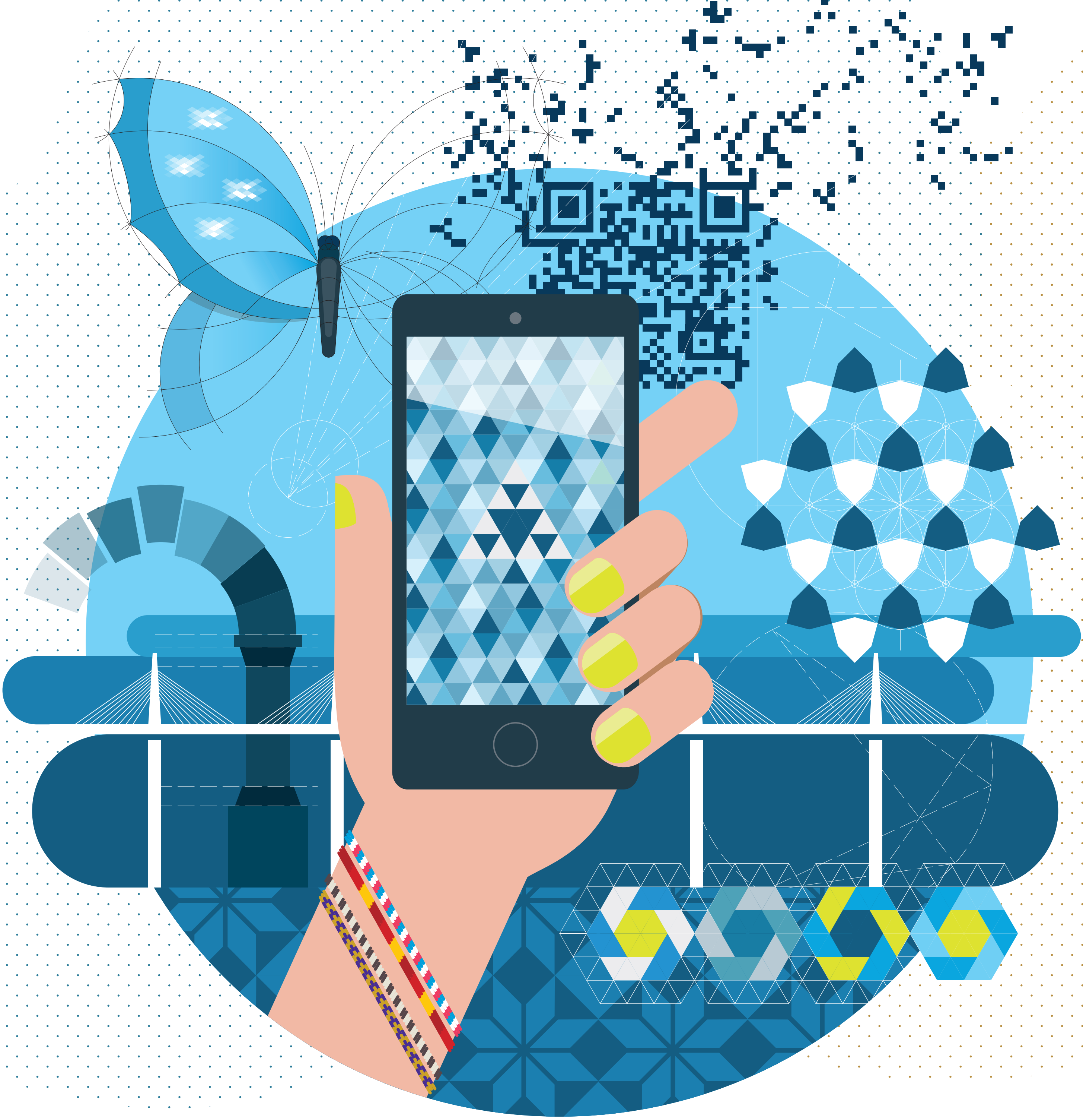
OLYMPIADES MATHÉMATIQUES
LYCÉE, PREMIÈRE

ACADÉMIE D'ORLÉANS-TOURS
2020

SUJET + CORRIGÉ



20e OLYMPIADES DE MATHÉMATIQUES

Mercredi 11 mars 2020[1], 2 énoncés (national et académique) en 4 heures, élèves de première générale et technologique[2] et de début de terminale[3], inscription auprès de votre professeur de mathématiques avant les vacances d'hiver selon académie.

Liberté • Égalité • Fraternité
RÉPUBLIQUE FRANÇAISE
MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE

Olympiades nationales de mathématiques 2020

Enoncés académiques

10h10 à 12h10

L'usage des calculatrices est autorisé.

Les candidats traitent ***deux exercices*** *par groupes de 2 ou 3* ***:***

- *Les candidats suivant l'enseignement de spécialité de mathématiques de la série générale traitent les exercices numéros 1 et 2.*
- *Les candidats ne suivant l'enseignement de spécialité de mathématiques de la série générale traitent les exercices numéros 1 et 3.*

Tous les élèves d'un même groupe doivent noter leur numéro d'anonymat sur la copie commune.

