OLYMPIADES MATHÉMATIQUES
LYCÉE, PREMIÈRE

ACADÉMIE DE PARIS
2020

SUJET + CORRIGÉ

20e OLYMPIADES DE MATHÉMATIQUES

Mercredi 11 mars 2020[1], 2 énoncés (national et académique) en 4 heures, élèves de première générale et technologique[2] et de début de terminale[3], inscription auprès de votre professeur de mathématiques avant les vacances d'hiver selon académie.

Liberté • Égalité • Fraternité
RÉPUBLIQUE FRANÇAISE

MINISTÈRE
DE L'ÉDUCATION
NATIONALE

MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE ET DE LA JEUNESSE

Olympiades académiques de mathématiques

Académie de Paris

Mercredi 11 mars 2020

de 10 heures 10 à 12 heures 10

Exercices académiques

À traiter par les équipes candidates de voie générale ayant choisi la spécialité mathématiques

Les calculatrices sont autorisées selon la législation en vigueur.

Il est conseillé aux équipes candidates qui ne pourraient formuler une réponse complète à une question d'exposer le bilan des initiatives qu'ils ont pu prendre.

Chaque équipe traite les **deux exercices** et rend une **copie commune.**

Les échanges entre membres d'une même équipe sont autorisés, sans pour autant gêner le travail des autres équipes.

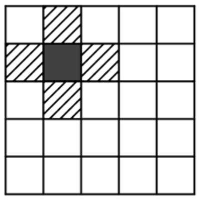
Les énoncés doivent être rendus au moment de quitter définitivement la salle de composition.

Exercice académique 1

(à traiter par toutes les équipes candidates)

Jardin fleuri

Dans un jardin carré quadrillé en carreaux, on dit que deux carreaux sont *adjacents* lorsqu'ils ont exactement un côté commun. Par exemple, dans le jardin carré ci-contre, les carreaux hachurés sont les carreaux adjacents au carreau noir.



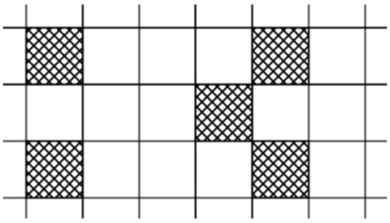
Dans ce jardin, on cherche à cultiver des fleurs un peu particulières.
Dans chaque carreau, il pousse au plus une fleur.
Dans tout l'exercice, toute case occupée par une fleur sera quadrillée.

Les deux parties sont indépendantes.

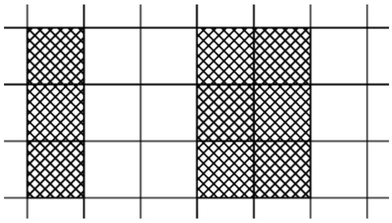
Partie A : un jardin déterministe

Dans cette partie, les fleurs du jardin carré obéissent, jour après jour, aux règles suivantes :

- S'il y a 2 ou 3 fleurs sur les carreaux adjacents à un carreau donné alors, le jour suivant, il naîtra une fleur dans ce carreau.

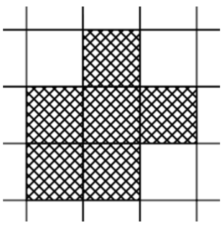


jour J

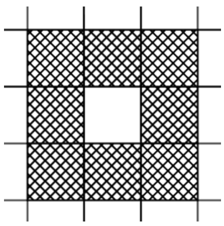


jour $\mathrm{J}+1$

- S'il y a 4 fleurs sur les carreaux adjacents à un carreau donné alors, le jour suivant, aucune fleur ne naîtra dans ce carreau et si une fleur y était, elle mourra. On notera que, sur d'autres carreaux, d'autres fleurs peuvent naître, comme dans l'exemple suivant :



jour J



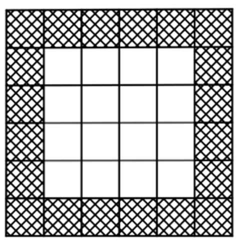
jour $\mathrm{J}+1$

- Enfin, les jardiniers s'assurent que la bordure est toujours complètement fleurie.

Au jour 0, on suppose que seuls les carreaux de la bordure contiennent une fleur.

1. On suppose dans cette question que le jardin est un carré de côté 6 carréaux.

a. À partir de la représentation ci-contre au jour 0, donner le jardin obtenu au jour 1 et au jour 2.
On pourra utiliser à cet effet les damiers fournis en annexe et les coller sur la copie.



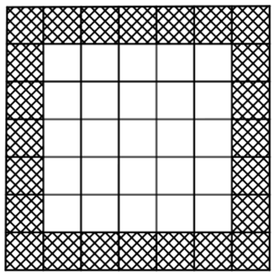
jour 0

b. Justifier le fait que les jardins obtenus aux jours 3 et 5 sont dans la même configuration.
On pourra utiliser à cet effet les damiers fournis en annexe et les coller sur la copie.

c. Expliquer le comportement du jardin dans le futur.

2. On suppose dans cette question que le jardin est un carré de côté 7 carreaux.

a. À partir de la représentation ci-contre aux jour 0, donner le jardin obtenu au jour 1 et au jour 2.
On pourra utiliser à cet effet les damiers fournis en annexe.



jour 0

b. Expliquer le comportement du jardin dans le futur.

3. Est-il possible de considérer que, dans le cas général, le jardin garde toujours le même aspect à partir d'une certaine date ?

Partie B : un jardin probabiliste

On considère deux nombres réels p et q de l'intervalle $[0,1]$.
Le jardin est toujours considéré carré. Chaque carreau de la bordure contient chaque jour une fleur.
Dans cette partie, chaque case obéit à de nouvelle règles, aléatoires, qui remplacent celles vues en partie A :

- Pour chaque carreau ne contenant pas de fleur au jour J, une fleur naitra au jour $\mathrm{J}+1$ avec une probabilité p et ce indépendamment des autres carreaux.

- En dehors de ceux de la bordure, pour chaque carreau contenant une fleur au jour J, la fleur mourra au jour $\mathrm{J}+1$ avec une probabilité q et ce indépendamment des autres carreaux.

- Les valeurs p et q sont fixées une seule fois pour l'ensemble des cases et des jours étudiés.

Au jour 0, on suppose que seuls les carreaux de la bordure contiennent une fleur.

1. On suppose que $p=q=1$.
On considère un jardin carré de n carreaux de côté, où n est un entier naturel non nul
Décrire l'évolution du jardin au fil des jours qui suivent le jour 0.

2. On suppose que $p=q=\frac{1}{2}$.
On considère un jardin carré de 6 carreaux de côté, combien de fleurs peut-on espérer voir de fleurs au jour 1 ? au jour 2 ? *On pourra utiliser un arbre pondéré.*

3. On fixe à présent deux valeurs quelconques de p et q dans l'intervalle $[0;1]$.
On considère un jardin carré de 6 carreaux de côté. En fonction de p et q, à combien de fleurs en tout peut-on s'attendre en moyenne au jour 1 ? au jour 2 ?

Exercice Académique n°2
(à traiter par les équipes candidates de voie générale ayant choisi la spécialité mathématiques)

Les nombres préférés de Véra

Les deux propriétés suivantes pourront être utilisées dans cet exercice sans démonstration :

- *Propriété 1. Pour tout entier naturel n, on a $n < 2^n$;*
- *Propriété 2. Pour tout entier naturel n, il existe un unique entier a tel que $2^a \leq n < 2^{a+1}$.*

Dans tout l'exercice, tous les nombres considérés sont des entiers naturels.

Véra a des goûts particuliers en matière de nombres :

- **Règle 1** : elle préfère n'importe quelle puissance entière de 2 à n'importe quel autre nombre entier naturel, par exemple, Véra préfère le nombre 2 au nombre 7 ;
- **Règle 2** : de deux puissances entières de 2, Véra préférera toujours la plus grande, ainsi Véra préfère le nombre 64 au nombre 4.
- **Règle 3** : si deux nombres ne sont pas des puissances de 2, Véra préfère celui dont l'écart à la puissance de deux la plus proche est la plus faible.
  En cas d'égalité de ces écarts, elle choisira le plus grand des deux nombres.
  Ainsi, Véra préfère le nombre 5 au nombre 10, mais elle préfère au nombre 5, le nombre 9.
  En effet, en notant d_a la distance du nombre a à la puissance de 2 la plus proche,
  on a $d_5 = d_9 = 1$, tandis que $d_{10} = 2$.

Dans toute la suite, quand Véra préfère le nombre b au nombre a, on notera $a \ll b$.
Avec les exemples précédents, on a donc $7 \ll 2$; $4 \ll 64$; $10 \ll 5$ et $5 \ll 9$.

