SUJET + CORRIGÉ

OLYMPIADES DE MATHÉMATIQUES

ACADÉMIE D'ORLÉANS-TOURS

Classes de première S • 2018

Olympiades nationales de mathématiques 2018

Deuxième partie de l'épreuve : exercices académiques 10h10 à 12h10

L'usage des calculatrices est autorisé conformément à la réglementation en vigueur.

Les candidats traitent **deux exercices** par groupes de 2 ou 3 **:**

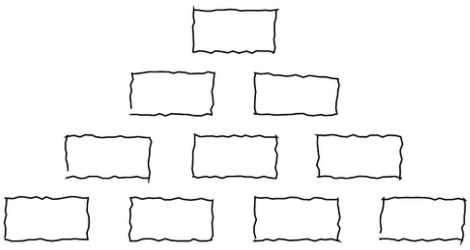
- Les candidats de la série S traitent les exercices numéros 5 (*Le nageur et le chien*) et 6 (*Dessine-moi un nombre)*.
- Les candidats des autres séries traitent les exercices numéros 4 (*Les n-pyramides*) et 6 (*Dessine-moi un nombre)* .

Les copies concernant ces exercices académiques seront ramassées au plus tard à 12 h 10.

Exercice académique numéro 4
(à traiter par les candidats des séries autres que la série S)

Les n-pyramides

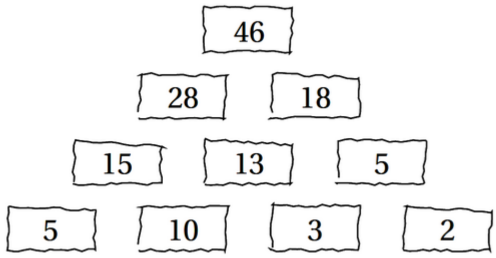
On place des briques comme ci-contre de manière pyramidale.



On appelle n-pyramide une pyramide à n-lignes telle que :
Chaque brique contient un nombre entier non nul

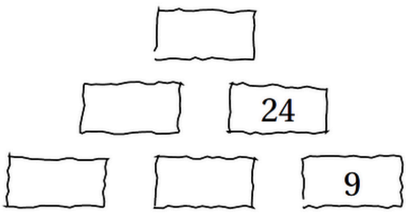
- Tout nombre inscrit sur une brique est égal à la somme des deux nombres des deux briques inférieures adjacentes.

  Voici un exemple de 4-pyramide :

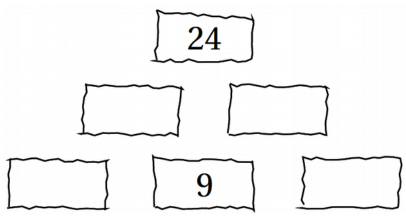


L'objectif de cet exercice est de s'intéresser aux nombres de façons de compléter certaines n-pyramides.
Dans cet exercice, les trois parties sont indépendantes.

1) **<u>Partie 1 : Les 3-pyramides</u>**
On considère les 3-pyramides incomplètes suivantes :



3-pyramide n° 1

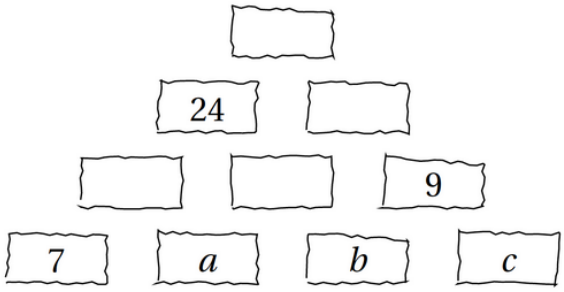


3-pyramide n° 2

a) Recopier sur votre copie un exemple de chacune de ces deux 3-pyramides correctement complétées.
b) Montrer qu'il existe une infinité de façons de compléter la 3-pyramide n°1.
c) Montrer que le nombre de façons de compléter la 3-pyramide n°2 est fini.
d) On considère une 3-pyramide contenant les nombres **24** et **9**.
Déterminer les positions possibles des nombres **24** et **9** permettant d'obtenir une infinité de façons de compléter la 3-pyramide ainsi créée.

2) Partie 2 : Les 4-pyramides

On considère la 4-pyramide suivante incomplète où *a*, *b* et *c* sont des entiers non nuls :



On cherche à déterminer l'ensemble des nombres *a*, *b* et *c* permettant de compléter cette 4-pyramide.

a) Recopier un exemple de cette 4-pyramide correctement complétée. Justifier votre réponse.