Exercice académique 1 (à traiter par groupe de 2 ou 3 élèves par tous les candidats)

Suites de Conway

Toutes les réponses aux questions posées doivent être justifiées avec clarté.
La suite de Conway est une suite mathématique inventée en 1986 par le mathématicien John Horton Conway, initialement sous le nom de « suite audioactive ». Elle est également connue sous le nom anglais de Look and Say (« regarde et dis »). Dans cette suite, un terme se détermine en annonçant les chiffres formant le terme précédent.[1]
On appelle le 1er terme de la suite « la graine ».
Exemple : si on choisit que la graine vaut 1 on note $u_1 = 1$
On lit UN chiffre UN donc le terme suivant sera 11, on notera $u_2 = 11$
On lit DEUX chiffres UN donc le terme suivant sera 21, on notera $u_3 = 21$
Et enfin, on lit UN chiffre DEUX puis UN chiffre UN donc le terme suivant sera 1211, on notera $u_4 = 1211$
etc…

<u>PARTIE A : « Jouons avec la graine ».</u>

1. Déterminez les 10 premiers termes de la suite de Conway de graine 1.
2. Déterminez les 6 premiers termes de la suite de Conway de graine 0.
3. Déterminez les 6 premiers termes de la suite de Conway de graine 42.
4. Existe-t-il une graine qui donne une suite constante ?

Dans la suite du sujet, nous ne considèrerons que la suite de Conway de graine 1 (voir Partie A question 1)
<u>PARTIE B: Quelques démonstrations avec la graine 1.</u>

1. En vous aidant du **A.1**, conjecturez quels chiffres n'apparaissent pas dans cette suite de Conway.
2. Dans cette question, nous allons démontrer que 4 ne peut être obtenu à partir d'une suite composée de 1, de 2 et de 3.
   Considérons n le premier rang de la suite où apparait un chiffre 4.
   a. Au rang $n-1$, conjecturer les différentes suites de chiffres qu'il est nécessaire d'avoir pour obtenir un 4 au rang suivant ?
   b. Dans cette question, nous cherchons à prouver que l'on ne peut obtenir la séquence 1111.
   Si la séquence du rang n est 211112, étudions les différentes façons d'obtenir cette séquence

Rang n	(21)(11)(12)	..2)(11)(11)(2..
Rang n-1	(11) (1)(2)	..2) (1) (1) (..
	Impossible car 111 s'écrira 31 au rang suivant au lieu de 2111	Impossible car 11 s'écria 21 au rang suivant au lieu de 1111

   Détaillez pourquoi on ne peut pas avoir les séquences 211113 , 311112 et 311113 .

   c. Faire de même avec la séquence 2222.
   d. Faire de même avec la séquence 3333.

e. Conclure.

---

[1] Source : wikipedia

Nous admettrons pour la fin du sujet que la suite est composée de séquences.

Nous les appellerons :

- Singletons, les séquences du type : 1, 2, 3 ;
- Doublets, celles du type : 11, 22, 33 ;
- Triplets, celles du type : 111, 222, 333.

3. Pour le $n^{\text{ème}}$ terme, on note : T_n le nombre de triplets, D_n le nombre de doublets et S_n le nombre de singletons et C_n le nombre de chiffres.
    a. Déterminez $T_{10}, D_{10}, S_{10}, C_{10}$ et C_9 en vous aidant de la question **A.1.**
    b. Expliquez pourquoi $C_n = 3T_n + 2D_n + S_n$
    c. Au rang suivant que deviennent les triplets 111, 222 et 333 ?
    d. Même question pour les doublets et les singletons.
    e. En déduire une formule permettant de calculer C_{n+1} en fonction de T_n ,D_n et S_n.
    f. Prouvez que le nombre de termes est pair à partir du rang $n \geq 2$.
4. Certaines séquences semblent impossibles à obtenir. Prouvez que 333 n'est pas possible à obtenir.

Exercice académique 2 (à traiter par groupe de 2 ou 3 par les candidats ayant suivi la spécialité de mathématiques de la voie générale)

A Lapointe du bibinaire

Depuis votre plus tendre enfance, vous savez que le nombre 2020 représente 2 milliers et 2 dizaines c'est-à-dire que :

$$2020 = 2 \times 10^3 + 0 \times 10^2 + 2 \times 10^1 + 0 \times 10^0$$

Cette décomposition de 2020 à l'aide de puissances de 10 explique que le nombre 2020 s'écrive avec la suite de chiffres 2, 0, 2 et 0. Cette décomposition est appelée décomposition en base 10.
Ce système d'écriture est appelé le **système décimal** et les caractères utiles pour écrire ces nombres sont les chiffres de 0 à 9.

Par ailleurs, on peut aussi écrire :

$$2020 = 1 \times 2^{10} + 1 \times 2^9 + 1 \times 2^8 + 1 \times 2^7 + 1 \times 2^6 + 1 \times 2^5 + 0 \times 2^4 + 0 \times 2^3 + 1 \times 2^2 + 0 \times 2^1 + 0 \times 2^0.$$

$\mathbf{1} \times 2^{10}$	$\mathbf{1} \times 2^9$	$\mathbf{1} \times 2^8$	$\mathbf{1} \times 2^7$	$\mathbf{1} \times 2^6$	$\mathbf{1} \times 2^5$	$\mathbf{0} \times 2^4$	$\mathbf{0} \times 2^3$	$\mathbf{1} \times 2^2$	$\mathbf{0} \times 2^1$	$\mathbf{0} \times 2^0$
1	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**0**	**0**	**1**	**0**	**0**

On vient de décomposer 2020 à l'aide de puissances de 2, on parle de décomposition en base 2.
Le tableau ci-dessus, indique que le nombre 2020 s'écrit en base 2 : $11111100100_{(binaire)}$.
Ce système d'écriture est appelé le **système binaire** et les caractères utiles pour écrire ces nombres sont les chiffres 0 et 1.