1. **a.** Quel nombre Véra préfère-t-elle entre le nombre 1 et le nombre 20 ?
Même question pour les nombres 127 et 254.
b. Justifier que l'on a, pour tout entier naturel a : $a \ll 2^a$.
c. À-t-on, pour tout entier naturel a, $a \ll 2a$?

2. Démontrer que, pour tout entiers naturels a, b, si $a \ll b$ et $b \ll a$, alors $a = b$.

3. Démontrer que, pour tout entiers naturels a, b, c, si $a \ll b$ et $b \ll c$, alors $a \ll c$.
On pourra alors écrire $a \ll b \ll c$, ou encore $a_1 \ll a_2 \ll \cdots \ll a_n$ pour n entiers naturels.

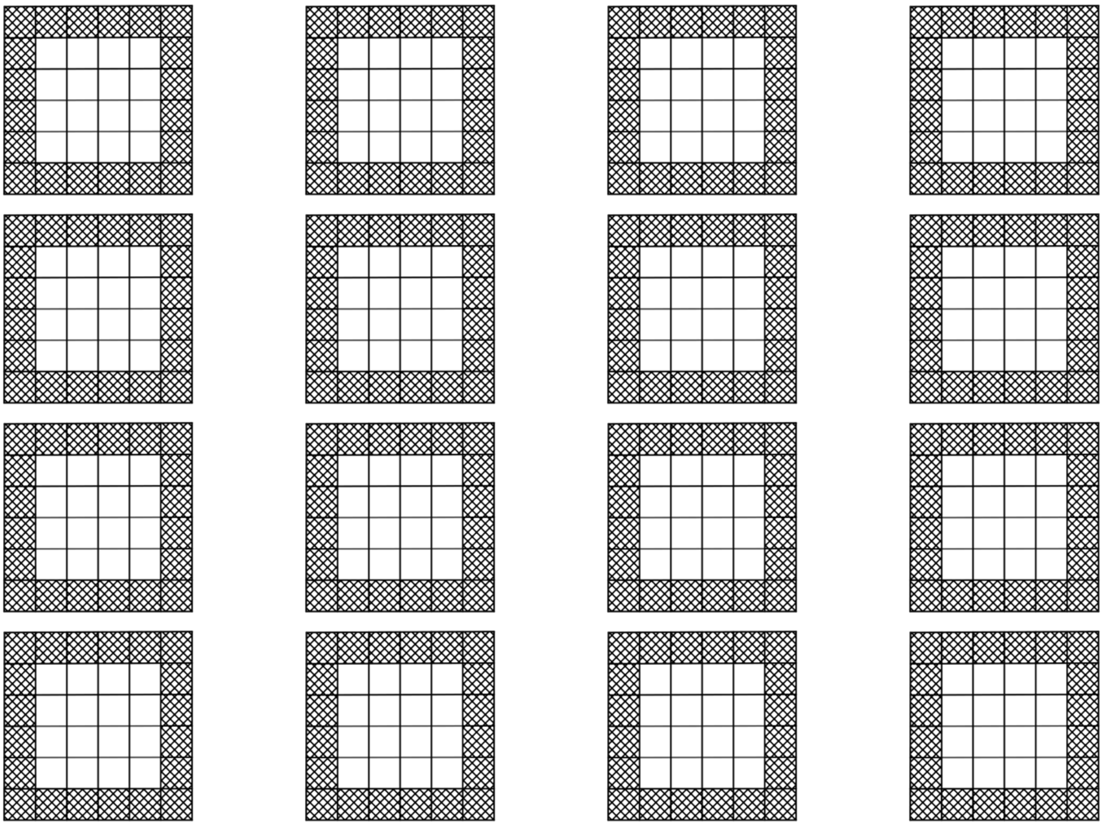
4. Ranger les entiers de 1 à 20 selon l'ordre de préférence (croissant) de Véra.

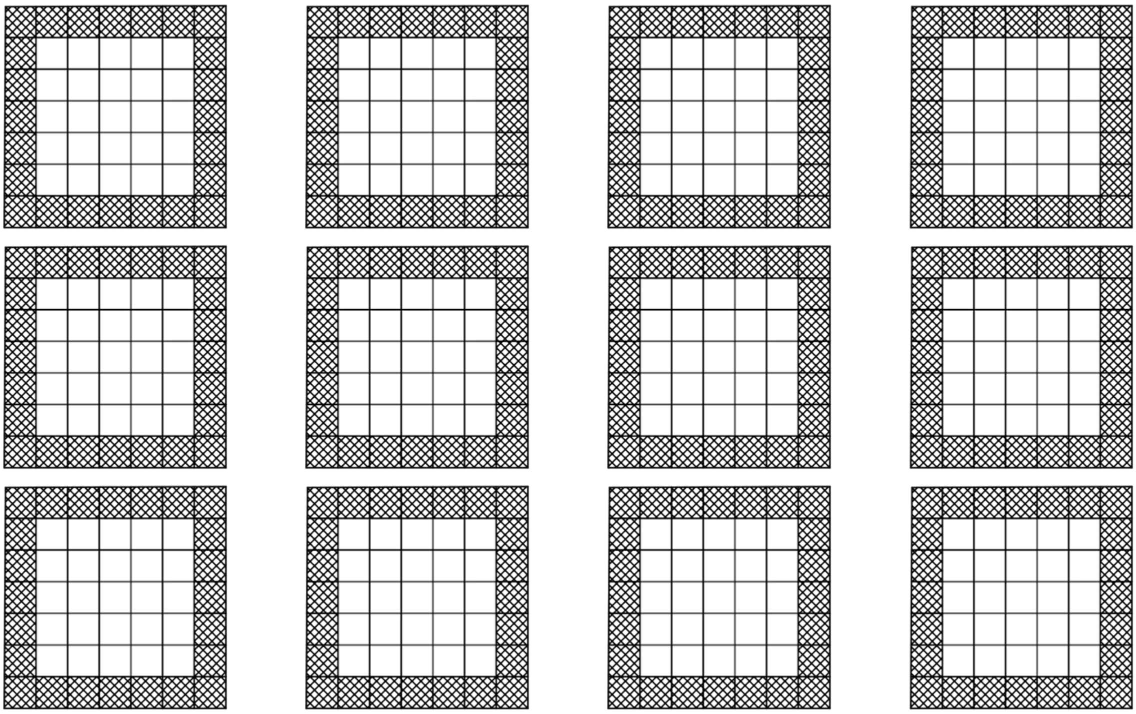
5. Soit p, un nombre entier naturel. Parmi les entiers naturels inférieurs ou égaux à p, on note ❤️p le nombre préféré de Véra.

a. Déterminer ❤️20 et ❤️2020.
b. Soit k un entier naturel non nul. Exprimer en fonction de k les valeurs de ❤️2^k et ❤️$(2^k - 1)$.
c. Établir que, pour tout entier naturel p, il existe un unique naturel q vérifiant $2^q =$ ❤️p.
On appelle le nombre q le « nombre associé au nombre p ».
d. Quel est le nombre q associé à 20 ? Celui associé à 2020 ?
e. Quel est l'ensemble des nombres p, entiers naturels, tel que ❤️$p = p$?
f. Établir que pour tout entier naturel p, ❤️$p <$ ❤️$(2p)$. A-t-on aussi ❤️$p \ll$ ❤️$(2p)$?
g. Démontrer que, pour tout entiers naturels a et b, si $a \ll b$, alors ❤️$a \ll$ ❤️b.

Annexe – Exercice 1

Jardins carrés de côté 6 et 7.





MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE ET DE LA JEUNESSE

Olympiades académiques de mathématiques

Académie de Paris

Mercredi 11 mars 2020

de 10 heures 10 à 12 heures 10

Exercices académiques

À traiter par les candidats n'ayant pas suivi la spécialité de mathématiques de voie générale

Les calculatrices sont autorisées selon la législation en vigueur.

Il est conseillé aux équipes candidates qui ne pourraient formuler une réponse complète à une question d'exposer le bilan des initiatives qu'ils ont pu prendre.

Chaque équipe traite les **deux exercices** et rend une **copie commune.**

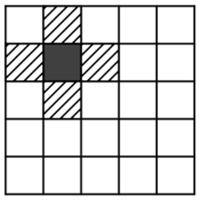
Les échanges entre membres d'une même équipe sont autorisés, sans pour autant gêner le travail des autres équipes.

Les énoncés doivent être rendus au moment de quitter définitivement la salle de composition.

Exercice académique 1

(à traiter par toutes les équipes candidates)

Jardin fleuri



Dans un jardin carré quadrillé en carreaux, on dit que deux carreaux sont *adjacents* lorsqu'ils ont exactement un côté commun. Par exemple, dans le jardin carré ci-contre, les carreaux hachurés sont les carreaux adjacents au carreau noir.

