SUJET + CORRIGÉ

OLYMPIADES DE MATHÉMATIQUES

ACADÉMIE DE PARIS

Classes de première S • 2011

OLYMPIADES ACADÉMIQUES DE MATHÉMATIQUES

SESSION 2011

CLASSE DE PREMIÈRE

DURÉE : 4 heures

Le candidat indiquera obligatoirement en tête de sa copie la série dans laquelle il compose.

Le sujet est composé de quatre exercices indépendants, deux nationaux et deux pour l'Académie de Paris. Il est vivement conseillé de traiter les quatre exercices dans l'ordre de leur présentation.

Les calculatrices sont autorisées

EXERCICE NATIONAL 1 (*Essuie-glaces*)

(Les parties 1, 2 et 3 sont indépendantes)

On se propose de calculer l'aire de la surface essuyée par plusieurs modèles de balais d'essuie-glace d'un véhicule. On considèrera que les pare-brises sont des surfaces planes.

1. Un premier véhicule est équipé d'un seul balai porté par une tige métallique de 60 cm, modélisée par un segment [OB]. Soit A le point de [OB] tel que OA = 15 cm. Le balai en caoutchouc est alors modélisé par le segment [AB] (voir figure 1 ci-dessous). Déterminer la valeur exacte de l'aire de la surface essuyée par le balai, en admettant que celui ci décrit autour du point O un angle de 180°. En donner une valeur arrondie au cm^2 près.

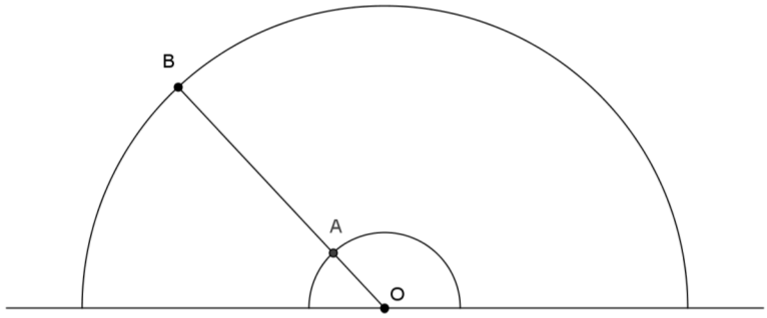


Fig. 1

2. Le pare-brise d'un second véhicule possède deux essuie-glaces modélisés par deux segments [OB] et [O'B'] de même longueur R, l'un tournant autour d'un point O, l'autre autour d'un point O', tels que OO' = R (voir figure 2 ci-dessous). Ces balais en caoutchouc couvrent la longueur totale de chaque segment. L'extrémité de chaque segment décrit un demi-cercle au-dessus de la droite (OO'). Déterminer l'aire de la surface du pare-brise essuyée par les balais.

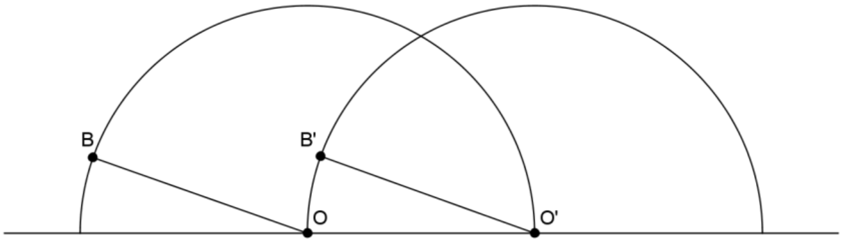


Fig. 2

3. Un troisième véhicule est équipé d'un essuie-glace dont le support métallique est modélisé par la réunion de deux segments (voir la figure 3 ci-dessous) : un segment [AB], qui porte le balai en caoutchouc sur toute sa longueur, et un segment [OC] qui relie le centre de rotation O à un point C du segment [AB] tels que $\widehat{OCA}$ = 30°, CB = 4 CA et $OC = \sqrt{3} \times CA$. On pose CA = a.

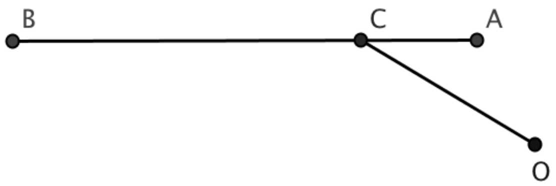


Fig. 3

a. Démontrer que le triangle AOC est isocèle.
b. Lorsqu'il essuie le pare-brise du véhicule, l'essuie-glace tourne autour du point O. En début de course le balai en caoutchouc est en position horizontale : les points A, B et C coïncident respectivement avec les points M, N et P du pare-brise tels que [MN] est horizontal (voir la figure 4 ci-dessous). En fin de course A, B, C coïncident respectivement avec les points M', N' et P' du pare-brise tels que le segment [OM'] est horizontal.