I. Écriture binaire des entiers naturels inférieurs ou égaux à 15

Justifier les écritures binaires grisées données dans le tableau ci-dessous :

Système décimal	0	1	2	3	4	5	6	7
Système binaire	0000	0001	0010	0011	0100	0101	0110	0111

Système décimal	8	9	10	11	12	13	14	15
Système binaire	1000	1001	1010	1011	1100	1101	1110	1111

II. En route vers le bibinaire

On peut aussi écrire 2020 de la façon suivante :

$$2020 = 7 \times 16^2 + 14 \times 16^1 + 4 \times 16^0.$$

Cette décomposition est appelée décomposition en puissances de 16 et dans ce cas, les coefficients des puissances de 16 successives sont des nombres compris entre 0 et 15.

Boby Lapointe, chanteur humoriste des années 60, inventa un nouveau système : le bibinaire.
Ce système permet de réécrire les nombres binaires à l'aide du tableau ci-dessous :

	Pour les 2 caractères de gauche				Pour les deux caractères de droite			
Binaire	00	01	10	11	00	01	10	11
Bibinaire	H	B	K	D	O	A	E	I

Exemples :

- Le nombre 7 s'écrit en bibinaire BI car 7 s'écrit en binaire $\underbrace{01}_{\text{B}}\,\underbrace{11}_{\text{I}}$.
- Le nombre 2020 qui s'écrit $7 \times 16^2 + 14 \times 16^1 + 4 \times 16^0$ peut s'écrire :
  $BI \times 16^2 + DE \times 16^1 + BO \times 16^0$ qui sera noté $BIDEBO_{(bibi)}$.
- Le nombre $BIDE_{(bibi)}$ exprimé en bibinaire vaut en base 10 :
  $$BI \times 16^1 + DE \times 16^0 = 7 \times 16^1 + 14 \times 16^0 = 126.$$

1. Donner la date du jour (11/03/2020) en bibinaire.
2. a. Que valent en base 10, les mots $KADO_{(bibi)}$ et $DEBIBI_{(bibi)}$?
   b. En déduire la valeur en base 10 de $KADODEBIBI_{(bibi)}$.

3. **Bibinaire en somme**
   a. Calculer en bibinaire les sommes :
   $$KE_{(bibi)} + BE_{(bibi)}, DI_{(bibi)} + BE_{(bibi)} \text{ et } HAHO_{(bibi)} + HA_{(bibi)}.$$
   b. Sans passer par le système décimal, déterminer le résultat de la somme en bibinaire
   $$KEDI_{(bibi)} + BEBE_{(bibi)}.$$

III. Nombres bibinaires particuliers

On s'intéresse aux nombres dont un motif bibinaire se répète comme :
$$HAHA \dots HA_{(bibi)} \text{ ou } HOHAHOHA \dots HOHA_{(bibi)}.$$

Partie A : Étude du motif $HAHA \dots HA_{(bibi)}$

1. Que valent, en décimal, les nombres n_1, n_2 et n_3 définis par :
   $$n_1 = HA_{(bibi)},\ n_2 = HAHA_{(bibi)} \text{ et } n_3 = HAHAHA_{(bibi)}.$$
2. Observer une relation entre n_1 et n_2 puis n_2 et n_3.
3. Dans la suite, p désigne un entier naturel non nul.
   On note n_p le nombre écrit en bibinaire dont le motif HA se répète p fois comme ci-dessous :
   $$\underbrace{HA \dots HA}_{p \text{ fois}}$$
   a. Pour tout entier naturel p non nul, démontrer que :
   $$n_{p+1} = 16\, n_p + 1.$$
   b. Pour tout entier naturel p non nul, on pose $v_p = n_p - \alpha$ où α est un nombre réel.
   On admet que si $\propto$ est tel que $v_{p+1} = 16 v_p$ alors pour tout entier p non nul,
   $$n_p = v_1 \times 16^{p-1} + \alpha.$$
   Démontrer que $v_{p+1} = 16 v_p$ si et seulement si $1 + 15\alpha = 0$.
   c. En déduire que pour tout entier p non nul,
   $$n_p = \frac{1}{15}(16^p - 1).$$

Partie B : Étude du motif $HOHAHOHA\ldots HOHA_{(bibi)}$

1. On considère le nombre bibinaire $HOHAHOHAHOHA_{(bibi)}$.

   a. Démontrer que pour tout réel x, $(1+x^2+x^4)=(1+x+x^2)(1-x+x^2)$.

   b. En déduire que $HOHAHOHAHOHA_{(bibi)}$ est divisible par $HAHAHA_{(bibi)}$.

2. $\underbrace{HOHA\ldots HOHA}_{p \text{ fois}}$ est-il divisible par $\underbrace{HA\ldots\ HA}_{p \text{ fois}}$ pour tout entier naturel p non nul ?