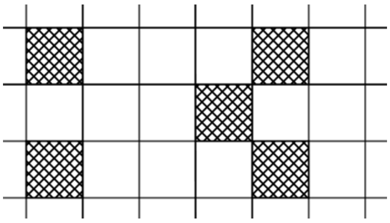
Dans ce jardin, on cherche à cultiver des fleurs un peu particulières.
Dans chaque carreau, il pousse au plus une fleur.
Dans tout l'exercice, toute case occupée par une fleur sera quadrillée.

Les deux parties sont indépendantes.

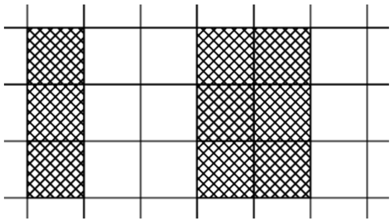
Partie A : un jardin déterministe

Dans cette partie, les fleurs du jardin carré obéissent, jour après jour, aux règles suivantes :

- S'il y a 2 ou 3 fleurs sur les carreaux adjacents à un carreau donné alors, le jour suivant, il naîtra une fleur dans ce carreau.

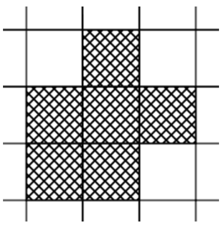


jour J

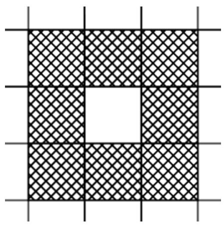


jour $\mathrm{J}+1$

- S'il y a 4 fleurs sur les carreaux adjacents à un carreau donné alors, le jour suivant, aucune fleur ne naîtra dans ce carreau et si une fleur y était, elle mourra. On notera que, sur d'autres carreaux, d'autres fleurs peuvent naître, comme dans l'exemple suivant :



jour J

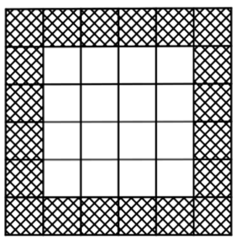


jour $\mathrm{J}+1$

- Enfin, les jardiniers s'assurent que la bordure est toujours complètement fleurie.

Au jour 0, on suppose que seuls les carreaux de la bordure contiennent une fleur.

1. On suppose dans cette question que le jardin est un carré de côté 6 carreaux.



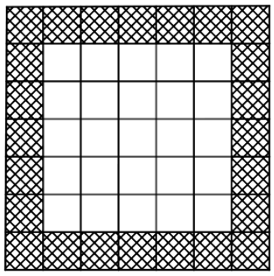
jour 0

a. À partir de la représentation ci-contre au jour 0, donner le jardin obtenu au jour 1 et au jour 2.
On pourra utiliser à cet effet les damiers fournis en annexe et les coller sur la copie.

b. Justifier le fait que les jardins obtenus aux jours 3 et 5 sont dans la même configuration.
On pourra utiliser à cet effet les damiers fournis en annexe et les coller sur la copie.
c. Expliquer le comportement du jardin dans le futur.

2. On suppose dans cette question que le jardin est un carré de côté 7 carreaux.

a. À partir de la représentation ci-contre aux jour 0, donner le jardin obtenu au jour 1 et au jour 2.
On pourra utiliser à cet effet les damiers fournis en annexe.


jour 0

b. Expliquer le comportement du jardin dans le futur.

3. Est-il possible de considérer que, dans le cas général, le jardin garde toujours le même aspect à partir d'une certaine date ?

Partie B : Un jardin probabiliste

On considère deux nombres réels p et q de l'intervalle $[0,1]$.
Le jardin est toujours considéré carré. Chaque carreau de la bordure contient chaque jour une fleur.
Dans cette partie, chaque case obéit à de nouvelle règles, aléatoires, qui remplacent celles vues en partie A :

- Pour chaque carreau ne contenant pas de fleur au jour J, une fleur naitra au jour $\mathrm{J}+1$ avec une probabilité p et ce indépendamment des autres carreaux.

- En dehors de ceux de la bordure, pour chaque carreau contenant une fleur au jour J, la fleur mourra au jour $\mathrm{J}+1$ avec une probabilité q et ce indépendamment des autres carreaux.

- Les valeurs p et q sont fixées une seule fois pour l'ensemble des cases et des jours étudiés.

Au jour 0, on suppose que seuls les carreaux de la bordure contiennent une fleur.

1. On suppose que $p=q=1$.
On considère un jardin carré de n carreaux de côté, où n est un entier naturel non nul
Décrire l'évolution du jardin au fil des jours qui suivent le jour 0.

2. On suppose que $p=q=\frac{1}{2}$.
On considère un jardin carré de 6 carreaux de côté, combien de fleurs peut-on espérer voir naitre au jour 1 ? au jour 2 ? *On pourra utiliser un arbre pondéré.*

3. On fixe à présent deux valeurs quelconques de p et q dans l'intervalle $[0;1]$.
On considère un jardin carré de 6 carreaux de côté. En fonction de p et q, à combien de fleurs en tout peut-on s'attendre en moyenne au jour 1 ? au jour 2 ?

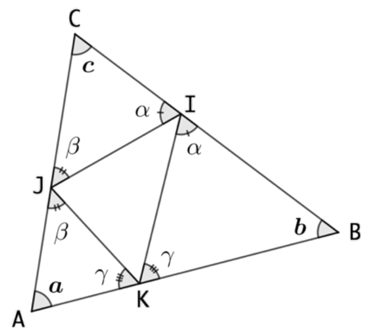
Exercice Académique n°2
(à traiter par les candidats n'ayant pas suivi la spécialité de mathématiques de voie générale)

Triangle de lumière

Soient ABC un triangle et I, J et K trois points tels que $I \in]BC[$, $J \in]AC[$ et $K \in]AB[$.
On dit que IJK forme un *triangle de lumière* dans le triangle ABC si les égalités angulaires suivantes sont satisfaites :

$$\widehat{BIK} = \widehat{CIJ} \qquad \widehat{CJI} = \widehat{AJK} \qquad \widehat{AKJ} = \widehat{BKI}$$

On note les angles de la manière suivante :



$$\widehat{BAC} = \boldsymbol{a} \qquad \widehat{CBA} = \boldsymbol{b} \qquad \widehat{ACB} = \boldsymbol{c}$$

$$\widehat{BIK} = \widehat{JIC} = \alpha$$

$$\widehat{CJI} = \widehat{KJA} = \beta$$

$$\widehat{AKJ} = \widehat{IKB} = \gamma$$

A. Étude de cas particuliers

1. On suppose que le triangle ABC est équilatéral. On note I, J et K les milieux respectifs des côtés [BC], [AC] et [AB]. Montrer que le triangle IJK est un triangle de lumière.
2. On suppose que le triangle ABC est un triangle rectangle isocèle.
   Montrer qu'il n'existe pas de triangle de lumière (on pourra utiliser un raisonnement par l'absurde).

B. Une condition nécessaire.

Soient ABC un triangle et I, J et K trois points tels que $I \in]BC[$, $J \in]AC[$ et $K \in]AB[$.
On suppose que IJK est un triangle de lumière.

1. Montrer les égalités suivantes sont vérifiées :

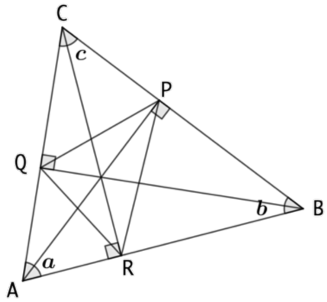
$$\begin{cases} \boldsymbol{a} + \beta + \gamma = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} + \boldsymbol{c} \\ \alpha + \boldsymbol{b} + \gamma = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} + \boldsymbol{c} \\ \alpha + \beta + \boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} + \boldsymbol{c} \end{cases}$$

2. En déduire que $\alpha = \boldsymbol{a}$, $\beta = \boldsymbol{b}$ et $\gamma = \boldsymbol{c}$.
3. Montrer que, puisqu'il existe un triangle de lumière IJK, alors les angles du triangle ABC sont aigus.

C. Existence.

On suppose que le triangle ABC a tous ses angles aigus. On appelle P, Q et R les pieds des hauteurs issues, respectivement, de A, B et C.

1. On admet que $RQ = BC \cos \boldsymbol{a}$.
   Démontrer que les triangles AQR et ABC sont semblables.
   On rappelle que deux triangles sont semblables quand leurs côtés sont proportionnels deux à deux ou, ce qui est équivalent, s'ils ont des angles deux à deux de même mesure.

