SUJET + CORRIGÉ

OLYMPIADES DE MATHÉMATIQUES

ACADÉMIE D'ORLÉANS-TOURS

Classes de première S • 2014

Olympiades de mathématiques

Session 2014

Académie d'Orléans-Tours

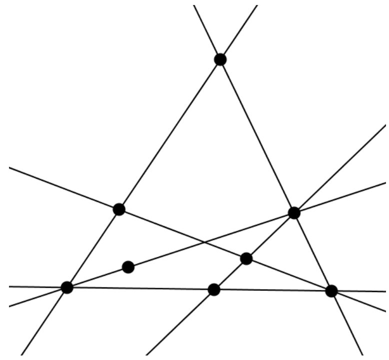
Mars 2014

Les exercices 1 et 2 sont issus de la sélection du jury national.
Les exercices 3 et 4 sont issus de la sélection du jury académique.
Les 4 exercices sont à traiter par le candidat.

Conformément à la réglementation, l'usage d'une calculatrice est autorisée.

Ce sujet comporte 8 pages numérotées de 1 à 8

Exercice National 1 : Figures équilibrées



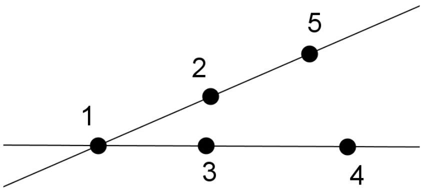
La figure ci-contre est constituée d'un ensemble de droites (ici, 6 droites) et de points marqués (ici, 8 points).
Elle possède la propriété suivante :
Sur chacune de ces droites, il y a exactement trois points marqués.

Une figure vérifiant cette propriété est dite ***équilibrée***.

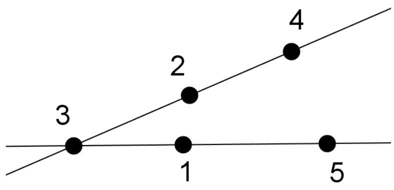
1. Construire une figure équilibrée constituée :
   a) de 7 points marqués et 5 droites ;
   b) de 9 points marqués et 8 droites.

Dans la suite, on considère une figure équilibrée comportant p points marqués qu'on a numérotés par les entiers de 1 à p.
Cette numérotation est alors dite ***magique*** s'il existe un entier K, tel que la somme des trois entiers (correspondant à la numérotation des points marqués) de chaque droite de la figure est égale à K. Cet entier K est appelé ***constante magique*** de la numérotation.

2. Voici par exemple une figure équilibrée (avec 2 droites et 5 points marqués) ayant plusieurs numérotations magiques :



$K = 8$

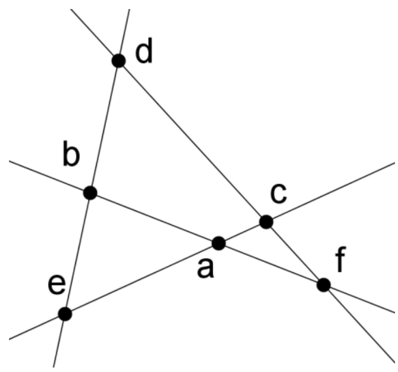


$K = 9$

Trouver une numérotation de cette figure qui ne soit pas magique.
Trouver une numérotation magique de cette figure dont la constante magique n'est ni 8 ni 9.

3. La figure équilibrée ci-contre est constituée de 6 points et 4 droites. Les entiers 1, 2, 3, 4, 5, 6, affectés aux points marqués dans un certain ordre, sont notés a, b, c, d, e, f sur la figure.

   a) Démontrer que si la figure est magique, de constante magique K, alors $4 \times K = 42$.
   b) Peut-on trouver une numérotation magique de cette figure ?
   Si oui, la donner ; si non, expliquer pourquoi.