Exercice académique 3 (à traiter par groupe de 2 ou 3 par les candidats n'ayant pas suivi la spécialité de mathématiques de la voie générale)

A Lapointe du bibinaire

Depuis votre plus tendre enfance, vous savez que le nombre 2020 représente 2 milliers et 2 dizaines c'est-à-dire que :

$$2020 = 2 \times 10^3 + 0 \times 10^2 + 2 \times 10^1 + 0 \times 10^0$$

Cette décomposition de 2020 à l'aide de puissances de 10 explique que le nombre 2020 s'écrive avec la suite de chiffres 2, 0, 2 et 0. Cette décomposition est appelée décomposition en base 10.
Ce système d'écriture est appelé le **système décimal** et les caractères utiles pour écrire ces nombres sont les chiffres de 0 à 9.

Par ailleurs, on peut aussi écrire :

$$2020 = 1 \times 2^{10} + 1 \times 2^9 + 1 \times 2^8 + 1 \times 2^7 + 1 \times 2^6 + 1 \times 2^5 + 0 \times 2^4 + 0 \times 2^3 + 1 \times 2^2 + 0 \times 2^1 + 0 \times 2^0.$$

$\mathbf{1} \times 2^{10}$	$\mathbf{1} \times 2^9$	$\mathbf{1} \times 2^8$	$\mathbf{1} \times 2^7$	$\mathbf{1} \times 2^6$	$\mathbf{1} \times 2^5$	$\mathbf{0} \times 2^4$	$\mathbf{0} \times 2^3$	$\mathbf{1} \times 2^2$	$\mathbf{0} \times 2^1$	$\mathbf{0} \times 2^0$
1	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**0**	**0**	**1**	**0**	**0**

On vient de décomposer 2020 à l'aide de puissances de 2, on parle de décomposition en base 2.
Le tableau ci-dessus, indique que le nombre 2020 s'écrit en base 2 : $11111100100_{(binaire)}$.
Ce système d'écriture est appelé le **système binaire** et les caractères utiles pour écrire ces nombres sont les chiffres 0 et 1.

I. Écriture binaire des entiers naturels inférieurs ou égaux à 15

Justifier l'ensemble des écritures binaires données dans le tableau ci-dessous :

Système décimal	0	1	2	3	4	5	6	7
Système binaire	0000	0001	0010	0011	0100	0101	0110	0111

Système décimal	8	9	10	11	12	13	14	15
Système binaire	1000	1001	1010	1011	1100	1101	1110	1111

II. En route vers le bibinaire

On peut aussi écrire 2020 de la façon suivante :

$$2020 = 7 \times 16^2 + 14 \times 16^1 + 4 \times 16^0.$$

Cette décomposition est appelée décomposition en puissances de 16 et dans ce cas, les coefficients des puissances de 16 successives sont des nombres compris entre 0 et 15.

Boby Lapointe, chanteur humoriste des années 60, inventa un nouveau système : le bibinaire.
Ce système permet de réécrire les nombres binaires à l'aide du tableau ci-dessous :

	Pour les 2 caractères de gauche				Pour les deux caractères de droite			
Binaire	00	01	10	11	00	01	10	11
Bibinaire	H	B	K	D	O	A	E	I

Exemples :

- Le nombre 7 s'écrit en bibinaire BI car 7 s'écrit en binaire $\underbrace{01}_{B}\,\underbrace{11}_{I}$.
- Le nombre 2020 qui s'écrit $7 \times 16^2 + 14 \times 16^1 + 4 \times 16^0$ peut s'écrire :
  $$BI \times 16^2 + DE \times 16^1 + BO \times 16^0 \text{ qui sera noté } BIDEBO_{(bibi)}.$$
- Le nombre $BIDE_{(bibi)}$ exprimé en bibinaire vaut en base 10 :
  $$BI \times 16^1 + DE \times 16^0 = 7 \times 16^1 + 14 \times 16^0 = 126.$$

1. Donner la date du jour (11/03/2020) en bibinaire.
2. a. Que valent en base 10, les mots $KADO_{(bibi)}$ et $DEBIBI_{(bibi)}$?
   b. En déduire la valeur en base 10 de $KADODEBIBI_{(bibi)}$.

3. **Bibinaire en somme**

   a. Calculer en bibinaire les sommes :
   $$KE_{(bibi)} + BE_{(bibi)}, DI_{(bibi)} + BE_{(bibi)} \text{ et } HAHO_{(bibi)} + HA_{(bibi)}.$$
   b. Sans passer par le système décimal, déterminer le résultat de la somme en bibinaire :
   $$KEDI_{(bibi)} + BEBE_{(bibi)}.$$

4. **Produit bibinaire**

   a. Démontrer que la décomposition en puissances de 16 du produit bibinaire est :
   $$DO_{(bibi)} \times BE_{(bibi)} = 4 \times 16 + 8.$$
   b. En déduire, la valeur en bibinaire du produit $DODO_{(bibi)} \times BEBE_{(bibi)}$.

III. Nombres bibinaires particuliers

1. On considère le nombre bibinaire $HOHAHOHAHOHA_{(bibi)}$.
   a. Démontrer que $HOHAHOHAHOHA_{(bibi)}$ est divisible par $HAHAHA_{(bibi)}$.
   b. Écrire le nombre $HOHAHOHAHOHA_{(bibi)}$ comme le produit bibinaire de $HAHAHA_{(bibi)}$ par un autre nombre exprimé en bibinaire.

