SUJET + CORRIGÉ

OLYMPIADES DE MATHÉMATIQUES

ACADÉMIE DE PARIS

Classes de première S • 2012

OLYMPIADES ACADÉMIQUES DE MATHÉMATIQUES

SESSION 2012

CLASSE DE PREMIÈRE

DURÉE : 4 heures

Le candidat indique obligatoirement en tête de sa copie la série dans laquelle il compose.

Le sujet est composé de quatre exercices indépendants, deux nationaux et deux pour l'Académie de Paris. Il est vivement conseillé de traiter les quatre exercices dans l'ordre de leur présentation.

Les calculatrices sont autorisées.

Le sujet comporte 6 pages y compris cette page.

Dès que ce sujet vous est remis, assurez-vous qu'il est complet.

EXERCICE NATIONAL 1 (*Nombre entier digisible*)

On dit qu'un nombre entier est *digisible* lorsque les trois conditions suivantes sont vérifiées :

- aucun de ses chiffres n'est nul ;
- il s'écrit avec des chiffres tous différents ;
- il est divisible par chacun d'eux.

Par exemple,

- 24 est *digisible* car il est divisible par 2 et par 4.
- 324 est *digisible* car il est divisible par 3, par 2 et par 4.
- 32 n'est pas *digisible* car il n'est pas divisible par 3.

On rappelle qu'un nombre entier est divisible par 3 si et seulement si la somme de ses chiffres est divisible par 3.

1. Proposer un autre nombre *digisible* à deux chiffres.

2. Proposer un nombre *digisible* à quatre chiffres.

3. Soit n un entier *digisible* s'écrivant avec un 5.

a. Démontrer que 5 est le chiffre de ses unités.

b. Démontrer que tous les chiffres de n sont impairs.

c. Démontrer que n s'écrit avec au plus quatre chiffres.

d. Déterminer le plus grand entier *digisible* s'écrivant avec un 5.

4. Soit n un entier *digisible* quelconque.

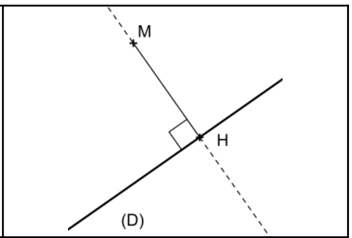
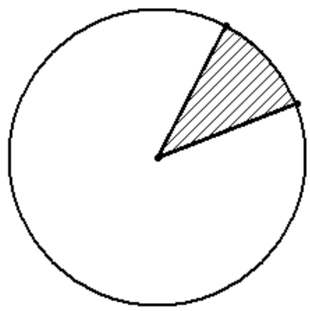
a. Démontrer que n s'écrit avec au plus sept chiffres.

b. Si n s'écrit avec sept chiffres, dont un 9, déterminer les chiffres de n.

c. Déterminer le plus grand entier *digisible*.

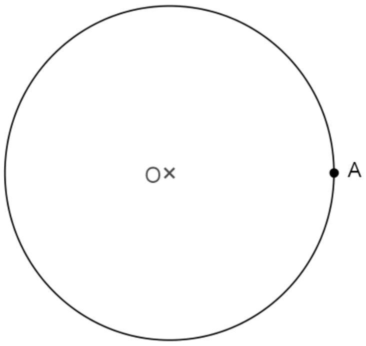
EXERCICE NATIONAL 2

Rappels

• On *appelle* ***distance entre un point M et une droite (D)*** *la distance MH, où H est le point d'intersection de (D) avec la droite perpendiculaire à (D) passant par M.*	
• *Dans la figure ci-contre, si le rayon du disque est R, et si l'angle du secteur angulaire hachuré mesure α (en degrés), alors* ***l'aire de la portion de disque*** *hachurée vaut* $\frac{\pi R^2 \alpha}{360}$ *Dans la partie II de l'exercice, on considèrera la distance d'un point M à* ***un segment*** *[BC] comme étant la distance du point M à la droite (BC).*	

Partie I

Soit C un cercle de centre O, A un point de ce cercle et D le disque délimité par ce cercle.