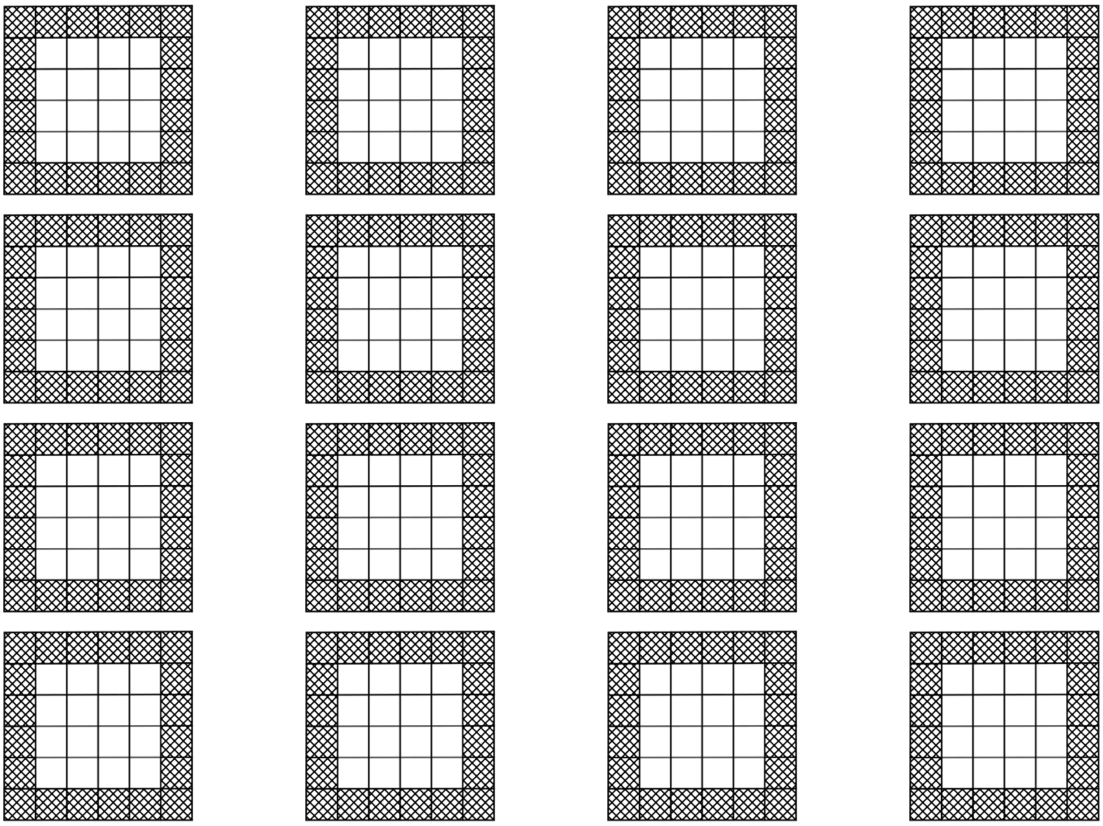


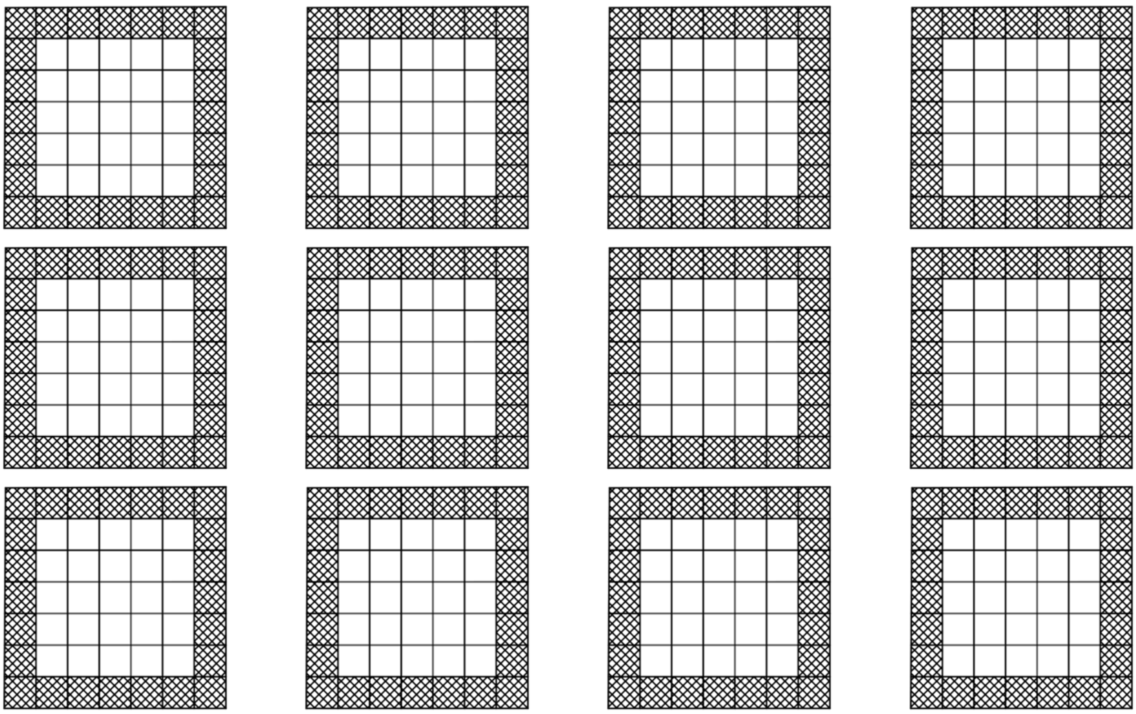
On démontrerait de même que les triangles PBR et PQC sont semblables au triangles ABC.

2. Conclure que le triangle PQR est un triangle de lumière.

Annexe – Exercice 1

Jardins carrés de côté 6 et 7.





OLYMPIADES MATHÉMATIQUES
LYCÉE, PREMIÈRE

CORRECTION !

Épreuve ▪ 2020

CORRECTION OLYMPIADES

EXERCICES ACADÉMIQUES

PARIS 2020

Avertissement : *Ce sujet déconcerte dès son premier abord par la qualité anormalement médiocre du texte. Les énoncés des deux exercices paraissent avoir été rédigés dans la précipitation, sans relecture ni contrôle de leur cohérence.*

Si nous pouvons à l'extrême rigueur faire abstraction des fautes d'orthographe grossières, inattendues à ce niveau, émaillant l'énoncé, en revanche certaines formulations à caractère mathématique devront être précisées, voire rectifiées.

Il en est ainsi dans l'exercice 2 à propos de la notion « d'entier naturel ».

Examinons particulièrement la « propriété 2 » qui nous dit : « pour tout entier naturel n, il existe un unique entier a tel que : $2^a \leq n < 2^{a+1}$ *». L'entier zéro ne vérifie pas cette propriété.*

C'est donc qu'un « entier naturel » est, dans ce contexte, un nombre entier strictement positif. Cette conception est reprise dans les questions 2 et 3. Soit, pourquoi pas ? Il s'agit sans doute de la définition originelle, due à Richard Dedekind, de l'ensemble des entiers naturels (cet ensemble, selon Dedekind, ne comprend pas le nombre zéro, alors que de nos jours, l'ensemble des entiers naturels, l'ensemble $\mathbb{N}$ *usuel, est plus volontiers l'ensemble des entiers positifs ou nuls).*

Hélas, cette conception est contredite un peu plus loin dans les questions ***5.b*** *et* ***5.c****, où cette fois l'entier zéro devrait être un entier naturel. Il y a de ce fait une incohérence regrettable. Le lecteur devra rester vigilant et, à chaque occasion, se poser la question sur la nature des nombres en jeu. En raison de trop nombreuses approximations, il reste toujours une marge d'incertitude à propos de ce que l'énoncé demande réellement de démontrer. En outre, la question* ***5.g*** *de l'exercice 2 réservera une petite surprise.*

On peut cependant voir ici un avantage : il est important de garder en éveil son sens critique en toutes circonstances, ce sujet est un très bon entraînement à cet apprentissage éminemment profitable !

Exercice 1 : Jardin fleuri

Partie A : Un jardin déterministe

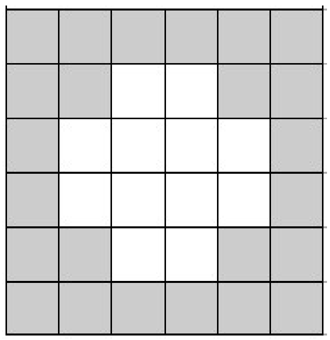
D'après les règles déterminant l'évolution du jardin, un carreau blanc devient grisé si et seulement si il a deux ou bien trois carreaux adjacents grisés, et un carreau grisé devient blanc si et seulement si il a quatre carreaux adjacents, tous grisés.

