

www.freemaths.fr

SUJET + CORRIGÉ

OLYMPIADES DE MATHÉMATIQUES

ACADÉMIE DE POITIERS

Classes de première S • 2016



Olympiades académiques de mathématiques

Académie de Poitiers 2016

Mercredi 16 mars de 8 heures à 12 heures 10

- Pause de 10 heures à 10 heures 10

Série S

Énoncés de la deuxième partie de 10 heures 10 à 12 heures 10

L'épreuve se déroule en deux parties indépendantes de deux heures chacune, **les énoncés des deux parties sont donc séparés et distribués séparément à des moments différents**. Les copies rédigées sont ramassées à l'issue de la première partie (« deux exercices nationaux »). Une pause de dix minutes est prévue, avant la seconde partie (« deux exercices académiques »). **Les candidats peuvent être libérés lors de la deuxième partie dès qu'ils en expriment le souhait après avoir rendu leur copie.**

Les calculatrices sont autorisées selon la législation en vigueur.

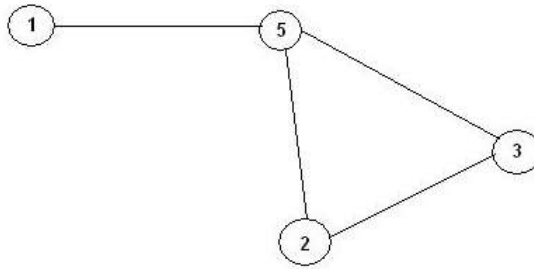
Il est conseillé aux candidats qui ne pourraient formuler une réponse complète à une question d'exposer le bilan des initiatives qu'ils ont pu prendre.

Les énoncés doivent être rendus au moment de quitter définitivement la salle de composition.

Exercice académique numéro 1

On considère un graphe avec des chiffres dans les nœuds. A chaque nœud on fait correspondre la somme de ses voisins.

Par exemple :



Ici, 1 est associé avec 5 ;

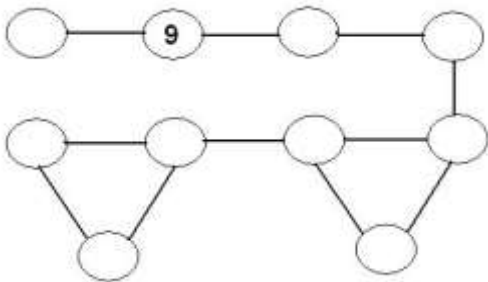
5 est associé avec $1+2+3=6$

2 est associé avec $5+3=8$

Et 3 est associé avec $2+5=7$.

On a mis les entiers de 0 à 9 dans le graphe suivant et associé à chaque nœud la somme de ses voisins.

Malheureusement, presque tous les chiffres ont été effacés.



A vous de les retrouver sachant que :

$$0 \rightarrow 10$$

$$3 \rightarrow 9$$

$$6 \rightarrow 9$$

$$1 \rightarrow 9$$

$$4 \rightarrow 18$$

$$7 \rightarrow 9$$

$$9 \rightarrow 9$$

$$2 \rightarrow 10$$

$$5 \rightarrow 10$$

$$8 \rightarrow 9$$

Remarque : la \rightarrow signifie est « associée à »

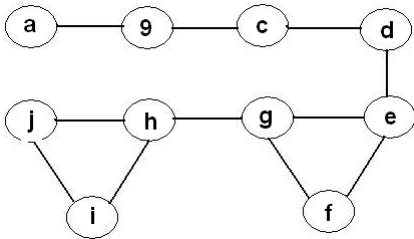
Exercice académique numéro 2

- 1) Vérifier que, pour tous réels x, y, z , on a : $(x + y + z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2xz + 2yz$.
- 2) La somme des aires des faces d'un parallélépipède rectangle est 22 cm^2 et la somme des longueurs de ses arêtes est 24 cm . Déterminer la longueur de ses diagonales intérieures.

Corrigés des Olympiades 1ères 2016 de l'académie de Poitiers

Exercice académique 1 (Série S) :

On introduit des noms pour les nœuds des graphes, que nous allons au fur et à mesure remplacer par les chiffres de 0 à 8.



On a

$$a \rightarrow 9$$

$$9 \rightarrow a+c$$

$$c \rightarrow 9+d$$

$$d \rightarrow c+e$$

$$e \rightarrow d+f+g$$

$$f \rightarrow e+g$$

$$g \rightarrow e+f+h$$

$$h \rightarrow g+i+j$$

$$i \rightarrow h+j$$

$$j \rightarrow h+i$$

Or $9 \rightarrow 9$ et $9 \rightarrow a+c$ donc $a+c=9$ et alors **$c=9-a$**

De plus, $c \rightarrow 9+d$ avec $0 \leq d \leq 8$; donc $c \rightarrow 9$ ou 10 car on ne peut pas atteindre les 18 ! Alors **$d=0$ ou 1** .

