prend maintenant les valeurs 1, 2, 3 et 4, chacune pour un et un seul élément de Ω. De ce fait, les quatre valeurs prises par S sont équiprobables.

2. Nous pouvons associer à cette nouvelle expérience l'univers constitué des huit triplets des nombres que l'on peut obtenir, muni de l'équiprobabilité (chaque triplet ayant la même probabilité $\frac{1}{8}$). Il nous faut donc obtenir avec ces huit triplets huit sommes différentes et qui soient égales aux entiers de 1 à 8. Chaque valeur étant associée à un seul triplet, l'équiprobabilité des huit en résultera.

Nous allons montrer qu'il est possible de garder les deux pièces précédentes et de choisir convenablement la troisième pièce pour atteindre cet objectif.
Notons $<x_3 / y_3>$ la troisième pièce, en supposant de plus que $x_3 \leq y_3$.
Décrivons l'ensemble Ω et les valeurs prises par S :

$(0,\ 1,\ x_3)$	$(0,\ 1,\ y_3)$	$(0,\ 2,\ x_3)$	$(0,\ 2,\ y_3)$	$(2,\ 1,\ x_3)$	$(2,\ 1,\ y_3)$	$(2,\ 2,\ x_3)$	$(2,\ 2,\ y_3)$
$1+x_3$	$1+y_3$	$2+x_3$	$2+y_3$	$3+x_3$	$3+y_3$	$4+x_3$	$4+y_3$

Puisque nous devons obtenir la somme 1, nécessairement $x_3 = 0$, ce qui nous conduit à la description suivante :

$(0,\ 1,\ 0)$	$(0,\ 1,\ y_3)$	$(0,\ 2,\ 0)$	$(0,\ 2,\ y_3)$	$(2,\ 1,\ 0)$	$(2,\ 1,\ y_3)$	$(2,\ 2,\ 0)$	$(2,\ 2,\ y_3)$
1	$1+y_3$	2	$2+y_3$	3	$3+y_3$	4	$4+y_3$

Les sommes 1, 2, 3 et 4 sont atteintes, et il reste à atteindre les sommes 5, 6, 7 et 8, ce qui est acquis à condition de choisir nécessairement : $y_3 = 4$. Avec ce choix, la somme S atteint les huit entiers de 1 à 8, chacun pour un seul triplet.

Oui, il est possible que les huit sommes soient équiprobables, en jouant avec les trois pièces : $<0/2>$, $<1/2>$ et $<0/4>$

3. La question **2** nous suggère de considérer dans le cas général comme nouvelle pièce la pièce équilibrée : $<0/2^n>$. Désignons par S_n la somme obtenue avec les n premières pièces, X_{n+1} la valeur obtenue sur la nouvelle pièce, et S_{n+1} la somme $S_{n+1} = S_n + X_{n+1}$ des nombres obtenus avec toutes les pièces.

En supposant que S_n prend les valeurs $1, 2,..., 2^n$, la variable aléatoire S_{n+1} prend, suivant la valeur de X_{n+1}, les valeurs $1, 2,..., 2^n$ ainsi que les valeurs $1+2^n, 2+2^n,..., 2^n+2^n = 2^{n+1}$, donc toutes les valeurs de $\{1, 2,..., 2^{n+1}\}$

Pour chaque valeur de i de $\{1, 2,..., 2^n\}$: $("S_{n+1} = i") = ("S_n = i") \cap ("X_{n+1} = 0")$ et pour chaque valeur de i de $\{2^n+1, 2^n2,..., 2^{n+1} = 2^n + 2^n\}$ $("S_{n+1} = i") = ("S_n = i - 2^n") \cap ("X_{n+1} = 2^n")$.

Si on dispose de n pièces permettant que toutes les valeurs $1, 2,..., 2^n$ aient la même probabilité, cette probabilité commune est égale à $\frac{1}{2^n}$. En raison de l'indépendance des lancers, les probabilités des intersections dont il vient d'être question sont les produits des probabilités des évènements en jeu. D'autre part : $P["X_{n+1} = 0"] = P["X_{n+1} = 2^n"] = \frac{1}{2}$ puisque la nouvelle pièce est équilibrée.

On obtient : $P["S_{n+1} = i"] = \frac{1}{2^n} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2^{n+1}}$, que i appartienne à $\{1, 2,..., 2^n\}$ ou qu'il appartienne à $\{2^n+1, 2^n2,..., 2^{n+1} = 2^n + 2^n\}$, donc finalement pour tout i appartenant à $\{1, 2,..., 2^{n+1}\}$

La somme S_{n+1} prend, de façon équiprobable, toutes les valeurs de $\{1, 2,..., 2^{n+1}\}$.

Conclusion : Si on dispose de n pièces permettant l'équiprobabilité des valeurs $1, 2,..., 2^n$, alors on peut adjoindre une nouvelle pièce de façon à obtenir les valeurs $1, 2,..., 2^{n+1}$ de façon équiprobable.

Nous pouvons conclure que, pour tout entier n supérieur ou égal à 2, nous pouvons toujours choisir n pièces de façon à obtenir toutes les valeurs $1, 2,..., 2^n$ de façon équiprobable. (Une solution est de choisir : $<1/2>$; $<0/2>$; $<0/2^2>$;...;$<0/2^{n-1}>$)

NB. *L'énoncé nous a guidés dans la mise au point d'une « démonstration par récurrence », technique de démonstration remarquable : la question **1** a **initialisé** la propriété en jeu (c'est possible pour 2 pièces), le rôle (accessoire) de la question **2** est de nous orienter vers une démarche et la question **3** montre que cette propriété est **héréditaire** (si c'est possible pour n pièces, alors c'est possible pour $n+1$ pièces). La propriété en jeu est vraie pour tout entier à partir de l'entier d'initialisation, donc à partir de l'entier 2.*