SUJET + CORRIGÉ

OLYMPIADES DE MATHÉMATIQUES

ACADÉMIE DE PARIS

Classes de première S • 2013

OLYMPIADES ACADÉMIQUES DE MATHÉMATIQUES

SESSION 2013

CLASSE DE PREMIÈRE

DURÉE : 4 heures

<u>Le candidat indique obligatoirement en tête de sa copie la série dans laquelle il compose</u>.

Le sujet est composé de quatre exercices indépendants, deux nationaux et deux pour l'Académie de Paris. <u>Il est vivement conseillé de traiter les quatre exercices dans l'ordre de leur présentation</u>.

Les calculatrices sont autorisées.

Le sujet comporte 6 pages y compris cette page.

Dès que ce sujet vous est remis, assurez-vous qu'il est complet.

EXERCICE NATIONAL 1 (*LES NOMBRES HARSHAD*)

Un entier naturel non nul est un **nombre Harshad** s'il est divisible par la somme de ses chiffres.
Par exemple, $n = 24$ est un nombre Harshad car la somme de ses chiffres est $2 + 4 = 6$, et 24 est bien divisible par 6.

1. a. Montrer que 364 est un nombre Harshad.

b. Quel est le plus petit entier qui ne soit pas un nombre Harshad ?

2. a. Donner un nombre Harshad de 4 chiffres.

b. Soit n un entier non nul. Donner un nombre Harshad de n chiffres.

3. a. Montrer que 110, 111, 112 forment une liste de trois nombres Harshad consécutifs.

b. En insérant judicieusement le chiffre 0 dans l'écriture décimale des nombres précédents, construire une autre liste de trois nombres Harshad consécutifs.

c. Justifier l'existence d'une infinité de listes de trois nombres Harshad consécutifs.

4. a. Soit $A = 30 \times 31 \times 32 \times 33$. Calculer la somme des chiffres de A.

b. En déduire que 98 208 030, 98 208 031, 98 208 032 et 98 208 033 forment une liste de quatre nombres Harshad consécutifs.

c. Justifier l'existence d'une infinité de listes de quatre nombres Harshad consécutifs.

5. a. En s'inspirant de la question 4, trouver une liste de cinq nombres Harshad consécutifs.

b. Justifier l'existence d'une infinité de listes de cinq nombres Harshad consécutifs.

6. a. Soit i un chiffre compris entre 0 et 8.

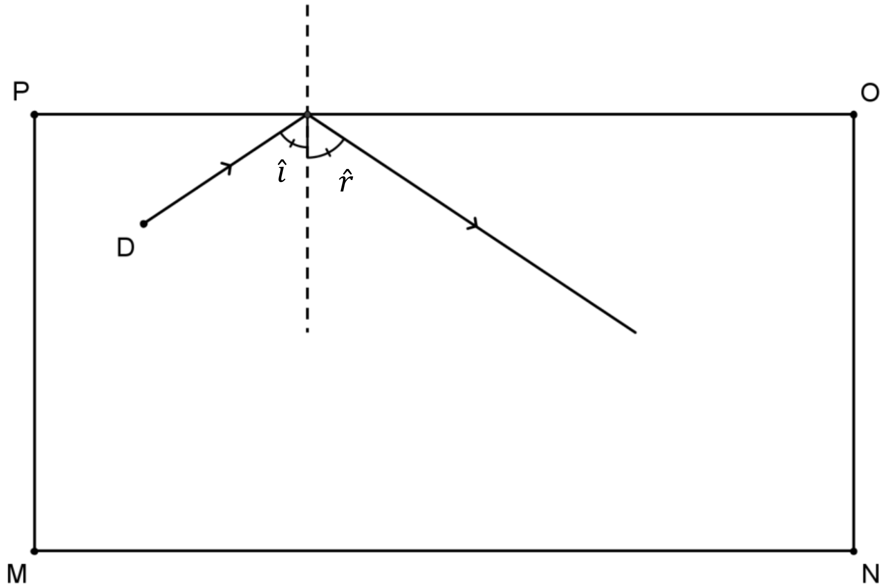
Soit p un entier dont le chiffre des dizaines est i et le chiffre des unités est 9.

Montrer que soit la somme des chiffres du nombre p soit celle de $p + 2$ est un nombre pair.
En déduire que p et $p + 2$ ne peuvent pas être tous les deux des nombres Harshad.

b. Existe-t-il une liste de 22 nombres Harshad consécutifs ?

EXERCICE NATIONAL 2 (*LE BILLARD RECTANGULAIRE*)

On considère un billard de forme rectangulaire, de longueur 300 cm et de largeur 160 cm dont les boules sont assimilées à des points.
Entre deux rebonds toutes les trajectoires sont rectilignes.
Lorsque la boule atteint l'un des bords (rails) du billard, elle y rebondit suivant les règles de la physique des chocs élastiques : l'angle d'incidence $\hat{\imath}$ étant égal à l'angle de réflexion $\hat{r}$, comme sur la figure ci-dessous ($\hat{\imath} = \hat{r}$).



1. On frappe une boule placée au milieu du rail [MN].

a. Quel point du rail [PO] peut-on viser pour que la boule atteigne le point N en une bande (c'est-à-dire avec un seul rebond) ?

b. Quel point du rail [PO] peut-on viser pour que la boule atteigne en une bande le milieu du rail [NO] ?

c. Quel point du rail [NO] peut-on viser pour que la boule revienne à son point de départ en trois bandes (c'est-à-dire après exactement trois rebonds) ?