1. Reproduire la figure, et représenter l'ensemble des points du disque équidistants de O et de A.

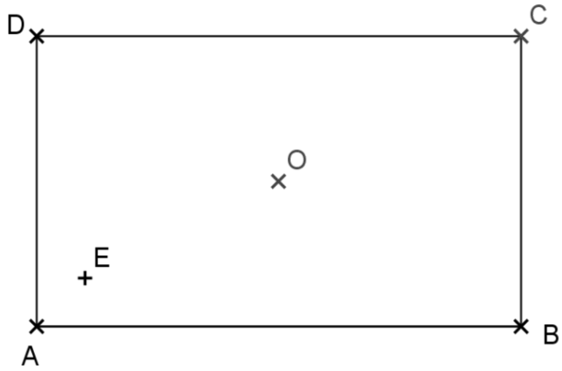
2. Hachurer l'ensemble des points du disque plus proches de O que de A.

3. Soit M un point déterminé aléatoirement de manière équiprobable sur la surface du disque D.

Quelle est la probabilité que M soit plus proche de O que de A ?

Partie II

Soit ABCD un rectangle de longueur AB = 20 cm et de largeur BC = 12 cm, de centre O.
Soit E un point situé à l'intérieur du rectangle, proche de A, à 2 cm de chaque bord (comme sur la figure ci-après, qui n'est toutefois pas à l'échelle).
Soit M un point déterminé aléatoirement de manière équiprobable à l'intérieur du rectangle ABCD.



1. Quelle est la probabilité que M soit plus proche du côté [BC] que du côté [AD] ?

2. ***a.*** Reproduire le rectangle, et représenter l'ensemble des points intérieurs au rectangle et équidistants des côtés [AB] et [BC].

b. Hachurer l'ensemble des points intérieurs au rectangle et plus proches du côté [BC] que du côté [AB].

c. Quelle est la probabilité que M soit plus proche du côté [BC] que du côté [AB] ?

3. Quelle est la probabilité que M soit plus proche du côté [AB] que des trois autres côtés [BC], [CD] et [DA] ?

4. Quelle est la probabilité que M soit plus proche de O que de E ?

Quelle est la probabilité que M soit plus proche de O que des quatre sommets A, B, C et D ?

EXERCICE 3

On dispose d'une calculatrice cassée. Quand on l'allume, elle affiche 0 et se trouve en mode degré. Les touches numériques ne fonctionnent pas ; les seules touches qui sont en bon état sont les touches

On admet que, pour tout $x \in [0; 1]$, $\cos^{-1}(x) \in [0; 90]$ et $\cos(\cos^{-1}(x)) = x$
On admet que, pour tout $x \in [0; +\infty[$, $\tan^{-1}(x) \in [0; 90[$ et $\tan(\tan^{-1}(x)) = x$

Exemple de séquence de calcul avec cette calculatrice :

Si on allume la calculatrice : elle affiche 0 ;

si *on tape alors sur la touche* `cos` : *elle affiche* 1 ;

et si on tape ensuite sur la touche `tan⁻¹` : *elle affiche* 45.

1. Montrer que, pour tout $z \in]0;1]$, $g(z) = \tan(\cos^{-1}(z)) = \dfrac{\sqrt{1-z^2}}{z}$.

2. Montrer que, pour tout $x \in [0; +\infty[$, $f(x) = \sin(\tan^{-1}(x)) = \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$.

3. On utilise l'algorithme suivant :

   Début

   Choisir : un entier $n > 1$;

   Allumer la calculatrice ;

   Taper sur la touche `cos` ;

   Pour i **allant de** 1 **à** $n^2 - 1$ **faire**

   Taper sur la touche `tan⁻¹` ;

   Taper sur la touche `sin` ;

   Fin pour

   Fin.

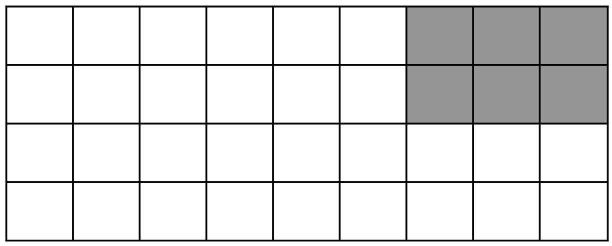
   Quel résultat obtient-on à l'écran de la calculatrice après avoir appliqué cet algorithme pour $n = 1000$?

4. Comment peut-on obtenir le nombre entier 2012 à l'écran ?

EXERCICE 4

Deux joueurs établissent les règles d'un jeu : sur un damier rectangulaire de dimensions quelconques $n \times p$ (n lignes et p colonnes), $n > 1$ et $p > 1$, chaque joueur à tour de rôle coche une case. La case cochée ainsi que toutes celles qui se trouvent au-dessus et à droite, lorsqu'elles existent, sont neutralisées.