2. Déterminer le quotient et le reste de la division euclidienne de $BOBOBOBO_{(bibi)}$ par $HAKA_{(bibi)}$.

OLYMPIADES MATHÉMATIQUES
LYCÉE, PREMIÈRE

CORRECTION !

Épreuve ▪ 2020

Des éléments de corrigé du sujet des Olympiades 2020
Sujets académiques

Exercice académique 1

PARTIE A **: « Jouons avec la graine ».**

1. *Indice 1 : 1* *Indice 2 : 11* *Indice 3 : 21* *Indice 4 : 1211*
   Indice 5 : 111221 *Indice 6 : 312211* *Indice 7 : 13112221*
   Indice 8 : 1113213211 *Indice 9 : 31131211131221* *Indice 10 : 13211311123113112211*
2. *Indice 1 : 0* *Indice 2 : 10* *Indice 3 : 1110*
   Indice 4 : 3110 *Indice 5 : 132110* *Indice 6 : 1113122110*
3. *Indice 1 : 42* *Indice 2 : 1412* *Indice 3 : 11141112* *Indice 4 : 31143112*
   Indice 5 : 132114132112 *Indice 6 : 1113122114111312212*
4. *Oui, la graine 22 donne une suite constante, tous les termes seront égaux à 22.*

PARTIE B: Quelques démonstrations avec la graine 1.

1. *Le chiffre 4 semble ne pas pouvoir être obtenu dans la suite de Conway de graine 1.*
2.
   a. *Il est nécessaire d'avoir soit 1111 soit 2222 soit 3333.*
   b. Expliquez clairement en n'oubliant pas que 1111 peut apparaitre sous la forme (a1)(11)(1b). *Prenons par exemple le cas où l'on a obtenu 211112 à l'étape n. Etudions toutes les façons possibles d'obtenir cette séquence. Pour cela il faut étudier les paires possibles et leurs antécédents*

	(21)(11)(13)	*..2)(11)(11)(3..*
Antécédents	*(11)(1)(3)*	*..2)(1)(1)(…*
	Impossible *111 s'écrira 31 à l'étape suivante*	*Impossible* *11 s'écrira 21 à l'étape suivante*

Les autres séquences 311113 et 311112 mènent à des raisonnements similaires.

   c. *Prenons par exemple le cas où l'on a obtenu 12221 à l'étape n. Etudions toutes les façons possibles d'obtenir cette séquence. Pour cela il faut étudier les paires possibles et leurs antécédents*

	(12)(22)(21)	*..1)(22)(22)(1..*
Antécédents	*(2)(22)(11)*	*..1)(22)(22)(…*
	Impossible *222 s'écrira 32 à l'étape suivante*	*Impossible* *2222 s'écrira 42 à l'étape suivante* *(Et cela contredit aussi que n est le premier rang d'apparition d'un 4)*

Les autre séquences 12223, 322221 et 322223 mènent à des raisonnements similaires.

   d. *Prenons par exemple le cas où l'on a obtenu 133331 à l'étape n*
   Etudions toutes les façons possibles d'obtenir cette séquence.
   Pour cela il faut étudier les paires possibles et leurs antécédents

	(13)(33)(31)	..1)(33)(33)(1..
Antécédents	(3)(333)(111)	..1)(333)(333)(…
	Impossible 3333 s'écrira 43 à l'étape suivante	Impossible 333333 s'écrira 63 à l'étape suivante

Les autre séquences 133332, 233331 et 233332 mènent à des raisonnements similaires.

e. *Il n'est donc pas possible d'obtenir un chiffre 4 avec la suite de Conway de graine 1.*

3.

a. $T_{10}=1, D_{10}=5, S_{10}=7, C_{10}=20$ et $C_9=14$

b. Chaque singleton compte pour 1 chiffre, chaque doublet compte pour 2 chiffres et chaque triplet compte pour 3 chiffre, d'où la formule : $C_n=3T_n+2D_n+S_n$

c. *Les triplets donneront une paire de chiffres, aaa donnera 3a*

d. *Les doublets donneront une paire de chiffres, aa donnera 2a. Les singletons donneront une paire de chiffres, a donnera 1a*

e. *A l'étape* n *il n'y a que des triplets, doublets et singletons car il ne peut pas y avoir de chiffre 4 (ou supérieur). Or chacun d'eux va générer des paires de chiffres. Ainsi :* $C_{n+1}=2T_n+2D_n+2S_n$

f. *D'après la formule précédente, le nombre de termes à l'étape n+1 est pair car multiple de 2.*

4. *Prenons par exemple le cas où l'on a obtenu a333b à l'étape n et c'est le premier rang d'apparition d'une telle séquence.*
Etudions toutes les façons possibles d'obtenir cette séquence.
Pour cela il faut étudier les paires possibles et leurs antécédents

	(a3)(33)(3b)	..a)(33)(3b)(..
Antécédents	(..3)(333)(bbb)	..a)(333)(bbb)(…
$c\geq 4$	Impossible …3333 s'écrira c3 avec à l'étape suivante	Impossible Voir ci-dessous

Montrons que de telles séquences sont impossibles à obtenir.
Prenons le cas de 333111

	(a3)(33)(11)(1b)	..a)(33)(31)(11)(b..
Antécédents	(..3)(333)(1)(b)	..a)(333)(111)(1)(…
$c\geq 4 c\geq 4$	Impossible …3333 s'écrira c3 avec à l'étape suivante	Impossible 3331111 s'écrira 33c1 avec

L'autre cas : 333222 se traite de la même manière.

