SUJET + CORRIGÉ

OLYMPIADES DE MATHÉMATIQUES

ACADÉMIE DE POITIERS

Classes de première S • 2012

SESSION 2012

OLYMPIADES ACADEMIQUES DE MATHEMATIQUES ACADEMIE DE POITIERS

Classe de première

MERCREDI 21 MARS 2012

Durée de l'épreuve : 4 heures

Les quatre exercices sont indépendants.
Les candidats de la série S traiteront les exercices 1, 2,3 et « l'exercice 4 série S »
Les candidats des autres séries traiteront les exercices 1, 2,3 et « l'exercice 4 autres séries »

Ce sujet comporte six pages numérotées 1, 2, 3, 4, 5,6

Dans ces quatre exercices, toute idée ou élément de démonstration, s'ils sont intéressants et clairement rédigés, seront pris en compte même s'ils ne conduisent pas à une solution. Les exercices sont indépendants et peuvent être traités dans n'importe quel ordre.

EXERCICE 1

On dit qu'un nombre entier est *digisible* lorsque les trois conditions suivantes sont vérifiées :

- aucun de ses chiffres n'est nul ;
- il s'écrit avec des chiffres tous différents ;
- il est divisible par chacun d'eux.

Par exemple,

- 24 est *digisible* car il est divisible par 2 et par 4.
- 324 est *digisible* car il est divisible par 3, par 2 et par 4.

- 32 n’est pas *digisible* car il n’est pas divisible par 3.

On rappelle qu’un nombre entier est divisible par 3 si et seulement si la somme de ses chiffres est divisible par 3.

1. Proposer un autre nombre *digisible* à deux chiffres.

2. Proposer un nombre *digisible* à quatre chiffres.

3. Soit n un entier *digisible* s'écrivant avec un 5.

a. Démontrer que 5 est le chiffre de ses unités.

b. Démontrer que tous les chiffres de n sont impairs.

c. Démontrer que n s'écrit avec au plus quatre chiffres.

d. Déterminer le plus grand entier *digisible* s'écrivant avec un 5.

4. Soit n un entier *digisible* quelconque.

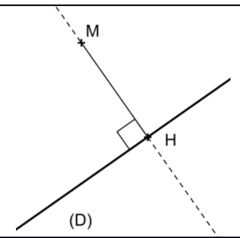
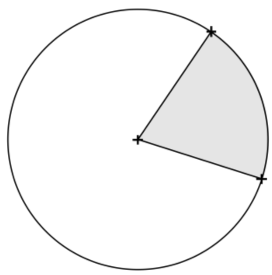
a. Démontrer que n s'écrit avec au plus sept chiffres.

b. Si n s'écrit avec sept chiffres, dont un 9, déterminer les chiffres de n.

c. Déterminer le plus grand entier *digisible*.

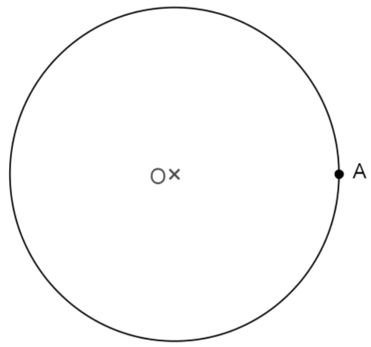
EXERCICE 2

Rappels

• *On appelle* ***distance entre un point M et une droite (D)*** *la distance MH, où H est le point d’intersection de (D) avec la droite perpendiculaire à (D) passant par M.*	
• *Dans la figure ci-contre, si le rayon du disque est R, et si l’angle du secteur angulaire grisé mesure α (en degrés), alors* ***l’aire de la portion de disque*** *grisée vaut* $\pi\alpha R^2/360$. *Dans la partie II de l’exercice, on considérera la distance d’un point M à* ***un segment [****BC] comme étant la distance du point M à la droite (BC).*	

Partie I

Soit C un cercle de centre O, A un point de ce cercle et D le disque délimité par ce cercle.



1. Reproduire la figure, et représenter l'ensemble des points du disque équidistants de O et de A.

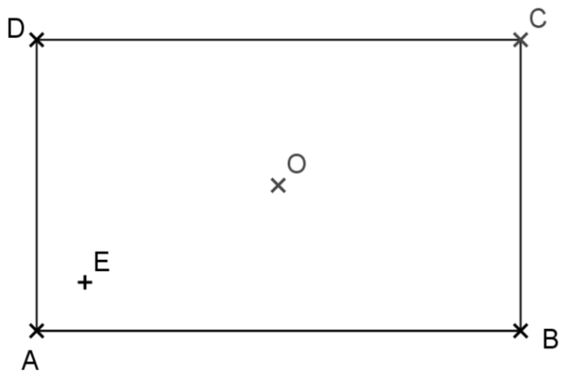
2. Hachurer l'ensemble des points du disque plus proches de O que de A.