En particulier, un carreau grisé situé en bordure ne change pas de couleur car il n'a que deux ou trois carreaux adjacents, jamais quatre. Dès lors que la bordure est complètement fleurie le jour 0, elle restera entièrement fleurie tous les jours.

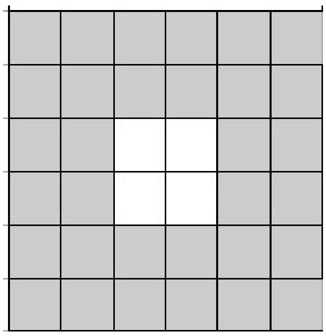
Notation. Nous adopterons quand ce sera utile la notation suivante pour désigner un carreau particulier :
Les lignes seront numérotées de haut en bas, et les colonnes de gauche à droite, de 1 à n. Le carreau qui est l'intersection de la ligne numéro x et de la colonne numéro y sera noté $c[x,\ y]$

1. Dans cette question, on considère un jardin de 6×6 carreaux.

1.a. Les jardins obtenus au jour 1 et au jour 2.



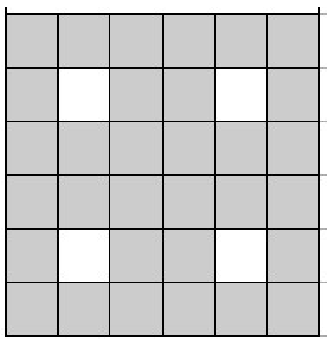
J1



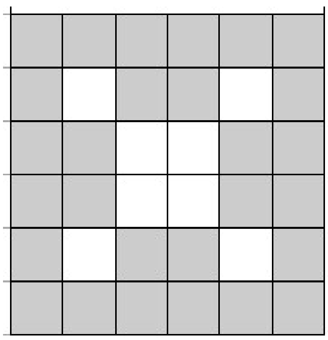
J2

1.b. Continuons à rechercher quel va être l'aspect du jardin les jours suivants. Voici le jardin au jour 3 et au jour 4.

Quel va être l'aspect du jardin au jour 5 ?



J3



J4

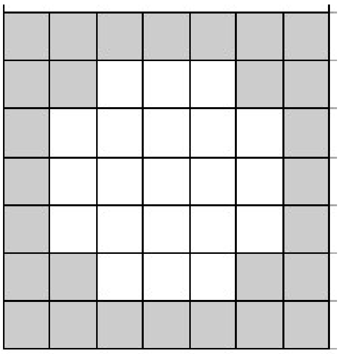
Les quatre carreaux blancs centraux $c[3,\ 3]$, $c[3,\ 4]$, $c[4,\ 3]$, $c[4,\ 4]$ ont chacun deux carreaux adjacents grisés au jour 4, ils sont grisés au jour 5. Les autres carreaux blancs $c[2,\ 2]$, $c[2,\ 5]$, $c[5,\ 2]$, $c[5,\ 5]$ restent blancs car ils ont quatre voisins grisés, et aucun carreau grisé ne change de couleur car aucun n'a quatre voisins grisés. Donc, l'aspect du jardin au jour 5 est identique à son aspect au jour 3.

1.c. Dès lors que nous avons obtenu deux aspects identiques à deux jours d'intervalle, l'évolution du jardin devient périodique avec une période de 2 jours.

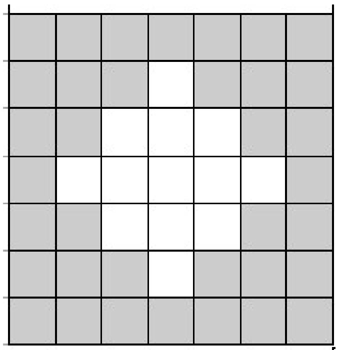
L'aspect du jardin les jours impairs sera le même que celui du jardin au jour numéro 3 (pour tout numéro impair au moins égal à 3) et l'aspect du jardin les jours pairs sera le même que celui du jardin au jour 4 (pour tout numéro pair au moins égal à 4).

2. Dans cette question, on considère un jardin de 7×7 carreaux.

2.a. Les jardins obtenus au jour 1 et au jour 2.

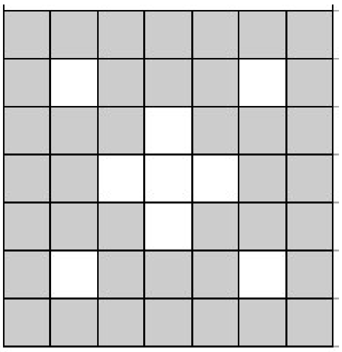


J1

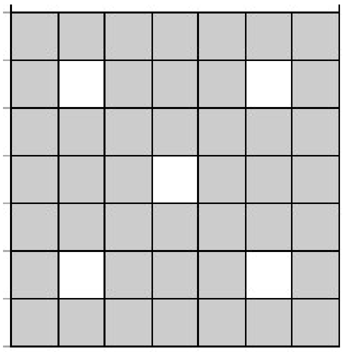


J2

2.b. Etudions l'évolution du jardin aux jours suivants. Voici son aspect au jour 3 et au jour 4 :

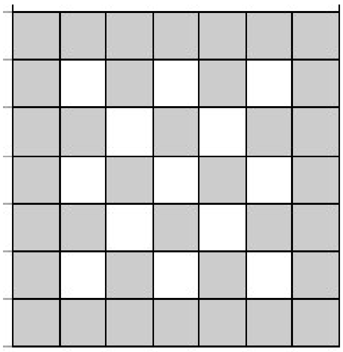


J3



J4

Voici ci-contre l'aspect du jardin au jour 5. L'intérieur est constitué de carreaux alternativement blancs et grisés.
Chaque carreau blanc a quatre carreaux adjacents grisés, et aucun carreau grisé n'a quatre voisins grisés.
Le jour suivant, aucun des carreaux ne changera de couleur : l'aspect du jardin au jour 6 sera identique à son aspect au jour 5.



J5

Nous avons obtenu, deux jours consécutivement, la même configuration. Désormais, le jardin gardera toujours le même aspect.

3. Objectivement, la réponse à la question posée est non puisque, dans le cas d'un jardin 6×6, le jardin prend indéfiniment deux aspects différents. (*C'est déjà une réponse à la question posée*)
Dans le cas général, l'évolution d'un jardin $n \times n$ sera de toute façon périodique. En effet, ce jardin a un certain nombre fini N de carreaux, et il ne peut y avoir que 2^N configurations différentes. Au bout d'un nombre de jours suffisant, nous obtiendrons, inexorablement, une configuration déjà obtenue un jour précédent. Dès lors, l'évolution du jardin va se répéter à l'identique. (*Cela en est une autre*)

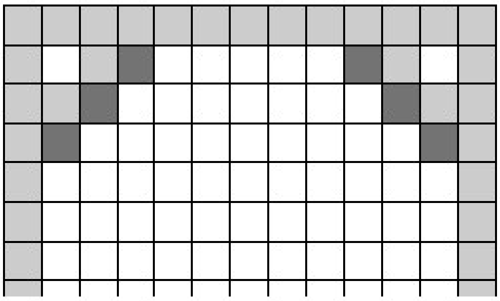
Essayons quand même de préciser davantage. Nous avons vu un cas où l'aspect du jardin ne changeait plus.

Une étude que nous laissons au lecteur montrerait que, pour un jardin de format 3×3, les jardins des jours 1 et 2 sont identiques et que, pour un jardin de format 5×5, les jardins des jours 3 et 4 sont identiques. L'aspect du jardin ne change plus ensuite. Conjecturons qu'il pourrait en être toujours ainsi lorsque n est un nombre impair. Supposons donc que n est un nombre impair : $n = 2k + 1$, avec $k \geq 1$.

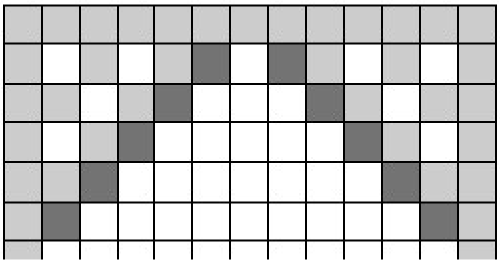
Introduisons pour tout entier j tel que $1 \leq j \leq n$ l'ensemble D_j des carreaux $c[x,\ y]$ tels que $x + y = j + 2$ et aussi l'ensemble D'_j des carreaux $c[x,\ y]$ tels que $y - x = n - 1 - j$ (ces ensembles sont des alignements de carreaux parallèles à l'une ou l'autre diagonale, il y en a deux autres qui s'en déduisent par symétrie et qui évolueront symétriquement).