Exercice 2 : spécialité

I Ecriture binaire

$4=0\times2^3+1\times2^2+0\times2^1+0\times2^0$ donne 0100 $8=1\times2^3+0\times2^2+0\times2^1+0\times2^0$ donne 1000

$9=1\times2^3+0\times2^2+0\times2^1+1\times2^0$ donne 1001 $15=1\times2^3+1\times2^2+1\times2^1+1\times2^0$ donne 1111

II En route vers le bibinaire

1. 11 s'écrit 1011 donc $\mathrm{KI}_{(bibi)}$ 03 s'écrit 0011 donc $\mathrm{HI}_{(bibi)}$

2020 s'écrit $\mathrm{BIDEBO}_{(bibi)}$ 11/03/2020 s'écrit $\mathrm{KI}_{(bibi)}$ / $\mathrm{HI}_{(bibi)}$ / $\mathrm{BIDEBO}_{(bibi)}$

HO	HA	HE	HI	BO	BA	BE	BI	KO	KA	KE	KI	DO	DA	DE	DI
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15

2. a) $\mathrm{KADO}_{(bibi)}$: $\mathrm{KADO}_{(bibi)}=\mathrm{KA}_{(bibi)}\times16^1+\mathrm{DO}_{(bibi)}\times16^0$ s'écrit $9\times16^1+12\times16^0=156$

$\mathrm{DEBIBI}_{(bibi)}$: $\mathrm{DEBIBI}_{(bibi)}=\mathrm{DE}_{(bibi)}\times16^2+\mathrm{BI}_{(bibi)}\times16^1+\mathrm{BI}_{(bibi)}\times16^0=14\times16^2+7\times16^1+7\times16^0=3703$

b. $\mathrm{KADODEBIBI}_{(bibi)}$

$\mathrm{KA}_{(bibi)}\times16^4+\mathrm{DO}_{(bibi)}\times16^3+\mathrm{DE}_{(bibi)}\times16^2+\mathrm{BI}_{(bibi)}\times16^1+\mathrm{BI}_{(bibi)}\times16^0$ soit

$156\times16^2+3703$ ou $9\times16^4+12\times16^3+14\times16^2+7\times16^1+7\times16^0=642679$

3. a. $\mathrm{KE}_{(bibi)}+\mathrm{BE}_{(bibi)}$

$\mathrm{KE}_{(bibi)}+\mathrm{BE}_{(bibi)}=10+6=16=1\times16^1$ donc $\mathrm{KE}_{(bibi)}+\mathrm{DE}_{(bibi)}=\mathrm{HAHO}_{(bibi)}$

$\mathrm{DI}_{(bibi)}+\mathrm{BE}_{(bibi)}$

$\mathrm{DI}_{(bibi)}+\mathrm{BE}_{(bibi)}=15+6=16+5=1\times16^1+5\times16^0=\mathrm{HABA}_{(bibi)}$ donc

$\mathrm{HAHO}_{(bibi)}+\mathrm{HA}_{(bibi)}=1\times16^1+0\times16^0+1=1\times16^1+1\times16^0=\mathrm{HAHA}_{(bibi)}$

donc $\mathrm{HAHO}_{(bibi)}+\mathrm{HA}_{(bibi)}=\mathrm{HAHA}_{(bibi)}$

b. $\mathrm{KEDI}_{(bibi)}+\mathrm{BEBE}_{(bibi)}=\mathrm{KE}_{(bibi)}\times16^1+\mathrm{DI}_{(bibi)}\times16^0+\mathrm{BE}_{(bibi)}\times16^1+\mathrm{BE}_{(bibi)}\times16^0$

$=\left(\mathrm{KE}_{(bibi)}+\mathrm{BE}_{(bibi)}\right)\times16^1+\left(\mathrm{DI}_{(bibi)}+\mathrm{BE}_{(bibi)}\right)\times16^0$

$=\mathrm{HAHO}_{(bibi)}\times16^1+\mathrm{HABA}_{(bibi)}\times16^0$

$=\mathrm{HA}_{(bibi)}\times16^2+\left(\mathrm{HO}_{(bibi)}+\mathrm{HA}_{(bibi)}\right)\times16^1+\mathrm{BA}_{(bibi)}\times16^0$

donc $\mathrm{KEDI}_{(bibi)}+\mathrm{BEBE}_{(bibi)}=\mathrm{HAHABA}_{(bibi)}$

III. Nombres bibinaires particuliers

Partie A

1. $n_1=\mathrm{HA}_{(bibi)}=16^0=1$ $n_2=\mathrm{HAHA}_{(bibi)}=16^1+16^0=17$ $n_3=\mathrm{HAHAHA}_{(bibi)}=16^2+16^1+16^0=273$

2. $n_2=16+1=16\times n_1+1$ $n_3=16^2+16+1=16\times(16+1)+1=16\times n_2+1$

3. a) $n_{p+1}=\mathrm{HA}_{(bibi)}\times16^{p+1}+\mathrm{HA}_{(bibi)}\times16^p+\ldots\ldots\mathrm{HA}_{(bibi)}\times16^1+\mathrm{HA}_{(bibi)}\times16^0$