3. Soit M un point déterminé aléatoirement de manière équiprobable sur la surface du disque D.

Quelle est la probabilité que M soit plus proche de O que de A ?

Partie II

Soit ABCD un rectangle de longueur AB = 20 cm et de largeur BC = 12 cm, de centre O.
Soit E un point situé à l'intérieur du rectangle, proche de A, à 2 cm de chaque bord (comme sur la figure ci-après, qui n'est toutefois pas à l'échelle).
Soit M un point déterminé aléatoirement de manière équiprobable à l'intérieur du rectangle ABCD.



1. Quelle est la probabilité que M soit plus proche du côté [BC] que du côté [AD] ?
2. ***a.*** Reproduire le rectangle, et représenter l'ensemble des points intérieurs au rectangle et équidistants des côtés [AB] et [BC].
   b. Hachurer l'ensemble des points intérieurs au rectangle et plus proches du côté [BC] que du côté [AB].

   c. Quelle est la probabilité que M soit plus proche du côté [BC] que du côté [AB] ?

3. Quelle est la probabilité que M soit plus proche du côté [AB] que des trois autres côtés [BC], [CD] et [DA] ?

4. Quelle est la probabilité que M soit plus proche de O que de E ?

5. Quelle est la probabilité que M soit plus proche de O que des quatre sommets A, B, C et D ?

EXERCICE 4 « série S »

Soit N_{1000} l'ensemble des nombres entiers compris entre 1 et 999.

On définit sur N_{1000} la fonction F de la manière suivante : si n appartient à N_{1000}, on remplace chaque chiffre a de l'écriture décimale de n par $2a+2$, qui est un nombre à un ou deux chiffres. Le nombre F(n) est alors obtenu en écrivant à la suite ces nombres.

Par exemple, si $n = 3$, il y a un seul chiffre $a = 3$ qui est remplacé par 2 x 3 + 2 = 8. Donc F(3) = 8.

Si $n = 47$, on remplace le chiffre 7 par 2 x 7 + 2 = 16, le chiffre 4 par 2 x 4 + 2 = 10, donc F(47) = 1016 (10 suivi de 16).

De même, F(526) = 12614 (12 suivi de 6 suivi de 14).

1. Calculer F(857).

2. On suppose, dans cette question seulement, que n est un nombre à deux ou trois chiffres : $n = cdu$ (u est le chiffre des unités, d est celui des dizaines et c celui des centaines). On note n' le nombre à un ou deux chiffres cd obtenu en retirant de l'écriture de n le chiffre des unités.

Par exemple, si $n = 47$, $n' = 4$; si $n = 247$, $n' = 24$.

Montrer que F(n) = 10 F(n') + F(u) ou F(n) = 100 F(n') + F(u). Préciser, en fonction de la valeur de u, quelle égalité on doit utiliser.

3. Montrer que l'équation F(n) = 3n a trois solutions.

Indication - Commencer par déterminer le chiffre u des unités de n, puis chercher n'...

4. L'équation F(n) = 5n a-t-elle des solutions?

5. Résoudre l'équation F(n) = 23n.

EXERCICE 3

Le rectangle AH'A'H ci-dessous est pavé par quatre pièces numérotées 1, 2, 3 et 4, **toutes de même forme** et il y a seulement deux tailles de pièce. Les grandes pièces 1 et 2 sont identiques de même que les pièces 3 et 4. Il y a donc proportionnalité entre les côtés correspondants des grandes pièces et des petites pièces.
Pour des raisons esthétiques on impose FG = AH/2.

1) Pourquoi a-t-on alors obligatoirement BC = DE ?
2) Si AH = 8 et HG = 4, que valent les autres côtés de la pièce 1 ? Donner aussi les longueurs des côtés de la pièce 4.
3) Même question que la précédente avec AH = 8 et AB = 9.
4) Si les dimensions du rectangle AH'A'H sont AH' = 13 et AH = 12, que valent les côtés des pièces 1 et 4 ?
5) Peut-on paver un carré de la sorte ? Justifier la réponse.

CORRECTION, POITIERS 2012

Premier exercice Académique (exo 3)

Olympiades mathématiques, S

1. Les pièces 3 et 4 sont identiques donc $JK = LM$. Sur la pièce 1, qui est un agrandissement de ces pièces on retrouve donc l'égalité $BC = DE$.

2. D'après la question précédente on a $BC = DE = \dfrac{FG}{2} = \dfrac{AH}{4} = 2$. Les cotés [HG] de longueur 4 et [DE] de longueur 2 sont des côtés correspondants pour les pièces 1 et 4. Les longueurs des petites pièces sont donc la moitié de celles des grandes pièces.