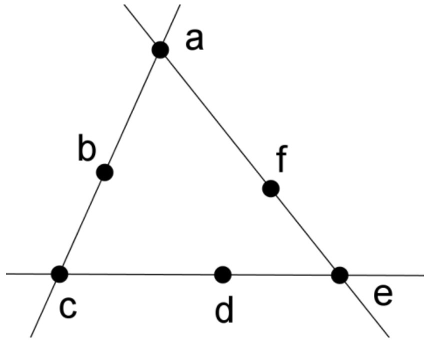


4. La figure équilibrée ci-contre est constituée de 6 points et 3 droites. Les entiers 1, 2, 3, 4, 5, 6, affectés aux points marqués dans un certain ordre, sont notés à nouveau a, b, c, d, e, f sur la figure.

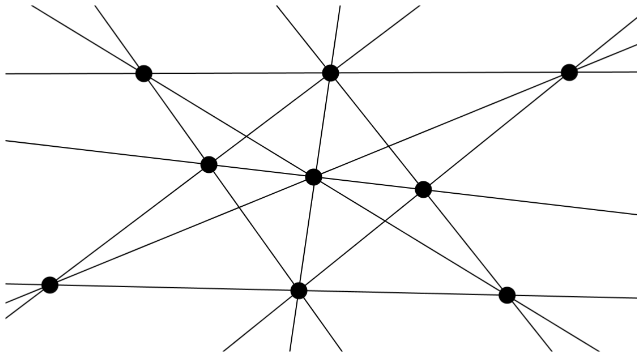
a) Démontrer que $a + c + e$ est compris entre 6 et 15.

b) Démontrer que si la numérotation de cette figure est magique, de constante K, alors $a + c + e = 3(K - 7)$.

c) Déterminer la(les) constante(s) magique(s) pour cette figure.



5. La figure équilibrée ci-contre est constituée de 9 points et 10 droites.
Cette figure admet-elle une numérotation magique ?



Exercice National 2 : Le plus court possible

Quatre villes – Alençon, Bélançon, Célançon et Délançon – sont situées aux quatre sommets d'un carré dont le côté mesure 100 km.
La Direction Départementale de l'Équipement souhaite les relier les unes aux autres par le réseau routier le plus court possible.

Partie A
« On pourrait construire des routes allant d'Alençon à Bélançon, puis Célançon, puis Délançon » dit l'assistant n°1.
« Ou alors, on pourrait construire deux routes diagonales : une d'Alençon à Célançon et l'autre de Délançon à Bélançon » propose l'assistant n°2.
« Et pourquoi pas, construire une route semi-circulaire complétée par deux segments ? » propose l'assistant n°3.

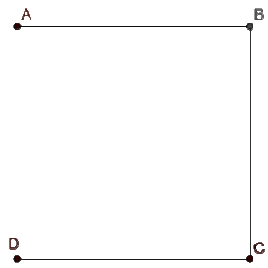


fig. 1
Assistant n°1

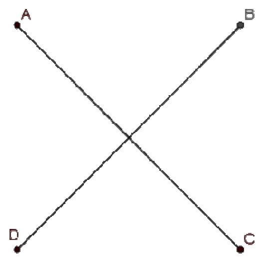


fig. 2
Assistant n°2

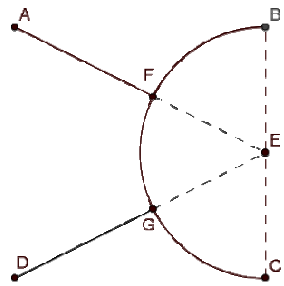


fig. 3
Assistant n°3

1. Quel assistant propose le réseau routier le plus court ?
2. Un mathématicien qui était présent propose une autre solution :
   « On pourrait relier Alençon et Délançon par un triangle isocèle (triangle AED de la fig. 4), puis Bélançon et Célançon par un triangle isocèle de même forme (triangle BFC) et relier les deux sommets E et F comme le suggère la figure ci-contre » :

   Si EF = 20 km, le réseau routier envisagé sur la figure 4 est-il plus court que ceux proposés par les assistants ?

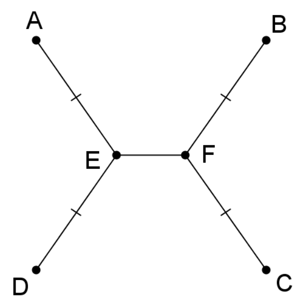


fig. 4

Partie B

Dans cette partie, on souhaite prouver que le réseau routier le plus court est effectivement du modèle proposé par le mathématicien. On cherchera par la suite la longueur EF qui réalise ce plus court chemin.