Voici l'aspect du jardin au jour 3. les carreaux nouvellement grisés l'ont été en plus foncé. Le carreau $c[2,\ 2]$ a été blanchi. À partir de cet instant, l'aspect des ensembles D_2, D_3, D'_2, D'_3 ne changera plus.

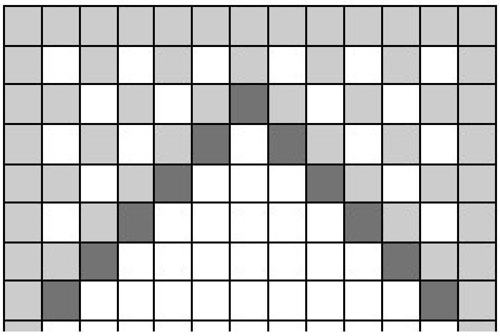
Le jour 4, on va griser les carreaux situés sur D_5 et sur D'_5.



Voici l'aspect du jardin au jour 5. À partir de cet instant, l'aspect des ensembles D_4, D_5, D'_4, D'_5 ne changera plus. Il en sera de même de leurs symétriques par rapport au centre du jardin.

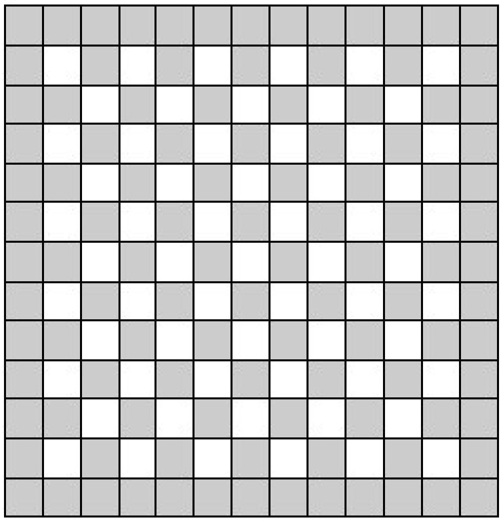


L'entier n étant un nombre impair, les intersections (qui ont lieu à partir du jour k) des ensembles D_k et D'_k sont compatibles avec une alternance de carreaux grisés et blancs.
Pour chaque jour impair j (avec $j \leq 2k - 1$), quatre nouveaux ensembles D_{j-1}, D_j, D'_{j-1}, D'_j seront stabilisés, tous unicolores, ceux d'indices pairs en blanc, ceux d'indice impair en gris. Il en sera de même de leurs symétriques par rapport au centre du jardin.



Au jour $2k-1$ (c'est-à-dire au jour $n-2$), la totalité du jardin atteint l'aspect d'un damier usuel (alternance de carreaux grisés et blancs), et au jour suivant $2k$, l'aspect du jardin sera le même.

En résumé, nous pouvons dire que, si n est un nombre impair, alors le jardin atteindra un aspect en damier (comme ci-contre) au jour $n-2$ et qu'à partir de cette date, son aspect sera toujours le même.



Partie B : Un jardin probabiliste

Analyse générale de ce que l'énoncé nous donne :

Considérons un carreau non situé sur la bordure, quelconque. Désignons par E_J l'état de ce carreau au jour J, cet état pouvant être soit l'état F (il y a une fleur) soit l'état contraire $\overline{F}$ (il n'y a pas de fleur).

L'énoncé nous donne l'état initial de ce carreau : $E_0 = \overline{F}$ (car au jour 0, seuls les carreaux de bordure contiennent une fleur). En conséquence : $P\left(E_0 = \overline{F}\right) = 1$ et $P\left(E_0 = F\right) = 0$

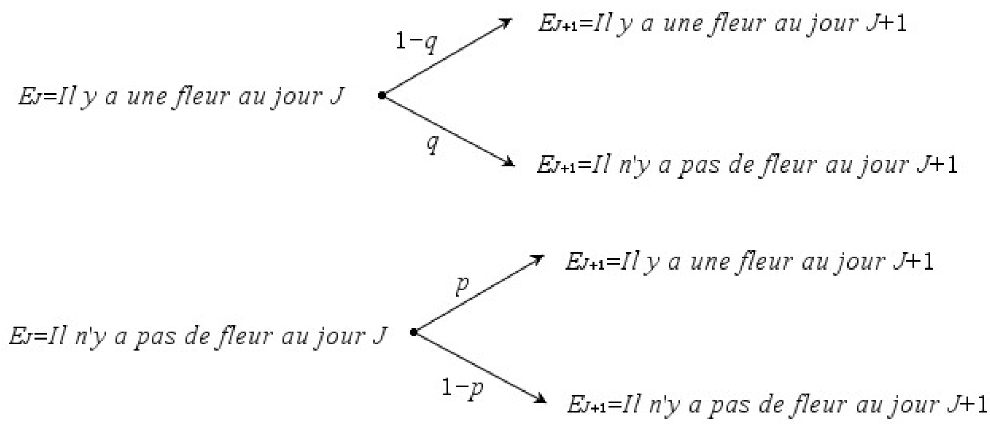
L'énoncé nous donne aussi des probabilités conditionnelles :

- $P_{E_J=\overline{F}}\left(E_{J+1} = F\right) = p$ d'une part (sachant que le carreau ne contient pas de fleur au jour J, la probabilité qu'il en contienne une au jour $J+1$ est égale à p).
- $P_{E_J=F}\left(E_{J+1} = \overline{F}\right) = q$ d'autre part (sachant que le carreau contient une fleur au jour J, la probabilité qu'il n'en contienne pas au jour $J+1$ est égale à q).

Par complémentarité, ces données en induisent deux autres :

- $P_{E_J=\overline{F}}\left(E_{J+1} = \overline{F}\right) = 1-p$
- $P_{E_J=F}\left(E_{J+1} = F\right) = 1-q$

Cet arbre illustre la situation :



Nous pouvons aussi bien exprimer les probabilités des évènements « $E_{J+1} = F$ » et « $E_{J+1} = \overline{F}$ » à l'aide de la formule des probabilités totales :

$P\left(E_{j+1} = F\right) = P\left(E_J = \overline{F}\right) \times p + P\left(E_J = F\right) \times (1 - q)$

Et aussi : $P\left(E_{j+1} = \overline{F}\right) = P\left(E_J = \overline{F}\right) \times (1 - p) + P\left(E_J = F\right) \times q$

1. Dans le cas où $p = q = 1$, les deux formules ci-dessus deviennent, respectivement :

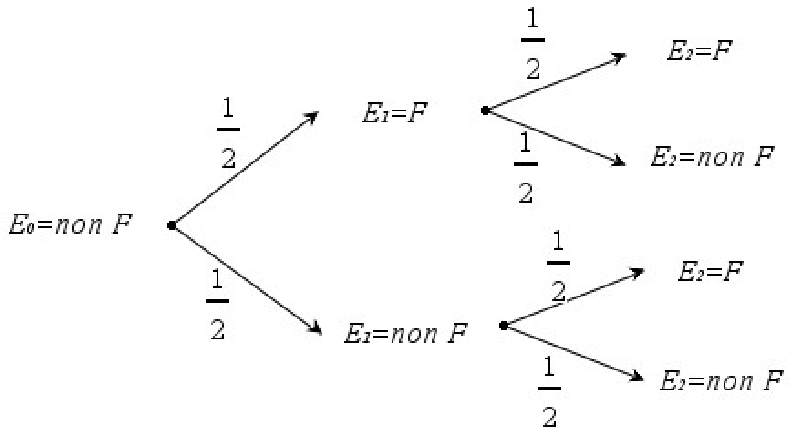
$P\left(E_{j+1} = \overline{F}\right) = P\left(E_J = F\right)$ et $P\left(E_{j+1} = F\right) = P\left(E_J = \overline{F}\right)$. Ainsi :

- Si un carreau contient une fleur au jour *J*, alors il n'en contient pas au jour $J + 1$.
- Si un carreau ne contient pas de fleur au jour *J*, alors il en contient une au jour $J + 1$

L'énoncé suppose qu'aucun carreau intérieur ne contient de fleur au jour 0. Donc, tous les carreaux intérieurs contiendront une fleur au jour 1 et n'en contiendront aucune au jour 2 : le jour 2, le jardin retrouvera le même aspect qu'au jour 0.

La situation se reproduira indéfiniment à l'identique avec une périodicité de 2 jours : le jardin ne sera fleuri qu'en bordure les jours pairs et sera entièrement fleuri les jours impairs.