   On a alors $EF = \dfrac{FG}{2} = 2, JF = \dfrac{EF}{2} = 1, DC = \dfrac{AH}{2} = 4, JK = LM = \dfrac{FE}{2} = 1, LK = \dfrac{DC}{2} = 2$, et comme $AB = HG - EF + DC = 4 - 2 + 4 = 6, CM = \dfrac{AB}{2} = 3$.

3. D'après la question 1) on a $BC = DE = \dfrac{FG}{2} = \dfrac{AH}{4} = 2$. Notons k le coefficient de proportionnalité qui permet de passer des longueurs des grandes pièces à celles des petites pièces.
   On sait que $FG = \dfrac{AH}{2}$ donc $EF = \dfrac{DC}{2}$.
   On a donc $AB = 9 = HG - EF + DC = HG + EF = \dfrac{DE}{k} + kFG = \dfrac{2}{k} + 4k$. Soit maintenant à résoudre $4k^2 - 9k + 2 = 0$ dont les deux solutions sont $\dfrac{1}{4}$et 2.
   On cherche $k < 1$, on retient donc $k = \dfrac{1}{4}$. On trouve alors $HG = 4DE = 8, EF = \dfrac{FG}{4} = 1$, $DC = \dfrac{AH}{4} = 2, JK = LM = \dfrac{BC}{4} = 0,5, LK = \dfrac{DC}{4} = 0,5, JF = \dfrac{EF}{4} = 0,25$, $CM = \dfrac{AB}{4} = 2,25$.

4. On a $FG = \dfrac{AH}{2} = 6, DE = BC = \dfrac{AH}{4} = 3$.

   Si on note k le coefficient de proportionnalité qui permet de passer des longueurs des grandes pièces à celles des petites pièces on a $HG = \dfrac{DE}{k} = \dfrac{3}{k}, DC = kAH = 12k, EF = \dfrac{DC}{2} = 6k$. Comme $AB = HG-EF+DC = \dfrac{3}{k}-6k+12k = \dfrac{3}{k}+6k$ alors $AH' = AB+BH' = \dfrac{3}{k}+6k+\dfrac{3}{k} = 6(k+\dfrac{1}{k}) = 13$. Soit donc à résoudre l'équation $k^2 - \dfrac{13k}{6} + 1 = 0$. On trouve deux solutions $\dfrac{2}{3}$ et $\dfrac{3}{2}$. Comme $k < 1$, on retient $k = \dfrac{2}{3}$. On trouve maintenant $HG = 4,5, DC = 8, EF = 4,\ JK = LM = \dfrac{EF}{2} = 2$, $AB = AH' - HG = 8,5,\ JF = kEF = \dfrac{8}{3},\ KL = kDC = \dfrac{16}{3},\ CM = kAB = \dfrac{17}{3}$.

5. Supposons que $AH' = AH = c$. Notons $HG = a, AB = b, DC = d$ et k le coefficient de proportionnalité qui permet de passer des longueurs des grandes pièces à celles des petites pièces.
   On a donc $0 < k < 1$. On a par hypothèse $a + b = c$, on a déjà vu que $a + \dfrac{d}{2} = b, d = kc$ et $\dfrac{c}{4} = ka$.
   Des deux premières équations on tire $c - a = a + \dfrac{d}{2}$ et en utilisant ensuite les deux dernières équations $2a = \dfrac{2c}{4k} = c - \dfrac{d}{2} = c - \dfrac{kc}{2}$. D'où $\dfrac{c}{2k} = c(1 - \dfrac{k}{2})$. Puisque c n'est pas nul on doit avoir $\dfrac{1}{2k} = \left(1 - \dfrac{k}{2}\right)$ et après manipulations élémentaires $k^2 - 2k + 1 = 0$ dont on sait que l'unique solution est 1. Comme k doit être inférieur à 1, il n'est pas possible de paver de la sorte un carré.