Rappels de géométrie :

Si A, B, C sont trois points du plan, en notant AB la distance entre A et B :

on a toujours $AB + BC \geq AC$ *;*

on a l'égalité $AB + BC = AC$ *si, et seulement si, B appartient au segment [AC].*

On admettra aussi que si on trace une courbe quelconque entre A et B, la longueur de la courbe est toujours supérieure ou égale à la longueur du segment [AB] (le plus court chemin étant la ligne droite).

1. Revenons à notre réseau routier.

On admettra qu'on peut sans restreindre la généralité supposer que le réseau solution est formé de deux courbes joignant les sommets opposés (A et C d'une part, B et D d'autre part), et que ces courbes sont à l'intérieur du carré de 100km de coté, comme dans le dessin suivant.

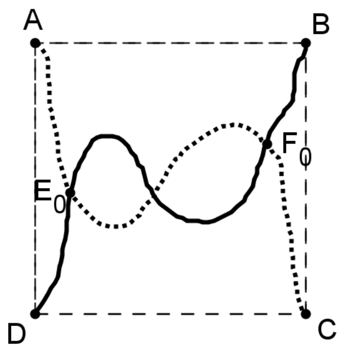


fig. 5

On considère un réseau formé de deux courbes comme sur la figure 5.

En parcourant la route entre Alençon et Célançon en partant d'Alençon, on appelle E_0 le premier point d'intersection rencontré et F_0 le dernier point d'intersection rencontré (ces deux points pouvant être confondus). (*fig. 5*).

Montrer qu'alors la longueur du réseau de la fig. 5 est supérieure ou égale à celle du réseau suivant, constitué de segments (*fig. 6*).

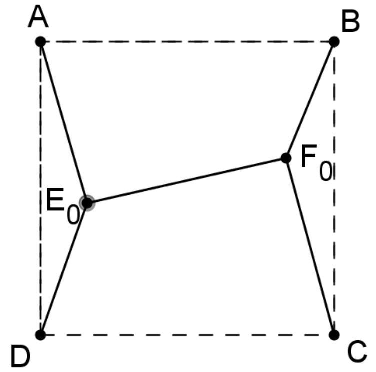


fig. 6

2. On considère les droites Δ_E et Δ_F, parallèles à (AD) passant par E_0 et F_0 (voir figure 7 ci-dessous).

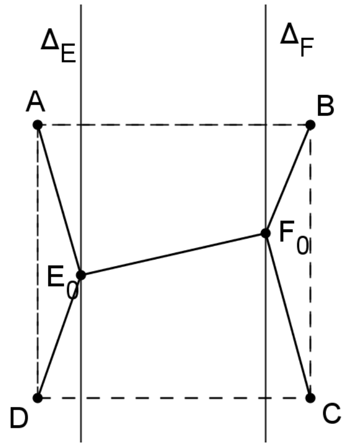


fig. 7

a. Déterminer le point E de Δ_E tel que la somme des distances DE + EA soit minimale.
On appelle F le point trouvé en faisant le même raisonnement pour F_0.

b. Montrer que $EF \leq E_0F_0$.

c. Déduire de ce qui précède que le réseau recherché est nécessairement de la forme suivante où E et F sont sur la médiatrice du segment [AD] (*fig. 8*).

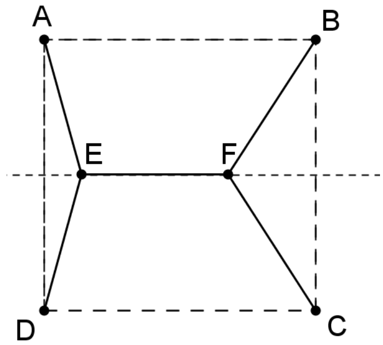


fig. 8

3. On admettra que dans le réseau recherché, les points E et F doivent être de part et d'autre de la médiatrice de [AB].

a. Justifier que le réseau recherché doit être symétrique par rapport à la médiatrice de [AB].

b. D'après ce qui précède, le réseau recherché a donc la même forme que celui que proposait le mathématicien (*fig. 4*).
Pouvez-vous l'aider à déterminer la longueur EF pour laquelle ce type de réseau routier sera le plus court possible ?