2. Dans le cas où $p = q = \frac{1}{2}$, étudions à l'aide d'un arbre pondéré l'évolution d'un carreau au cours des jours 1 et 2 ; il peut soit contenir une fleur (*F*) soit ne pas en contenir (*non F*) :



Par simple lecture sur les branches de cet arbre pondéré, il apparaît que l'événement « ce carreau contient une fleur au jour *J* » a pour probabilité $\frac{1}{2}$, que *J* soit le jour 1 ou qu'il soit le jour 2.

Le jardin carré considéré ayant 6 carreaux de côté, il est constitué de 20 carreaux en bordure, qui contiennent chacun une fleur quel que soit le jour considéré, et de 16 carreaux intérieurs qui évoluent comme le carreau décrit ci-dessus, indépendamment les uns des autres.

Numérotons de 1 à 16 ces carreaux intérieurs. Pour tout entier i tel que $1 \leq i \leq 16$ et tout entier J tel que $1 \leq J \leq 2$ définissons la variable aléatoire $X(i, J)$ égale au nombre de fleurs que contient le carreau numéro i au jour *J*.

Définissons aussi, pour $J = 1$ et $J = 2$, la variable aléatoire Y_J égale au nombre total de fleurs que l'on peut voir au jour *J* :

$$Y_1 = 20 + X(1, 1) + ... + X(16, 1) = 20 + \sum_{i=1}^{16} X(i, 1) \text{ et } Y_2 = 20 + X(1, 2) + ... + X(16, 2) = 20 + \sum_{i=1}^{16} X(i, 2)$$

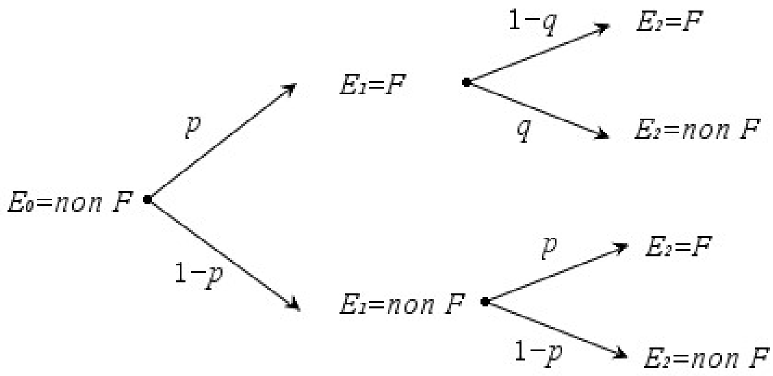
Vu l'évolution précédente, chacune des variables aléatoires $X(i, J)$ prend, de façon équiprobable, la valeur 0 ou la valeur 1. L'espérance mathématique de chacune d'entre elles est égale à $\frac{1}{2}$.

Par linéarité de l'espérance mathématique, les espérances des variables aléatoires Y_1 et Y_2 se calculent ainsi :

$$E(Y_1) = 20 + \sum_{i=1}^{16} E(X(i, 1)) = 20 + \sum_{i=1}^{16} \frac{1}{2} = 28 \text{ et de même } E(Y_2) = 20 + \sum_{i=1}^{16} E(X(i, 2)) = 28 .$$

On peut espérer voir 28 fleurs au jour 1 et 28 fleurs aussi au jour 2.

3. Reprenons le raisonnement et les notations de la question précédente, mais avec un arbre pondéré plus général, où les probabilités conditionnelles p et q prennent maintenant des valeurs quelconques :



Par simple lecture sur cet arbre pondéré, il apparaît que l'événement « ce carreau contient une fleur au jour 1 » a maintenant pour probabilité p et que l'évènement « ce carreau contient une fleur au jour 2 » a pour probabilité $p \times (1-q) + (1-p) \times p = p \times (2-p-q)$. (Nous n'avons pas besoin d'autres probabilités).

Pour chaque valeur de i telle que $1 \leq i \leq 16$, la variable aléatoire $X(i,\, 1)$ prend les valeurs 0 et 1, avec les probabilités $1-p$ et p respectivement. Son espérance mathématique est égale à p car c'est, par définition de l'espérance, le nombre : $0 \times P[X(i,\, 1) = 0] + 1 \times P[X(i,\, 1) = 1] = P[X(i,\, 1) = 1]$.

Pour chaque valeur de i telle que $1 \leq i \leq 16$, la variable aléatoire $X(i,\, 2)$ prend les valeurs 0 et 1, cette dernière avec la probabilité $p \times (2-p-q)$. Son espérance mathématique est égale à $p \times (2-p-q)$ car c'est, par définition de l'espérance, le nombre : $0 \times P[X(i,\, 2) = 0] + 1 \times P[X(i,\, 2) = 1] = P[X(i,\, 2) = 1]$.

Les espérances des variables aléatoires Y_1 et Y_2 se calculent maintenant ainsi :

$$E(Y_1) = 20 + \sum_{i=1}^{16} p = 20 + 16p \text{ et } E(Y_2) = 20 + \sum_{i=1}^{16} p \times (2-p-q) = 20 + 16p(2-p-q).$$

On peut s'attendre en moyenne à $20 + 16p$ fleurs au jour 1 et à $20 + 16p(2-p-q)$ fleurs au jour 2.

(*Noter que ces formules sont compatibles avec le résultat de la question* **2**)

Exercice 2 : Les nombres préférés de Véra

NB. Dans le doute, pour éviter toute ambiguïté, plutôt que d'entiers « naturels » nous parlerons d'entiers « strictement positifs » ou bien « positifs ou nuls » selon les circonstances.

Nous corrigeons ainsi l'énoncé de la propriété 2 :

Propriété 2 : Pour tout entier strictement positif n, il existe un unique entier positif ou nul a tel que : $2^a \leq n < 2^{a+1}$

1.a. Le nombre 1 est une puissance entière de 2 ($1 = 2^0$) alors que 20 n'est pas une puissance entière de 2. D'après la **règle 1**, Véra préfère 1 à 20.

127 et 254 ne sont pas des puissances entières de 2. La puissance de 2 la plus proche de 127 est $2^7 = 128$ et la puissance de 2 la plus proche de 254 est $2^8 = 256$. Mais 127 est plus proche de 2^7 (écart égal à 1) que 254 ne l'est de 2^8 (écart égal à 2). D'après la **règle 3**, Véra préfère 127 à 254.
Nous pouvons écrire : $20 << 1$ et $254 << 127$.

1.b. Nous allons raisonner par disjonction de cas.
Soit a un entier strictement positif. Deux cas peuvent se présenter :

- Ou bien a n'est pas une puissance de 2 et dans ce cas d'après la **règle 1** Véra lui préfère 2^a qui en est une.
- Ou bien a est une puissance de 2, mais d'après la *propriété 1*, ce nombre est strictement inférieur au nombre 2^a qui en est une autre. D'après la **règle 2**, Véra préfère 2^a à a.

Quel que soit le cas de figure, Véra préfère 2^a à a. Ainsi, quel que soit l'entier strictement positif a : $a << 2^a$

1.c. La réponse est non et pour justifier cette réponse, choisissons un contre-exemple. Le nombre $a = 3$ en est un. En effet, son double est : $2a = 6$. Or, $d_3 = 1$ (3 a deux puissances de 2 également voisines, 2 et 2^2) tandis que $d_6 = 2$ (6 a aussi deux puissances de 2 également voisines, 2^2 et 2^3). D'après la **règle 3** : $6 << 3$. L'entier 3 est préféré à son double.

2. Quel que soit les entiers strictement positifs a et b, si b est une puissance de 2 et a ne l'est pas, alors Véra préfère b à a sans que la préférence inverse ne soit possible. De même, si a est une puissance de 2 et b ne l'est pas, alors $b << a$, mais la préférence inverse n'est pas possible.

Donc, si $a << b$ et $b << a$ en même temps, ou bien a et b sont tous deux des puissances de 2, ou bien ni a ni b ne sont, ni l'un ni l'autre, des puissances de 2.

- Si a et b sont tous deux des puissances de 2, il existe deux entiers naturels u et v : $a = 2^u$; $b = 2^v$. D'après la **règle 2**, puisque $a << b$, l'inégalité $2^u \le 2^v$ est vérifiée et puisque $b << a$, l'inégalité en sens inverse $2^v \le 2^u$ l'est aussi. Par conséquent $2^u = 2^v$, les entiers a et b sont égaux.
- Si ni a ni b ne sont ni l'un ni l'autre des puissances de 2, soit d_a et d_b les écarts à leur puissance de 2 la plus proche. D'après la **règle 3** puisque $a << b$, l'inégalité $d_b \le d_a$ est vérifiée et si l'égalité $d_b = d_a$ a lieu, alors $a \le b$; mais d'après la même règle, puisque $b << a$, l'inégalité $d_a \le d_b$ est vérifiée et si l'égalité $d_a = d_b$ a lieu, alors $b \le a$. Dans ces conditions, d'abord les deux inégalités simultanées $d_b \le d_a$ et $d_a \le d_b$ impliquent le cas d'égalité $d_b = d_a$ et ensuite nous obtenons les deux inégalités simultanées $a \le b$ et $b \le a$ qui impliquent finalement l'égalité $a = b$.