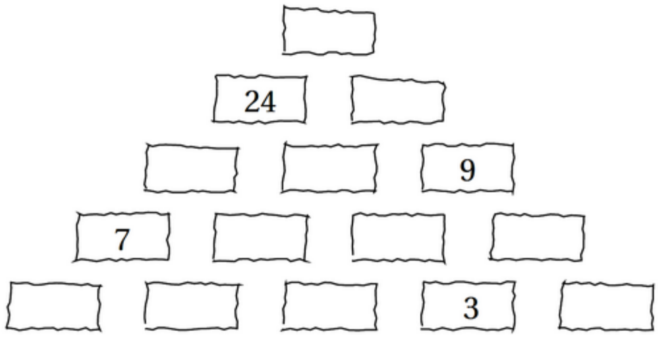
b) Justifier que *a*, *b* et *c* doivent vérifier le système :

$$\begin{cases} b+c=9 \\ 2a+b=17 \end{cases}$$

c) Déterminer alors les triplets (a,b,c) permettant de compléter cette 4-pyramide.

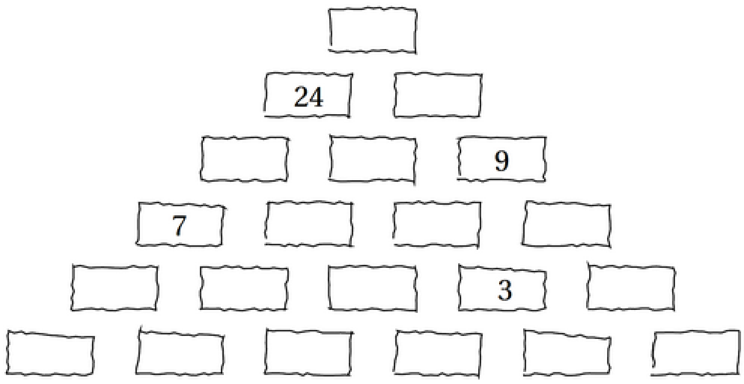
3) Partie 3 : Pour finir, une 5-pyramide et... une 6-pyramide

1) On considère la 5-pyramide incomplète suivante :



Combien existe-t-il de façons de compléter cette 5-pyramide ?

2) On considère la 6-pyramide ci-dessous, obtenue à partir de la 5-pyramide précédente :



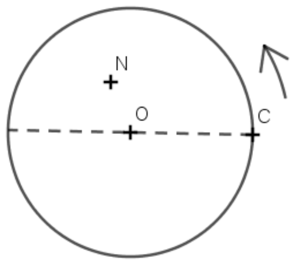
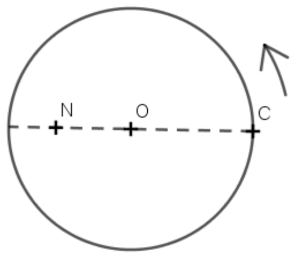
Montrer qu'il n'est pas possible de compléter correctement une telle 6-pyramide.

Exercice académique numéro 5
(à traiter uniquement par les candidats de la série S)

Le nageur et son chien

Un nageur se situe au centre O d'un étang circulaire de rayon R (R exprimé en mètres).
Au bord de l'étang l'attend un chien. Le chien et le nageur se déplacent à vitesse constante.
Le chien court à la vitesse V en m/s et le nageur nage à la vitesse de v en m/s. On suppose v < V.

Les déplacements du chien s'effectuent de la façon suivante :

<table>
<tr>
<td>Si, lorsque le chien regarde le point O le nageur se trouve situé à sa droite, le chien ira vers la droite en suivant le bord de l'étang, sinon, il ira vers la gauche en suivant le bord de l'étang.

</td>
<td>Si le chien, le point O et le nageur sont alignés dans cet ordre, où si le point O et le nageur confondus, le chien ira vers la droite.

</td>
</tr>
<tr>
<td colspan="2">Dans le cas particulier ou le chien, le nageur et point O sont alignés dans cet ordre le chien ne bougera pas.</td>
</tr>
</table>

Le nageur quant à lui, souhaite atteindre le bord de l'étang en un point quelconque avant que le chien n'atteigne ce point.
Le plan est rapporté à un repère $(O;\vec{i};\vec{j})$ tel qu'au début de la poursuite, le chien se trouve au point A=(R;0) et le nageur au point O(0;0). On notera $\mathscr{C}$ le cercle de centre O et de rayon R.

I. Stratégie n° 1
Le nageur se dirige en ligne droite vers la rive pour rejoindre le point A'(-R; 0).

Partie A
On suppose que l'étang a un rayon de 100 m.