CORRECTION, POITIERS 2012

Second exercice Académique (exo 4)

Olympiades mathématiques, S

1. $F(857) = 181216$.
2. Supposons que c est non nul (le raisonnement est analogue et plus vite écrit si $c = 0$). Notons $U = 2u+2$, $D = 2d+2$ et $C = 2c+2$. Les nombres C, D et U ont un ou deux chiffres et le nombre $F(n)$ s'écrit CDU qui peut avoir entre trois et six chiffres.
   Supposons par exemple que C et D ont respectivement pour écriture décimale c_1c_2 et d_1d_2. Si U a un seul chiffre u_1, l'écriture décimale de $F(n)$ est $c_1c_2d_1d_2u_1$. Ce nombre vaut $10 \times c_1c_2d_1d_2 + u_1$. Vu la définition de F, $c_1c_2d_1d_2$ est l'écriture décimale de $F(n')$ et u_1 celle de $F(u)$. On a donc $F(n) = 10F(n') + F(u)$.
   Si U a deux chiffres u_1u_2, le nombre $F(n)$ s'écrit
   $$F(n) = c_1c_2d_1d_2u_1u_2 = 100 \times c_1c_2d_1d_2 + u_1u_2 = 100 \times F(n') + F(u).$$
   Ceci prouve le résultat demandé. La première formule s'applique quand $2u+2$ n'a qu'un chiffre ; c'est-à-dire quand $0 \leqslant u \leqslant 3$, la deuxième quand il a deux chiffres, pour $4 \leqslant u \leqslant 9$.
3. *Premier cas* : si n n'a qu'un chiffre, $F(n) = 2n+2$ et vaut $3n$ si et seulement si $n = 2$.

   Deuxième cas : si n a deux chiffres : $n = du$, le chiffre des unités de $F(n)$ est le chiffre des unités de $2u+2$. Le chiffre des unités de $3n$ est le chiffre des unités de $3u$. En écrivant côte-à-côte ces deux chiffres des unités pour $u = 0, 1, \dots, 9$, on constate qu'ils ne prennent la même valeur que pour $u = 2$.
   D'après la question précédente, on a donc
   $$F(n) = 10F(n') + F(2) = 10F(n') + 6 = 3n = 30n' + 6.$$
   (car le nombre qui s'écrit $n'2$ vaut $10n' + 2$).
   On en conclut que $F(n') = 3n'$ et donc $n' = 2$ d'après le premier cas. On a donc, dans ce cas, $n = 22$.

   Troisième cas : si $n = cdu$ a trois chiffres, comme ci-dessus, $u = 2$ et $F(n) = 10F(n') + F(2)$ et le même calcul montre que $F(n') = 3n'$. Le nombre n' est donc un nombre à deux chiffres tel que $F(n') = 3n'$. Donc $n' = 22$ d'après le deuxième cas et $n = 222$.
4. Comme au-dessus, le chiffre des unités de $F(n)$ est le chiffre des unités de $2u+2$, celui de $5n$ est le chiffre des unités de $5u$. La seule possibilité est $u = 4$ (liste comparative...). Comme $F(4) = 10 \neq 5 \times 4$, le nombre n ne peut valoir 4 et on peut écrire
   $$F(n) = 100F(n') + F(4)$$
   (notation et résultat de la question 2). On a donc $n = 10n' + 4$ et $F(n) = 100n' + 10$ donc
   $$100F(n') + 10 = 5 \times (10n' + 4) = 50n' + 20$$
   soit
   $$10F(n') + 1 = 5n' + 2.$$
   Le chiffre des unités du membre de gauche vaut 1. Celui de $5n'$ vaut 0 ou 5, donc celui du membre de droite vaut 2 ou 7. Ils ne peuvent être égaux et l'égalité est donc impossible.

   L'équation $F(n) = 5n$ n'a donc pas de solution.

5. On observe d'abord que n a forcément au moins deux chiffres (sinon $F(n) = 2n + 2$ qui ne peut valoir $23n$). On écrit donc $n = 10n' + u$. Le chiffre des unités de $F(n)$ est comme ci-dessus celui de $2u + 2$, et celui de $23n$ est celui de $3u$. On a vu à la question 3 que la seule possibilité est $u = 2$. On a donc
$$F(n) = 10F(n') + F(2) = 10F(n') + 6 = 23(10n' + 2) = 230n' + 46$$
soit $F(n') = 23n' + 4$. Là encore il n'y a pas de solution avec un nombre n' à un chiffre. Donc $n' = 10c + d$ et le chiffre des unités de $F(n')$ est celui de $2d + 2$, alors que le chiffre des unités de $23n' + 4$ est le chiffre des unités de $3d + 4$. Ceci implique que $d = 8$ (toujours avec une liste comparative). On a donc $n' = 10c + 8$ et on conclut grâce à la question 2 que
$$F(n') = 100F(c) + F(8) = 100F(c) + 18.$$
On a aussi $F(n') = 23(10c + 8) + 4 = 230c + 188$. Finalement $100F(c) + 18 = 230c + 188$, soit $10F(c) = 23c + 17$. Comme c est un nombre à un chiffre, $F(c) = 2c + 2$ et l'égalité devient $20c + 20 = 23c + 17$, soit $c = 1$.

L'unique solution de l'équation $F(n) = 23n$ est donc $n = 182$.