$n_{p+1}=16\times\left(\mathrm{HA}_{(bibi)}\times16^p+\mathrm{HA}_{(bibi)}\times16^{p-1}+\ldots\mathrm{HA}_{(bibi)}\times16^0\right)+\mathrm{HA}_{(bibi)}\times16^0=16\times n_p+1$

b) $v_{p+1}=16v_p$ ssi $n_{p+1}-\alpha=16\times(n_p-\alpha)$ ssi $16n_p+1-\alpha=16n_p-16\alpha$

donc ssi $1+15\alpha=0$ donc $\alpha=\dfrac{-1}{15}$

c) $n_p=v_1\times16^{p-1}+\alpha=(n_1+\frac{1}{15})\times16^{p-1}-\frac{1}{15}=(1+\frac{1}{15})\times16^{p-1}-\frac{1}{15}=\frac{16}{15}\times16^{p-1}-\frac{1}{15}=\frac{1}{15}(16^p-1)$

Partie B

1. a) $(1+x+x^2)(1-x+x^2)=1-x+x^2+x-x^2+x^3+x^2-x^3+x^4=1+x^2+x^4$

b) $\mathrm{HAHAHA}_{(bibi)}=16^2+16^1+1$

$\mathrm{HOHAHOHAHOHA}_{(bibi)}=16^4+16^2+1$

en utilisant l'égalité démontrée en a) avec x=16 , on a

$1+16^2+16^4=(1+16+16^2)(1-16+16^2)$

donc $\mathrm{HOHAHOHAHOHA}_{(bibi)}$ est divisible par $\mathrm{HAHAHA}_{(bibi)}$

2. non pas pour p=2 : $\mathrm{HOHAHOHA}_{(bibi)}=33$ *et* $\mathrm{HAHA}_{(bibi)}=17$ *et 33 n'est pas divisible par 17*

Exercice 3 : non spécialité

I Ecriture binaire

$0=0\times2^3+0\times2^2+0\times2^1+0\times2^0$ donne 0000 $1=0\times2^3+0\times2^2+0\times2^1+1\times2^0$ donne 0001

$2=0\times2^3+0\times2^2+1\times2^1+0\times2^0$ donne 0010 $3=0\times2^3+0\times2^2+1\times2^1+1\times2^0$ donne 0011

$4=0\times2^3+1\times2^2+0\times2^1+0\times2^0$ donne 0100 $5=0\times2^3+1\times2^2+0\times2^1+1\times2^0$ donne 0101

$6=0\times2^3+1\times2^2+1\times2^1+0\times2^0$ donne 0110 $7=0\times2^3+1\times2^2+1\times2^1+1\times2^0$ donne 0111

$8=1\times2^3+0\times2^2+0\times2^1+0\times2^0$ donne 1000 $9=1\times2^3+0\times2^2+0\times2^1+1\times2^0$ donne 1001

$10=1\times2^3+0\times2^2+1\times2^1+0\times2^0$ donne 1010 $11=1\times2^3+0\times2^2+1\times2^1+1\times2^0$ donne 1011

$12=1\times2^3+1\times2^2+0\times2^1+0\times2^0$ donne 1100 $13=1\times2^3+1\times2^2+0\times2^1+1\times2^0$ donne 1101

$14=1\times2^3+1\times2^2+1\times2^1+0\times2^0$ donne 1110 $15=1\times2^3+1\times2^2+1\times2^1+1\times2^0$ donne 1111

II En route vers le bibinaire

1. 11 s'écrit 1011 donc $\mathrm{KI}_{(bibi)}$ 03 s'écrit 0011 donc $\mathrm{HI}_{(bibi)}$

2020 s'écrit $\mathrm{BIDEBO}_{(bibi)}$ 11/03/2020 s'écrit $\mathrm{KI}_{(bibi)}$ / $\mathrm{HI}_{(bibi)}$ / $\mathrm{BIDEBO}_{(bibi)}$

HO	HA	HE	HI	BO	BA	BE	BI	KO	KA	KE	KI	DO	DA	DE	DI
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15

2. a) $\mathrm{KADO}_{(bibi)}$: $\mathrm{KADO}_{(bibi)}$ = $\mathrm{KA}_{(bibi)}\times16^1+\mathrm{DO}_{(bibi)}\times16^0$ s'écrit $9\times16^1+12\times16^0=156$

$\mathrm{DEBIBI}_{(bibi)}$: $\mathrm{DEBIBI}_{(bibi)}$ = $\mathrm{DE}_{(bibi)}\times16^2+\mathrm{BI}_{(bibi)}\times16^1+\mathrm{BI}_{(bibi)}\times16^0$

= $14\times16^2+7\times16^1+7\times16^0=3703$

b. $\mathrm{KADODEBIBI}_{(bibi)}$

$\mathrm{KA}_{(bibi)}\times16^4+\mathrm{DO}_{(bibi)}\times16^3+\mathrm{DE}_{(bibi)}\times16^2+\mathrm{BI}_{(bibi)}\times16^1+\mathrm{BI}_{(bibi)}\times16^0$ soit

$156\times16^2+3703$ ou $9\times16^4+12\times16^3+14\times16^2+7\times16^1+7\times16^0=642\ 679$