1. On se place dans le cas où v=1 m/s et V=3 m/s
   a) Faire une figure en représentant le cercle $\mathscr{C}$, le point A, le point A' et le trajet du nageur.
   b) Le chien rattrapera-t-il le nageur ? Justifier la réponse.
2. On se place dans le cas où v = 1 m/s et V = 4 m/s. Le chien rattrapera-t-il le nageur ?

Partie B
On se place dans un étang de rayon R quelconque

1. Faire une figure.
2. Quel sera, en fonction de v et de R, le temps mis par le nageur pour atteindre la rive ?
3. Comment le chien se déplacera-t-il ? Quel sera, en fonction de V et de R, le temps qu'il mettra pour atteindre A' ?
4. Que pensez vous de cette stratégie en fonction des valeurs du rapport $\frac{V}{v}$?
5. Le nageur a-t-il intérêt à prendre cette stratégie si V = 4v ?

II. Stratégie n° 2

On note :

- $r' = \frac{v}{2V} R$
- F le point de coordonnées F(0;-2r'),
- O' le point de coordonnées O'(0; -r').

Le nageur parcourt tout d'abord le demi-cercle $\mathscr{C}'$ de centre O' et de rayon r' dans le sens contraire des aiguilles d'une montre, en partant de O pour atteindre F. Il rejoint ensuite le point G(0; -R).

Dans cette question, v=1m/s et V=2m/s

1. Faire une figure en indiquant clairement le trajet suivi par le nageur.
   Quelle est la longueur de ce trajet ? Le chien rattrapera-t-il le nageur ?
2. Dans le cas général, exprimer en fonction de R, v, V le temps que mettra le nageur pour atteindre la rive en suivant ce trajet.
3. Soit N un point quelconque situé sur le demi cercle $\mathscr{C}'$.
   On note C le point d'intersection du cercle $\mathscr{C}$ avec la demi-droite [N; O) et l'on considère les angles $\alpha = \widehat{AOC}$ et $\beta = \widehat{OO'N}$
   a) Montrer que $\alpha = \widehat{OFN}$ puis que $\beta = 2\alpha$.
   b) En déduire que, lorsque le nageur se situe au point N, le chien se situe au point C.
   c) Que pensez vous de cette stratégie en fonction du rapport $\frac{V}{v}$.
   d) Le nageur a-t-il intérêt à prendre cette stratégie si V = 4v ?

Exercice académique numéro 6
(à traiter par tous les candidats)

Dessine-moi un nombre

L'algorithme ci-dessous a pour objectif de tracer des figures à l'aide des chiffres formant un nombre écrit sous forme décimale :
Il faut fournir à l'algorithme un nombre décimal x avec $0 \leqslant x < 10$
Le nombre x est écrit sous la forme : $u_0,u_1u_2u_3...u_n$.
Le nombre u_i représente ainsi la i$^{\text{ème}}$ décimale et le nombre u_0 la partie entière du nombre x.
L'algorithme déplacera une «tortue » qui tracera la figure. **Un exemple est proposé en fin d'énoncé.**

```
i ← 0
Tant que u_i existe :
        Tourner la tortue de l'angle indiqué dans le tableau en fonction de la valeur de u_i
        Avancer la tortue d'une unité
        i ← i+1
Fin Tant que
```

Valeur de u_i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Angle	0°	0°	45°	45°	90°	90°	135°	135°	180°	180°
Orientation			gauche	droite	gauche	droite	gauche	droite		

Partie I

1. Tracer la figure obtenue en fournissant le nombre 0,3333722 .
2. Proposer un nombre à fournir en entrée à l'algorithme pour obtenir la figure ci-dessous.

   En existe-t-il d'autres ?
3. Tracer la figure obtenue en fournissant le nombre 3,5454.

Partie II

1. On note s le nombre 3,5454<u>54</u>… où le « 54 souligné » et les pointillés signifient que « 54 » est répété indéfiniment.
   a. Résoudre l'équation : $(x - 3)\times 100 - 54 = x - 3$ puis vérifier que le nombre s est solution de cette équation.
   b. En déduire l'écriture de s sous forme de fraction.
   c. Cette fraction permet d'obtenir la figure de la question I.3 de façon illimitée.
2. Tracer la figure obtenue avec la solution de l'équation : $(x - 5)\times 10^6 - 655\,560 = x - 5$.

