SUJET + CORRIGÉ

OLYMPIADES DE MATHÉMATIQUES

ACADÉMIE DE POITIERS

Classes de première S • 2014

académie
Poitiers

MINISTÈRE DE
L'ÉDUCATION NATIONALE

MINISTÈRE DE
L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR
ET DE LA RECHERCHE

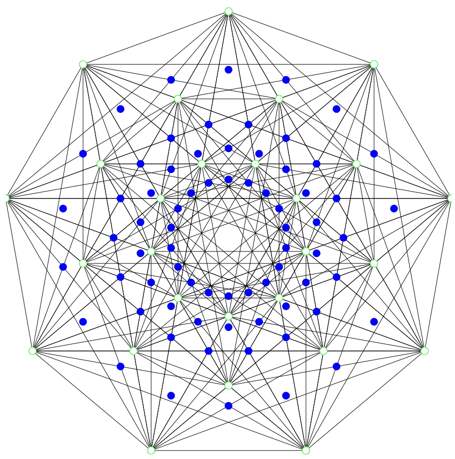
Liberté • Égalité • Fraternité
RÉPUBLIQUE FRANÇAISE

Olympiades académiques de mathématiques

Session 2014

Classes de Première

Énoncés et corrigés des exercices



Exercice académique n° 1 : Le veuf Strogonoff

Michel Strogonoff était veuf, mais il était beau.
Pour des raisons obscures, il décida de partir à l'aventure, sans un kopek en poche, à travers les étendues infinies de la Sibérie.

Las, à peine avait-il parcouru une verste[1] qu'il rencontra un ermite qui lui dit comme ça : "Michel Strogonoff, donne-moi un rouble, ou tu t'en repentiras."
- Mais, mon pauvre ermite, je suis trop pauvre, je ne peux pas te donner un rouble."
- Puisque c'est comme ça, répliqua l'ermite, c'est moi qui vais te donner un rouble ! Tiens !"
Michel Strogonoff était un peu surpris, mais content, et il reprit sa route, avec un rouble dans la poche.

Une verste plus loin, nouvel ermite, même tableau :
"Michel Strogonoff, donne-moi deux roubles, ou tu t'en repentiras."
- Mais, mon pauvre ermite, je suis trop pauvre, je ne peux pas te donner deux roubles."
- Puisque c'est comme ça, répliqua l'ermite, c'est moi qui vais te donner deux roubles ! Tiens !"
Michel Strogonoff était toujours un peu surpris, mais de plus en plus content, et il reprit sa route, avec maintenant trois roubles dans la poche.

Et à la fin de la troisième verste, ça recommence avec un troisième ermite :
"Michel Strogonoff, donne-moi trois roubles, ou tu t'en repentiras."
- Tiens, mon pauvre ermite, je me réjouis de pouvoir soulager ta misère !"
Et Michel Strogonoff lui donna ses trois roubles, et reprit sa route, la bourse vide, à la fois surpris et content, car un rien l'étonnait et c'était un heureux caractère.

Et ça continue comme ça, à la fin de la n-ième verste, un ermite lui demande n roubles. Si Michel Strogonoff les possède, il les lui donne, sinon c'est l'ermite qui lui donne n roubles.

1) Après avoir quitté le dixième ermite (donc après 10 verstes), combien Michel Strogonoff possède-t-il ?

2) Après avoir parcouru 2008 verstes et quitté le 2008ème ermite, combien Michel Strogonoff possède-t-il ?

3) Quelle distance (en verstes) Michel Strogonoff devra-t-il parcourir pour détenir pour la première fois la coquette somme de 2008 roubles ?

1 Unité de longueur utilisée dans la Russie des Tsars, équivalant à un peu plus d'un kilomètre.

LE VEUF STROGONOFF
ELEMENTS DE CORRECTION

L'exercice traite d'une suite numérique qu'on peut définir ainsi:

$$\begin{cases} u_0 = 0 & \\ u_n = u_{n-1} - n & \text{si } u_{n-1} \geqslant n \\ u_n = u_{n-1} + n & \text{sinon} \end{cases} \quad , \forall n \geqslant 1 \quad .$$

1) On obtient de proche en proche:

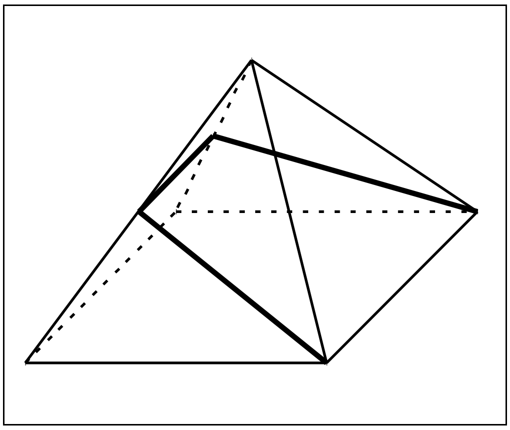
n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
u_n	1	3	0	4	9	3	10	2	11	1

2) On montre (ou on constate) que : si $1 \leqslant u_n \leqslant n$, alors $u_{n+2} = u_n - 1$,
et que : si $u_n \geqslant n+1$, alors $u_{n+2} = u_n + 1$.
Ces résultats permettent de conclure que : si $u_n = 0$, alors $u_{n+1} = n+1$, $u_{n+3} = n, \ldots, u_{3n+3} = 0$.
On peut alors trouver : $u_0 = u_3 = u_{12} = u_{39} = u_{120} = u_{363} = u_{1092} = u_{3279} = 0$.
Et à partir de $u_{1093} = 1093$, on arrive à $u_{2007} = 1093 - \frac{2007-1093}{2} = 636$ et $u_{2008} = 2644$.

3) Les u_n pour $1092 \leqslant n \leqslant 3279$ sont tous à l'extérieur de l'intervalle [1094 ; 2186]. Il faut donc chercher plus loin:
$u_{3280} = 3280$; $u_{3280+2k} = 3280 - k$ (pour $k \leqslant 3280$). On obtient alors, pour $k = 1272$: $u_{5824} = 2008$.

Exercice académique n° 2 : Le goûter

Exercice (première S)



C’est l’heure du goûter ; deux amis, un artiste et un géomètre décident de s’attabler dans une pâtisserie. Ils ne commandent qu’un seul gâteau pour eux deux. Leur choix se porte sur un joli moka au café en forme de pyramide équilatère*. Le géomètre s’apprête à le partager équitablement en plaçant son couteau sur le sommet comme il est d’usage. L’artiste arrête alors son geste et lui propose une découpe plus originale : placer la lame sur le milieu d’une arête, parallèle à un côté de la base, puis couper en se dirigeant vers le côté opposé. Le géomètre a des doutes, les parts ne lui semblent pas égales.

* Pyramide régulière à base carrée dont toutes les faces latérales sont des triangles équilatéraux.

Les arêtes ont toutes pour longueur 10 cm.

a) Calculer le volume exact de cette pyramide équilatère.
b) Quelle fraction du volume de la pyramide équilatère représente effectivement le volume de la part du dessus qui a la forme d’une pyramide à base trapézoïdale ?
c) Plutôt qu’au milieu, en quel point de l’arête faudrait-il placer la lame, pour qu’en procédant de la sorte, le partage soit équitable ?

Résumé :

La première question est classique, on obtient environ 235,7cm^3. Pour la seconde question on recoupe la pyramide selon le plan (SAC) et on obtient ainsi quatre morceaux. Les tétraèdres SIBC et SIJC ont des volumes dans un rapport ½. Comme les volumes de SIBC et de AIBC sont égaux on tire que Vol(SIJCB) = 3/8 Vol(SABCD). Enfin pour la dernière question on reprend la coupe selon le plan (SAC) et on écrit que l’on veut Vol(SIJCB) = Vol(SABC), en posant x = SA/SI on aboutit à l’équation $\boxed{x^2 - x - 1 = 0}$ dont la solution positive est le nombre d’or. Pour partager en deux parts égales la pyramide équilatère selon la méthode préconisée par l’artiste il faudrait donc placer la lame au point de l’arête qui la divise en moyenne et extrême raison.

<u>Remarque 1.</u> On aurait aussi pu procéder de la façon suivante : on prolonge le segment [IJ] en le segment [I’J’] afin d’obtenir le prisme droit à base triangulaire AI’BDJ’C dont le volume est facilement exprimable et on ôte à ce prisme les tétraèdres identiques IAI’B et JDJ’C.

<u>Remarque 2.</u> Les réponses données aux deux dernières questions restent valables pour une pyramide quelconque dont la base est un parallélogramme.