Déterminer l'angle dont a tourné le dispositif autour du point O pour passer d'une position à l'autre, puis exprimer en fonction de a l'aire de la surface essuyée par le balai.

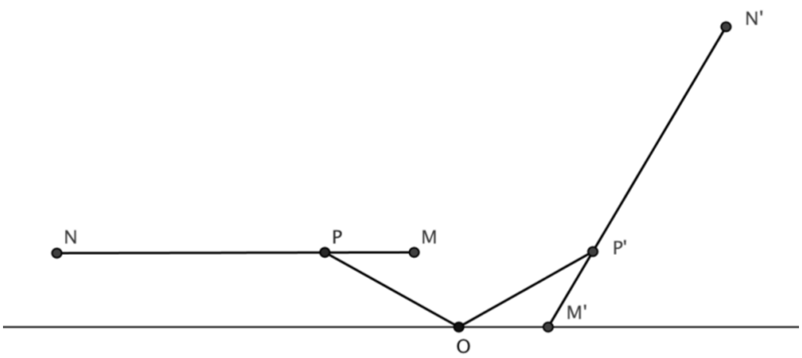


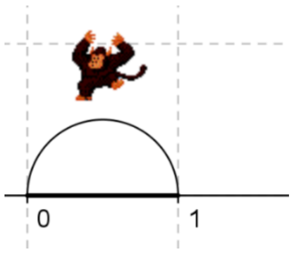
Fig. 4

EXERCICE NATIONAL 2 (*Le singe sauteur)*

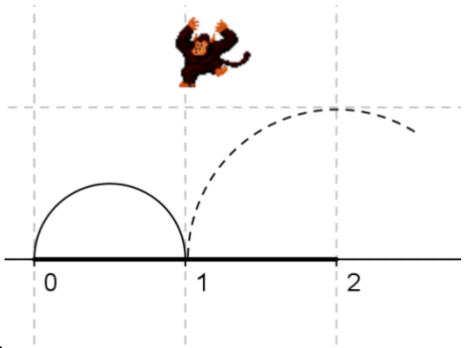
J'ai un petit singe sauteur qui passe son temps à faire des bonds sur une demi-droite graduée en choisissant d'aller vers l'avant ou vers l'arrière.

Le nombre n est dit ***atteignable*** si le singe peut, en partant de l'**origine** (position d'abscisse 0), atteindre la position d'abscisse n en **exactement** n bonds successifs (en avant ou en arrière) de longueurs 1, 2, …, n (**effectués** dans cet ordre) et sans **jamais** sortir du segment $[0 ; n]$.

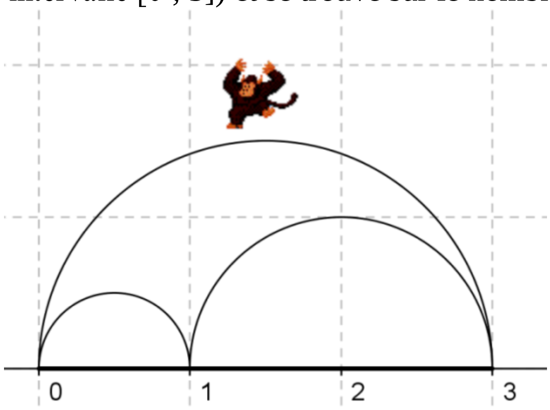
Par exemple : Le nombre 1 est atteignable en un bond.



Mais le nombre 2 ne l'est pas car, après avoir fait le bond de longueur 1 (qu'il est obligé de faire vers l'avant), s'il fait un bond de longueur 2 en avant ou en arrière il sort de l'intervalle $[0 ; 2]$.



Le nombre 3 n'est pas atteignable pour une autre raison : après avoir fait un bond de longueur 1 et un autre de longueur 2 vers l'avant, il est obligé de faire un bond de longueur 3 vers l'arrière (sinon il sort de l'intervalle $[0 ; 3]$) et se trouve sur le nombre 0 au lieu de 3.



Questions

1. Montrer que le nombre 4 est atteignable et ceci d'une seule façon.
2. Montrer que le nombre 5 n'est pas atteignable.

On peut montrer de la même façon que les nombres 6, 7 et 8 ne sont pas atteignables ; *ce résultat est admis*.

3. Le nombre 9 est-il atteignable ?

Pour la suite, on rappelle que, pour tout nombre entier *m*, on a : $1+2+3+....+m=\dfrac{m(m+1)}{2}$.

4. Montrer que tous les nombres entiers qui sont des carrés sont atteignables.

5.
   a. Montrer que si le nombre entier n est atteignable alors le produit $n(n-1)$ est divisible par 4. En déduire une condition sur l'entier n pour qu'il soit atteignable.
   b. La réciproque de cette proposition est-elle vraie ?

6. On suppose $N \geq 6$ et atteignable par une séquence qui commence par 1+2+3 …
   Montrer que N+4 est aussi atteignable.