3. a. $\mathrm{KE}_{(bibi)}+\mathrm{BE}_{(bibi)}$

$\mathrm{KE}_{(bibi)}+\mathrm{BE}_{(bibi)}$ = $10+6=16=1\times16^1$ donc $\mathrm{KE}_{(bibi)}+\mathrm{DE}_{(bibi)}=\mathrm{HAHO}_{(bibi)}$

$\mathrm{DI}_{(bibi)}+\mathrm{BE}_{(bibi)}$

$\mathrm{DI}_{(bibi)}+\mathrm{BE}_{(bibi)}=15+6=16+5=1\times16^1+5\times16^0=\mathrm{HABA}_{(bibi)}$ donc

$\mathrm{HAHO}_{(bibi)}+\mathrm{HA}_{(bibi)}=1\times16^1+0\times16^0+1=1\times16^1+1\times16^0=\mathrm{HAHA}_{(bibi)}$

donc $\mathrm{HAHO}_{(bibi)}+\mathrm{HA}_{(bibi)}=\mathrm{HAHA}_{(bibi)}$

b. $\mathrm{KEDI}_{(bibi)}+\mathrm{BEBE}_{(bibi)}=\mathrm{KE}_{(bibi)}\times16^1+\mathrm{DI}_{(bibi)}\times16^0+\mathrm{BE}_{(bibi)}\times16^1+\mathrm{BE}_{(bibi)}\times16^0$

$= (\mathrm{KE}_{(bibi)}+\mathrm{BE}_{(bibi)})\times16^1+(\mathrm{DI}_{(bibi)}+\mathrm{BE}_{(bibi)})\times16^0$

$= \mathrm{HAHO}_{(bibi)}\times16^1+\mathrm{HABA}_{(bibi)}\times16^0$

$= \mathrm{HA}_{(bibi)}\times16^2+(\mathrm{HO}_{(bibi)}+\mathrm{HA}_{(bibi)})\times16^1+\mathrm{BA}_{(bibi)}\times16^0$

donc $\mathrm{KEDI}_{(bibi)}+\mathrm{BEBE}_{(bibi)}=\mathrm{HAHABA}_{(bibi)}$

4.

a. $\mathrm{DO}_{(bibi)}\times\mathrm{BE}_{(bibi)}=12\times6=72=4\times16+8$ donc $\mathrm{DO}_{(bibi)}\times\mathrm{BE}_{(bibi)}=\mathrm{BOKO}_{(bibi)}$

b. $\mathrm{DODO}_{(bibi)}\times\mathrm{BEBE}_{(bibi)}=(\mathrm{DO}_{(bibi)}\times16^1+\mathrm{DO}_{(bibi)}\times16^0)\times(\mathrm{BE}_{(bibi)}\times16^1+\mathrm{BE}_{(bibi)}\times16^0)$

donc $\mathrm{DO}_{(bibi)}\times\mathrm{BE}_{(bibi)}\times16^2+(\mathrm{DO}_{(bibi)}\times\mathrm{BE}_{(bibi)}+\mathrm{DO}_{(bibi)}\times\mathrm{BE}_{(bibi)})\times16^1+\mathrm{DO}_{(bibi)}\times\mathrm{BE}_{(bibi)}\times16^0$

ce qui est égal à $(4\times16+8)\times16^2+(2\times(4\times16^1+8))\times16^1+(4\times16^1+8)\times16^0$

$4\times16^3+8\times16^2+8\times16^2+16\times16^1+4\times16^1+8\times16^0=4\times16^3+16\times16^2+16^2+4\times16^1+8\times16^0$

donc égal à $5\times16^3+1\times16^2+4\times16^1+8\times16^0$

donc $\mathrm{DODO}_{(bibi)}\times\mathrm{BEBE}_{(bibi)}=\mathrm{BAHABOKO}_{(bibi)}$

III. Nombres bibinaires particuliers

a. $HOHAHOHAHOHA_{(bibi)} = \mathrm{HA}_{(bibi)}\times16^4+\mathrm{HA}_{(bibi)}\times16^2+\mathrm{HA}_{(bibi)}\times16^0=65793$

$HAHAHA_{(bibi)} = 16^2+16^1+16^0=273$

$65793:273=241$

b. $241=15\times16+1=\mathrm{DIHA}_{(bibi)}$

donc $\mathrm{HOHAHOHAHOHA}_{(bibi)}=\mathrm{HAHAHA}_{(bibi)}\times\mathrm{DIHA}_{(bibi)}$

2. $\mathrm{BOBOBOBO}_{(bibi)}=\mathrm{BO}_{(bibi)}\times16^3+\mathrm{BO}_{(bibi)}\times16^2+\mathrm{BO}_{(bibi)}\times16^1+\mathrm{BO}_{(bibi)}\times16^0$

$= 4\times16^3+4\times16^2+4\times16^1+4\times16^0=17476$

$\mathrm{HAKA}_{(bibi)}=\mathrm{HA}_{(bibi)}\times16^1+\mathrm{KA}_{(bibi)}\times16^0=16+9=2\ 5$

$17476=699\times25+1$

$1=\mathrm{HA}_{(bibi)}$ pour le reste

$699=2\times16^2+11\times16+11=\mathrm{HEKIKI}_{(bibi)}$ pour le quotient

donc $\mathrm{BOBOBO}_{(bibi)}=\mathrm{HEKIKI}_{(bibi)}\times\mathrm{HAKA}_{(bibi)}+\mathrm{HA}_{(bibi)}$