Quel que soit le cas de figure, si $a << b$ et $b << a$, alors $a = b$.

3. Une propriété de la relation d'ordre usuelle dans l'ensemble des entiers va jouer ici un rôle important, sa *transitivité*, à savoir que si trois entiers *x, y, z* sont tels que $x \le y$ et $y \le z$, alors $x \le z$. Il s'agit de montrer que la relation << en question dans ce contexte possède elle aussi cette propriété.

Soit *a, b, c* trois entiers strictement positifs tels que $a << b$ et $b << c$

- Si a n'est pas une puissance de 2 et c est une puissance de 2 (quelle que soit la nature de b, puissance de 2 ou non), alors $a << c$ en vertu de la **règle 1**.
- Si *a, b* et *c* sont trois puissances de 2, alors d'après la **règle 2**, $a << b$ implique que $a \le b$ et $b << c$ implique $b \le c$. Par transitivité $a \le c$, donc $a << c$ (toujours d'après la **règle 2**).
- Si aucun des nombres *a, b, c* n'est une puissance de 2, alors d'après la **règle 3**, si d_a, d_b, d_c sont leurs distances respectives à leur plus proche puissance de 2 : $a << b$ implique $d_a \le d_b$ (avec $a \le b$ en cas d'égalité) et $b << c$ implique $d_b \le d_c$ (avec $b \le c$ en cas d'égalité). Par transitivité : $d_a \le d_c$. Et en cas d'égalité des trois distances : $a \le b \le c$. La **règle 3** s'applique entre a et c, donc $a << c$.

Quel que soit le cas de figure, $a << c$

(*En résumé, les questions* ***2*** *et* ***3*** *montrent que la relation << est une relation d'ordre définie sur l'ensemble des entiers strictement positifs*).

4. Afin de faciliter le classement, nous avons numéroté de 1 à 20 les cases d'un tableau et colorié de diverses couleurs ces cases suivant la distance de leur numéro à leur plus proche puissance de 2 :

- En rouge, les cases pour lesquelles cette distance est égale à 4.
- En orange, les cases pour lesquelles cette distance est égale à 3.
- En vert, les cases pour lesquelles cette distance est égale à 2.
- En jaune, les cases pour lesquelles cette distance est égale à 1.

En gris, les cases des puissances de 2.

1	**2**	**3**	**4**	**5**
6	**7**	**8**	**9**	**10**
11	**12**	**13**	**14**	**15**
16	**17**	**18**	**19**	**20**

Ce qui nous autorise à proposer le rangement suivant :

$12 << 20 << 11 << 13 << 19 << 6 << 10 << 14 << 18 << 3 << 5 << 7 << 9 << 15 << 17 << 1 << 2 << 4 << 8 << 16$

5. Nous allons désigner par « cœur » l'application qui, à tout entier strictement positif p, associe le nombre préféré à tous les autres parmi les entiers de l'ensemble $\{1,\ 2,\ ...,\ p\}$.

5.a. La question **4** précédente a établi par rangement exhaustif que $coeur(20) = 16$.

D'autre part, la puissance de 2 la plus grande qui est inférieure ou égale à 2020 est $1024 = 2^{10}$. D'après la **règle 2**, cette puissance est préférée à toute autre puissance de 2 plus petite et d'après la **règle 3**, elle est préférée à tout nombre qui n'est pas une puissance de 2. Il s'agit du nombre préféré parmi tous dans l'ensemble $\{1,\ 2, ...,\ 2020\}$. Par conséquent : $coeur(2020) = 1024$.

5.b. Soit k un entier strictement positif.

L'entier 2^k est une puissance de 2 qui est préférée à toute puissance de 2 plus petite et à tout entier qui n'est pas une puissance de 2. Cet entier est donc préféré à tout entier qui lui est inférieur ou égal.

Par conséquent, $coeur\left(2^k\right) = 2^k$. (Cette relation est aussi vérifiée si $k = 0$).

L'entier k étant strictement positif : $1 \leq 2^{k-1} \leq 2^k - 1 < 2^k$. Il existe donc au moins une puissance de 2 qui est inférieure ou égale à $2^k - 1$, ne serait-ce que 2^0, et la plus grande d'entre elles est 2^{k-1}. Cet entier est préféré a toute puissance de 2 plus petite et à tout entier qui n'est pas une puissance de 2, il est donc préféré à tout autre entier de l'ensemble $\{1,\ 2, ...,\ 2^k - 1\}$. Par conséquent : pour tout entier k strictement positif, $coeur\left(2^k - 1\right) = 2^{k-1}$

5.c. Soit p un entier strictement positif.

En vertu de la *propriété 2*, il existe un entier q positif ou nul unique tel que : $2^q \leq p < 2^{q+1}$.

La suite des puissances entières de 2 étant strictement croissante, pour tout exposant u positif ou nul, ou bien $0 \leq u \leq q$ et alors $1 \leq 2^u \leq 2^q \leq p$ ou bien $u \geq q+1$ et alors $2^u \geq 2^{q+1} > p$. Le nombre 2^q est caractéristiquement la plus grande puissance de 2 inférieure ou égale à p.

Pour tout entier x appartenant à $\{1, 2, ..., p\}$, ou bien x n'est pas une puissance de 2 et dans ce cas, d'après la **règle 1**, $x << 2^q$, ou bien x est une puissance de 2 et dans ce cas c'est d'après la **règle 2** que $x << 2^q$. Donc, 2^q est le nombre préféré parmi tous ceux de l'ensemble $\{1, 2, ..., p\}$.

Nous pouvons conclure : $coeur(p) = 2^q$.

L'application « cœur » est l'application qui associe à tout entier strictement positif la plus grande puissance de 2 qui lui est inférieure ou égale.

5.d. Compte tenu des résultats le la question **5.a**, l'associé de 20 est 4, car $16 = 2^4$ et l'associé de 2020 est 10 car $2^{10} = 1024$

5.e. La question **5.b** a établi que pour tout entier positif ou nul k, $coeur(2^k) = 2^k$. Toute puissance de 2 est égale à son cœur.

Réciproquement, soit p un entier strictement positif tel que $coeur(p) = p$.

D'après la question **5.c**, $coeur(p) = 2^q$ où q est l'associé de p et où 2^q est la plus grande puissance de 2 qui est inférieure ou égale à p.

Nous avons donc l'égalité : $2^q = p$, l'entier p est une puissance de 2.

Les nombres qui sont égaux à leur cœur sont les puissances positives ou nulles de 2, et elles seules.

5.f. Soit p un entier strictement positif et q son associé, c'est-à-dire l'entier positif ou nul unique qui vérifie l'inégalité : $2^q \leq p < 2^{q+1}$ (autrement dit : $coeur(p) = 2^q$). Alors en multipliant par 2 : $2^{q+1} \leq 2p < 2^{q+2}$, le nombre $q+1$ est l'associé de $2p$.

Nous obtenons la relation : $coeur(2p) = 2^{q+1} = 2\, coeur(p)$

Le nombre $coeur(p)$ étant un entier strictement positif, il est strictement inférieur à son double.

En conséquence, $coeur(p) < coeur(2p)$.

Et aussi $coeur(p) << coeur(2p)$ puisque les deux nombres $coeur(p)$ et $coeur(2p)$ sont, dans cet ordre, deux puissances consécutives de 2.

5.g. Considérons le rangement des vingt entiers de 1 à 20 :

$12 << 20 << 11 << 13 << 19 << 6 << 10 << 14 << 18 << 3 << 5 << 7 << 9 << 15 << 17 << 1 << 2 << 4 << 8 << 16$

Nous y voyons, entre autres contre-exemples du même tonneau, que $19 << 6$, alors que $coeur(19) = 16 = 2^4$ et $coeur(6) = 4 = 2^2$. Donc, $coeur(6) << coeur(19)$.

Nous sommes en présence de deux entiers rangés d'une certaine façon selon la relation << alors que leurs cœurs sont rangés autrement selon cette même relation.

Contrairement à ce qu'il est demandé de démontrer, il se peut que deux entiers soient rangés dans un sens, et leurs cœurs dans l'autre sens. L'énoncé de cette question est incorrect.