Exemple : Dans le cas ci-dessous la croix désigne la case cochée, et le grisé les cases neutralisées



Le perdant est celui qui coche la dernière case. Montrer que celui qui joue le premier a une stratégie gagnante :

- dans le cas $n \times n$ (c'est à dire $p = n$) ;
- dans le cas $2 \times p$ (c'est à dire $n = 2$) ;
- dans le cas général.

CORRECTION, PARIS 2012

Premier exercice Académique (exo 3)

Olympiades mathématiques, S

1. $\tan(y) = \dfrac{\sin(y)}{\cos(y)} = \dfrac{\sqrt{1-\cos^2(y)}}{\cos(y)}$
   En remplaçant y par $\cos^{-1}(z)$, on obtient l'égalité souhaitée.
2. $\sin(y) = \tan(y) \times \cos(y)$ et $1 + \tan^2(y) = \dfrac{1}{\cos^2(y)}$ donc $\sin(y) = \dfrac{\tan(y)}{\sqrt{1+\tan^2(y)}}$
   En remplaçant$y$ par $\tan^{-1}$, on obtient l'égalité souhaitée.
3. On pose $f(x) = \sin\left(\tan^{-1}(x)\right) = \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$
   Avant de rentrer dans la boucle, on a la valeur 1.

   A la première étape de la boucle on a la veleur $f(1) = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$

   A la deuxième étape de la boucle on a la valeur $f\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right) = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$

   A la troisième étape de la boucle on a la valeur $f\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right) = \dfrac{1}{\sqrt{4}}$

   A la dernière étape de la boucle on a la valeur $f\left(\dfrac{1}{\sqrt{n^2-1}}\right) = \dfrac{1}{\sqrt{n^2}}$

   Remarque : $f\left(\dfrac{1}{\sqrt{k}}\right) = \dfrac{\dfrac{1}{\sqrt{k}}}{\sqrt{1+\dfrac{1}{k}}} = \dfrac{1}{\sqrt{k+1}}$

   Après l'application de l'algorithme, la calculatrice affiche la valeur de $\dfrac{1}{n}$
4. $g\left(f(x)\right) = \dfrac{\sqrt{1-(f(x))^2}}{f(x)} = \dfrac{\sqrt{1-\left(\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)^2}}{\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}} = \dfrac{\sqrt{1-\dfrac{x^2}{1+x^2}}}{\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}} = \dfrac{1}{x}.$
   On applique l'algorithme précédent avec $n = 2012$ puis on tape la séquence
   $\boxed{\tan^{-1}}$ puis $\boxed{\sin}$ puis $\boxed{\cos^{-1}}$ puis $\boxed{\tan}$

   et on obtient 2012.

CORRECTION, PARIS 2012

Second exercice Académique (exo 4)

Olympiades mathématiques, S

On considère que les lignes sont numérotées, de haut en bas, de 1 à n ; que les colonnes sont numérotées, de gauche à droite, de 1 à p.

Premier cas

Dans le cas $n\times n$, le premier joueur ($J1$) doit cocher la case $((n-1);2)$ de façon à obtenir une configuration ne comportant plus que la première colonne et la dernière ligne. Il reste alors $2n-1$ cases. Quelle que soit la réponse du second joueur ($J2$), $J1$ doit jouer de manière à préserver la symétrie de la configuration et par là-même un nombre de cases impair. $J2$ ne pourra faire autrement que de cocher la dernière case.

Deuxième cas

Dans le cas $2\times p$, $J1$ doit cocher la case $(1;p)$ (il reste alors $2p-1$ cases).Ensuite quelque soit la réponse de $J2$ il doit toujours maintenir cet écart d'une case (il restera toujours un nombre impair de cases).

Par exemple :

Si $J2$ coche la case $(1;r)$ (avec $1 < r < p$), alors $J1$ coche $(2;(r-1)$;

si $J2$ coche la case $(1;1)$, alors $J1$ coche $(2;2)$, il ne reste plus alors que la case $(2;1)$;

si $J2$ coche la case $(2;r)$ (avec $1 < r \leqslant p$), alors $J1$ coche $(1;(r-1))$.

Cas général

Il faut remarquer que ce jeu comporte un nombre fini de coups. Chaque damier permet donc de mettre en œuvre une stratégie gagnante. Il existe un premier coup pour $J1$, cocher la case $(1;n)$, tel que quelque soit la réponse de $J2$, la configuration obtenue à l'issue de ces deux coups aurait pu être obtenue par $J1$ dès le premier coup. Cela permet de conclure que le premier joueur a toujours une stratégie gagnante.