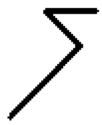
3. On souhaite obtenir la figure ci-dessous qui se continue de façon illimitée (cette figure s'appelle une grecque)

a. Donner l'écriture décimale d'un nombre à fournir à l'algorithme pour obtenir cette figure.
b. En déduire l'écriture fractionnaire de ce nombre.

Exemple

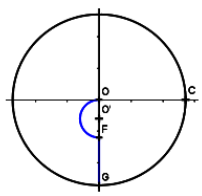
Si on fournit le nombre 3,147

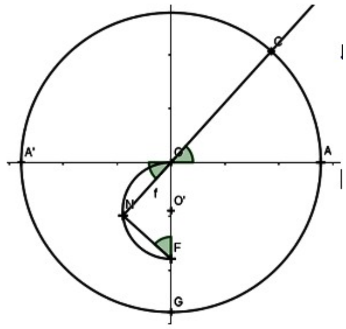
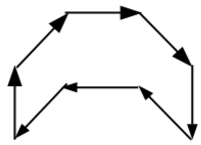
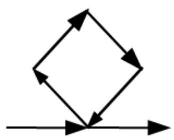
	$u_0 = 3$	$u_1 = 1$	$u_2 = 4$	$u_3 = 7$
	On tourne de 45° vers la droite pour obtenir:	Sans tourner, on avance d'une unité	On tourne de 90° vers la gauche et on avance d'une unité	On tourne de 135° vers la droite et on avance d'une unité
 Position et orientation initiale				

A partir du nombre 3,147, on obtient donc la figure : 

Éléments de correction et barème

Sujet académique Orléans-Tours

	Les n-pyramides (17)	**Bar.**
1 a	Deux exemples corrects	2
1 b	Le nombre de manières de compléter la partie gauche est infini.	1,5
1 c	La nombre de manières de compléter la ligne du milieu est fini (inférieur à 24)	2
1 d	Il suffit que 9 et 24 soient « du même côté » de la pyramide en laissant vide la case du haut.	2
2 a	a) Fonctionne avec a=5, b=7 et c=2	2
2 b	Il suffit de compléter la pyramide pour obtenir les équations : $a+b+33$ 24 a+b+9 $7+a$ $a+b$ 9 7 a b c	2
2 c	5;7;2 6;5;4 8;1;8	1,5
3 1	Une seule manière de compléter : de la gauche vers la droite, la première ligne est : 3 ; 4 ; 2 ; 3 ;1	2
3 2	En s'appuyant sur la réponse précédente, on a juste à compléter la ligne de base. Or on débouche sur un 1 ou 2 dans la quatrième case à partir de la gauche, ce qui rend impossible la complétion	2
	Le nageur et son chien (17 points)	
	Stratégie 1	
A 1 a	figure	1
A 1 b	Le nageur rejoint A' en un temps de 100 s et le chien $\frac{100\,\pi}{3}$ qui est supérieur, donc le chien ne le rattrape pas	1
A 2	Calcul similaire, il le rattrape	1
B 1	figure	1
B 2	Temps nageur : $\frac{R}{v}$	1
B 3	temps chien : $\frac{\pi R}{V}$	1
B 4	Chien rattrape le nageur $\pi < \frac{V}{v}$	1
B 5	Non	1
	Stratégie 2	
1	 trajet du nageur : $25\pi+50$ Temps du nageur $25\pi+50$ et temps du chien 25π	1,5

2	Temps du nageur : $\frac{\pi}{2V}+\frac{R}{v}-\frac{R}{V}$	1,5
3 a	$\widehat{AOC}=\widehat{OFN}$ puis Angle inscrit et angle au centre 	2
3 b	Le chien a parcouru πR en un temps $\frac{\pi R}{V}$. Le nageur a parcouru $r'\beta$ en un temps $r'\frac{\beta}{v}$ soit le même temps	1,5
3 c	Le chien revient alors sur ses pas pour rallier le point G en un temps $\frac{3\pi}{2}\frac{R}{V}$. On compare alors les deux temps. Le chien ira plus vite si … si $\frac{V}{v}<\pi+1$	1,5
3 d	Si $V=4v$ alors le chien gagne	1
	Dessine moi des nombres (16 points)	
I 1 1		2
I 1 2	1,55445544 ou 0,55445544	2
I 1 3		2
II 1 a	$3+\frac{54}{99}=3{,}545454...$ est donc solution	2
II 1 b	$\frac{5301}{99}$	2
II 2	La solution est $5+\frac{65556}{100000}=5{,}\overline{65556}$ 	2
II 3 a	$5{,}445515141445515141=5{,}\overline{445515141}$	2
II 3 b	$5+\frac{445515141}{999999999}$	2