Si **$d=1$** , $c \rightarrow 10$ donc $c=0, 2$ ou 5 et $d=1 \rightarrow 9=c+e$. d'où $c=9-e=9-a$ donc $a=e$ IMPOSSIBLE.

Donc **$d=0$** .

Alors $c \rightarrow 9$ donc **$c=1, 3, 6, 7$ ou 8** .

Comme $d=0$ et $0 \rightarrow 10$, **$c+e=10$** et **$c+a=9$** donc $e-a=1$ et **$e=a+1$** .

Alors pour le triplet (a,c,e) on a comme possibilités :

$(1,8,2)$

$(2,7,3)$ Impossible car $2 \rightarrow 10$ et $a \rightarrow 9$ donc $a \neq 2$

$(3,6,4)$

$(4,5,5)$ Impossible car $c=e$

$(5,4,6)$ Impossible car $a \rightarrow 9$ et $5 \rightarrow 10$ donc $a \neq 5$

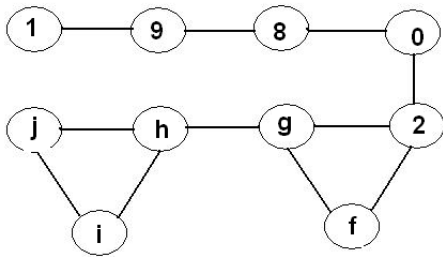
$(6,3,7)$

Et $(7,2,8)$ Impossible car $c \rightarrow 9$ et $2 \rightarrow 10$ donc $c \neq 2$

Il ne reste que 3 possibilités.

Testons le triplet $(1,8,2)$:

On a :



C'est h qui a le plus de voisins, c'est donc lui le seul susceptible d'être associé à 18, donc **h=4**.

Alors $g \rightarrow 2+4+f=6+f$ et cette somme vaut 9 ou 10. Pour faire 10 il manque 4 qui est déjà utilisé donc **f=3**.

Alors $g \rightarrow 9$ et il ne reste que **g=6 ou 7**.

Si $g=6$, alors $h=4 \rightarrow g+i+j=6+i+j=18$ donc $i+j=12$ donc $j=12-i$ et alors $i=5$ et $j=7$, ou $i=7$ et $j=5$ ou $i=6$ et $j=6$. Or $i \neq j$.

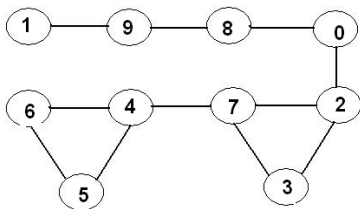
Si $i=5$ et $j=7$, $i=5 \rightarrow h+j=4+7=11$ impossible.

Si $i=7$ et $j=5$, $i=7 \rightarrow h+j=4+5=9$ et $j=5 \rightarrow i+h=7+4=11$ impossible.

On obtient donc **g=7**.

Alors $h=4 \rightarrow i+j+g=7+i+j=18$ donc $i+j=11$ et alors **i=5** et **j=6** ou l'inverse. Les deux conviennent.

On a finalement :



Testons le triplet (3,6,4) : 4 n'a que deux voisins dans ce cas, et il est impossible de faire 18 avec 1,2,5,7 et 8.

Testons le triplet (6,3,7) :

On a $7 \rightarrow g+f=9$ donc $(f,g)=(1,8)$ ou $(4,5)$.

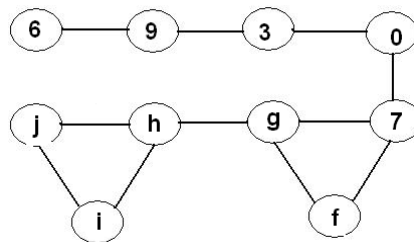
Si $f=1$, $1 \rightarrow 9$ et $f=1 \rightarrow g+7=8+7=15$ impossible

Si $f=8$, $8 \rightarrow 9$ et $f=8 \rightarrow g+7=1+7=8$ impossible

Si $f=5$, $5 \rightarrow 10$ et $f=5 \rightarrow g+7=4+7=11$ impossible

Si $f=4$, $4 \rightarrow 18$ et $f=4 \rightarrow g+7=5+7=12$ impossible

Donc le triplet (6,3,7) est impossible.



Exercice académique 2 (Série S) :

- 1) On développe $(x + y + z)(x + y + z)$.
- 2) Soit x, y, z les longueurs des arêtes du parallélépipède rectangle.

On a $2(xy + xz + yz) = 22$ et $4(x + y + z) = 24$.

La longueur d'une de ses diagonales est $\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

soit $\sqrt{(x + y + z)^2 - 2(xy + xz + yz)} = \sqrt{6^2 - 22} = \sqrt{14}$ cm d'après l'égalité du 1).