EXERCICE 3 (*Des bâtons et des pavés)*

En une dimension :

Soit N un entier naturel non nul.
On appelle ***bâton*** *tout intervalle inclus dans* $[0, N]$, *non réduit à un point, dont les bornes sont des nombres entiers.*
Question n°1 : Combien existe-t-il de tels bâtons ?

En trois dimensions :

On dispose de cubes de même taille portant tous des numéros distincts.
On appelle ***boîte*** *tout assemblage de ces cubes formant un pavé (parallélépipède rectangle) plein. Deux boîtes contenant des cubes différents sont considérées distinctes.*
Une boîte *B* comporte 385 cubes.

Question n°2 : Quelles sont les dimensions de *B* sachant qu'elles sont toutes strictement supérieures à un ?

Question n°3 : Combien de boîtes distinctes la boîte *B* contient-elle ?

On enlève 7 des 8 cubes situés au sommet de *B* pour former le solide *S*.
Question n°4 : Combien de boîtes distinctes le solide *S* contient-il ?

EXERCICE 4

Une baguette est cassée en trois morceaux ; les points de fracture sont situés au hasard.
Déterminer la probabilité que l'on puisse construire un triangle non aplati avec ces trois morceaux.

ÉLÉMENTS DE CORRECTION DES EXERCICES 3 et 4

EXERCICE 3 (*Des bâtons et des pavés)*

1) $\binom{n+1}{2} = 1+2+\cdots+n = \frac{n(n+1)}{2}$
2) $385 = 5 \times 7 \times 11$, la décomposition étant unique.
3) On note $385 = k \times l \times m$
   N_{tot} désigne le nombre de boîtes contenues dans $\mathcal{B}$. Il y en a :
   $\boxed{N_{tot} = \frac{k(k+1)}{2} \times \frac{l(l+1)}{2} + \frac{m(m+1)}{2} = 15 \times 28 \times 66 = \mathbf{27\ 720}}$
4) Soit N le nombre recherché. Il convient d'ôter au nombre N_{tot} trouvé précédemment les boîtes contenant :

- tous les sommets.

  Il y en a $\boxed{N_{pavé} = 1}$

- une face entière de $\mathcal{B}$ et une seule.

  Les 6 faces de $\mathcal{B}$ se répartissent par paires suivant 3 dimensions possibles :
  5×7 ; 5×11 et 7×11
  Il y a $n_{k,l} = m - 1$ boîtes distinctes contenant une face donnée de dimensions $k \times l$ et elle seule, donc
  $\boxed{N_{face} = 2(n_{5,7} + n_{5,11} + n_{7,11}) = 2((11-1)+(7-1)+(5-1)) = 40}$

- une arête entière de $\mathcal{B}$ et une seule.

  Les arêtes de $\mathcal{B}$ se répartissent par quadruplets suivant 3 dimensions possibles : 5 ; 7 et 11 .
  Il y a $n_k = (l-1)(m-1)$ boîtes distinctes contenant une arête donnée de dimension k et elle seule, donc

$$\boxed{N_{arête} = 4(n_5 + n_7 + n_{11}) = 4((7-1)(11-1)+(5-1)(11-1)+(5-1)(7-1)) = 4(60+40+24) = 496}$$

- un sommet de $\mathcal{B}$ et un seul, parmi les 8 possibles.

  Il y a $(k-1)(l-1)(m-1) = 4 \times 6 \times 10 = 240$ boîtes contenant un sommet donné et aucun autre. Il convient donc d'écarter $\boxed{\frac{7}{8} N_{sommet} = 7 \times 240 = \mathbf{1\ 680}}$ boîtes.

$$\boxed{\begin{aligned} \mathcal{N} &= N_{tot} - N_{pavé} - N_{face} - N_{arête} - \frac{7}{8} N_{sommet} \\ &= 27\ 720 - 1 - 40 - 496 - 1\ 680 \\ &= 27\ 720 - 2217 \\ &= \mathbf{25\ 503} \end{aligned}}$$

EXERCICE 4

Le plan est rapporté au repère orthonormal *(O ; I, J)*, on suppose la baguette égale au segment [*OI*]. Appelons *x* et *y* les abscisses des points de fracture ; *x* et *y* sont répartis suivant la loi uniforme sur [0 ;1] et le point *P*(*x* ;*y*) est dans le carré [*OI*]x[*OJ*].

Supposons $x \leq y$: on peut obtenir un triangle non aplati si et seulement si : $x < \frac{1}{2}$, $y - x < \frac{1}{2}$, $1 - y < \frac{1}{2}$. Ces trois conditions déterminent un triangle inclus dans $[OI] \times [OJ]$, d'aire $\frac{1}{8}$.

On traite de même le cas $x > y$. La probabilité demandée est donc égale à $\frac{1}{4}$.