2. On frappe une boule placée en un point quelconque du rail [MN].

a. Est-il possible d'atteindre en une bande n'importe quelle boule placée sur la surface de jeu ?

b. Est-il toujours possible de la frapper de sorte qu'elle revienne en trois bandes à son point initial ?

EXERCICE 3

Un dé tétraédrique, quand il est posé, laisse voir trois de ses quatre faces numérotées de 1 à 4. C'est la face cachée qui donne la « valeur » du dé après un lancer.

Est-il possible d'avoir deux dés tétraédriques pour lesquels les probabilités d'obtenir chacune des sommes possibles des valeurs des deux dés soient égales ?

On envisagera tous les cas :

1. les deux dés sont bien équilibrés ;
2. les deux dés sont pipés de la même manière ;
3. les deux dés sont pipés de deux manières différentes.

On notera p_i la probabilité que la valeur du premier dé soit le nombre i et q_i la probabilité que la valeur du deuxième dé soit le nombre i.

EXERCICE 4 (*ALGORITHME de PRABEKHAR*)

On considère l'algorithme suivant :

Variables : n, r, q, d, p des entiers naturels
Début
  Lire n
  $d \leftarrow n$
  $p \leftarrow 0$
  Tant que $d \neq 0$ **faire**
    $r \leftarrow$ reste de la division euclidienne de d par 10
    $q \leftarrow$ quotient de la division euclidienne de d par 10
    $d \leftarrow q$
    $p \leftarrow p + r^2$
  Fin Tq
  Afficher p
Fin

Si p est le résultat de l'algorithme appliqué à n, on notera $n \rightarrow p$.
On dira que p est l'**image** de n ou que n est un **antécédent** de p.

Partie A : Description de l'algorithme

1. (a) Vérifier que $157 \rightarrow 75$, puis que $75 \rightarrow 74$, puis que $74 \rightarrow 65$.
La suite $157 \rightarrow 75 \rightarrow 74 \rightarrow 65$ … sera appelé la **trajectoire** du nombre 157.

(b) Déterminer l'image de 12 345.

(c) Décrire simplement par une phrase ce que fait cet algorithme.

2. (a) Montrer que tout entier naturel non nul p possède une infinité d'antécédents.

(b) Montrer que 157 ne peut avoir d'antécédent de trois chiffres.

Trouver un nombre d'au maximum quatre chiffres qui soit un antécédent de 157.

3. Soit s un entier naturel donné.
(a) Représenter graphiquement les points de coordonnées entières, positives et de somme s.
(b) Trouver le(s) nombre(s) de deux chiffres dont la somme des chiffres est s et ayant une image minimum.

Partie B : Trajectoires des nombres à deux chiffres

On a représenté les trajectoires des nombres de 1 à 9

3	→	**9**	→	81	→	65	→	61								64	←	**8**				
								↓								↓						
								37	→	58						52						
							↗				↘					↓						
						16						89	←	85	←	29	←	25	←	**5**		
						↑						↓						↑				
						4						145						50				
					↗		↖				↙							↑				
				2				20	←	42								17				
																		↑				
																		41				
1	→	1																↑				
7	→	49	→	97	→	130	→	10	→	1								45	←	36	←	**6**

On remarque que les trajectoires des nombres à un chiffre aboutissent au « *puits* » 1 ou dans le « *cycle* » $C = \{4, 16, 37, 58, 89, 145, 42, 20\}$.
Montrer que la trajectoire d'un nombre compris entre 1 et 100 échoue dans le puits 1 ou le cycle C.
On pourra utiliser le tableau suivant, à compléter, dans lequel est indiqué où échoue la trajectoire d'un nombre à deux chiffres (en colonne le chiffre des unités, en ligne le chiffre des dizaines).

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	X	1	*C*	*C*	*C*	*C*	*C*	1	*C*	
1	1	*C*	*C*	1	*C*	*C*	*C*	*C*	*C*	
2	*C*	*C*	*C*	1	*C*	*C*	*C*	*C*	1	
3	*C*	1	1	*C*	*C*	*C*	*C*	*C*	*C*	
4	*C*	*C*	*C*	*C*	1	*C*	*C*	*C*	*C*	
5	*C*	*C*	*C*	*C*	*C*	*C*	*C*	*C*	*C*	
6	*C*	*C*	*C*	*C*	*C*	*C*	*C*	*C*	1	
7	1	*C*	*C*	*C*	*C*	*C*	*C*	*C*	*C*	
8	*C*	*C*	1	*C*	*C*	*C*	1	*C*	*C*	
9										

Partie C : Trajectoires des nombres à *n* chiffres

Soit n un entier strictement positif, on note P_n la propriété : « la trajectoire de tout nombre à n chiffres échoue soit dans le puits 1 soit dans le cycle $C = \{4, 16, 37, 58, 89, 145, 42, 20\}$ ». On a vu que P_1 et P_2 sont vraies.

1. **Nombres à trois chiffres**
   (a) Soit N un nombre à trois chiffres. Montrer que son image est majorée par 243.
   Montrer que l'image de l'image de N est majorée par 163.

   (b) Démontrer que P_3 est vraie.

2. **Les nombres à 2013 chiffres**
   Que pensez-vous de P_{2013} ?