Quelle est alors la valeur de l'angle $\widehat{DEA}$?

<u>Exercice académique 3 :</u> ***Des points à l'intérieur d'un triangle***

ABC est un triangle équilatéral dont le côté a pour longueur $8\sqrt{3}$ cm.
On fera une figure que l'on complètera au fur et à mesure.

Le point H est le pied de la hauteur issue du point A.
Pour tout point M intérieur au triangle ABC, on considère les points P, Q et R définis comme suit :

- la droite passant par le point M et perpendiculaire au segment [BC] coupe ce segment en P ;
- la droite passant par le point M et perpendiculaire au segment [CA] coupe ce segment en Q ;
- la droite passant par le point M et perpendiculaire au segment [AB] coupe ce segment en R.

Partie I. Une longueur remarquable

1. Calculer la longueur AH.
2. Démontrer que $\mathrm{MP}+\mathrm{MQ}+\mathrm{MR}=\mathrm{AH}$. Pour cela, on pourra considérer les aires des triangles AMB, BMC et CMA.

Partie II. Un problème d'aire

À tout point M intérieur au triangle ABC, on associe un triplet $(x\,;y\,;z)$ de nombres appelés « coordonnées triangulaires du point M » et définis de la manière suivante :

$$x=\mathrm{MP}\,,\qquad y=\mathrm{MQ}\,,\qquad z=\mathrm{MR}\,,$$

où MP, MQ et MR représentent les mesures, exprimées en cm, des longueurs respectives des segments [MP], [MQ] et [MR].

On s'intéresse aux points M dont les trois « coordonnées triangulaires » sont des nombres entiers et tels que l'aire du quadrilatère ARMQ soit égale au tiers de l'aire du triangle ABC.

1. Démontrer que le point G, centre de gravité du triangle ABC, vérifie les deux conditions précédentes.

2. Dans cette question, M est un point quelconque intérieur au triangle ABC.
   Calculer l'aire du quadrilatère ARMQ en fonction des coordonnées triangulaires x, y et z du point M.
   Démontrer alors que cette aire est donnée par $\frac{\sqrt{3}}{6}\left(y^2+4yz+z^2\right)$.
3. Existe-t-il des points M, intérieurs au triangle ABC, autres que le point G, dont les « coordonnées triangulaires » sont des nombres entiers et tels que l'aire du quadrilatère ARMQ soit égale au tiers de l'aire du triangle ABC ?

<u>Exercice académique 4 :</u> ***Des entiers consécutifs***

Les entiers 3, 4 et 5 sont dits consécutifs car 4=3+1 et 5=4+1, autrement dit, on passe de l'un à l'autre en ajoutant 1.

1°) On remarque que : $3^2 + 4^2 = 5^2$.
Existe-t-il trois autres entiers positifs consécutifs tels que la somme des carrés des deux premiers soit égale au carré du troisième ?

2°)
a) Trouver quatre entiers positifs consécutifs tels que la somme des cubes des trois premiers soit égale au cube du quatrième.
b) Le problème a-t-il d'autres solutions ? Pour répondre à cette question, on pourra s'aider de l'étude de la fonction *f* définie par $f(x) = x^3 + (x+1)^3 + (x+2)^3 - (x+3)^3$.

3°) On se propose de démontrer que l'on ne peut pas trouver cinq entiers positifs consécutifs a, b, c, d et e tels que :
$a^4 + b^4 + c^4 + d^4 = e^4$.
a) On suppose que a est un entier impair. En recourant à des propriétés de parité, montrer que l'on ne peut pas avoir l'égalité $a^4 + (a+1)^4 + (a+2)^4 + (a+3)^4 = (a+4)^4$.
b) On suppose que a est un entier pair. Démontrer que, dans ce cas également, on ne peut pas avoir l'égalité $a^4 + (a+1)^4 + (a+2)^4 + (a+3)^4 = (a+4)^4$. Pour cela, on pourra s'intéresser au chiffre des unités de l'écriture décimale de l'entier a.

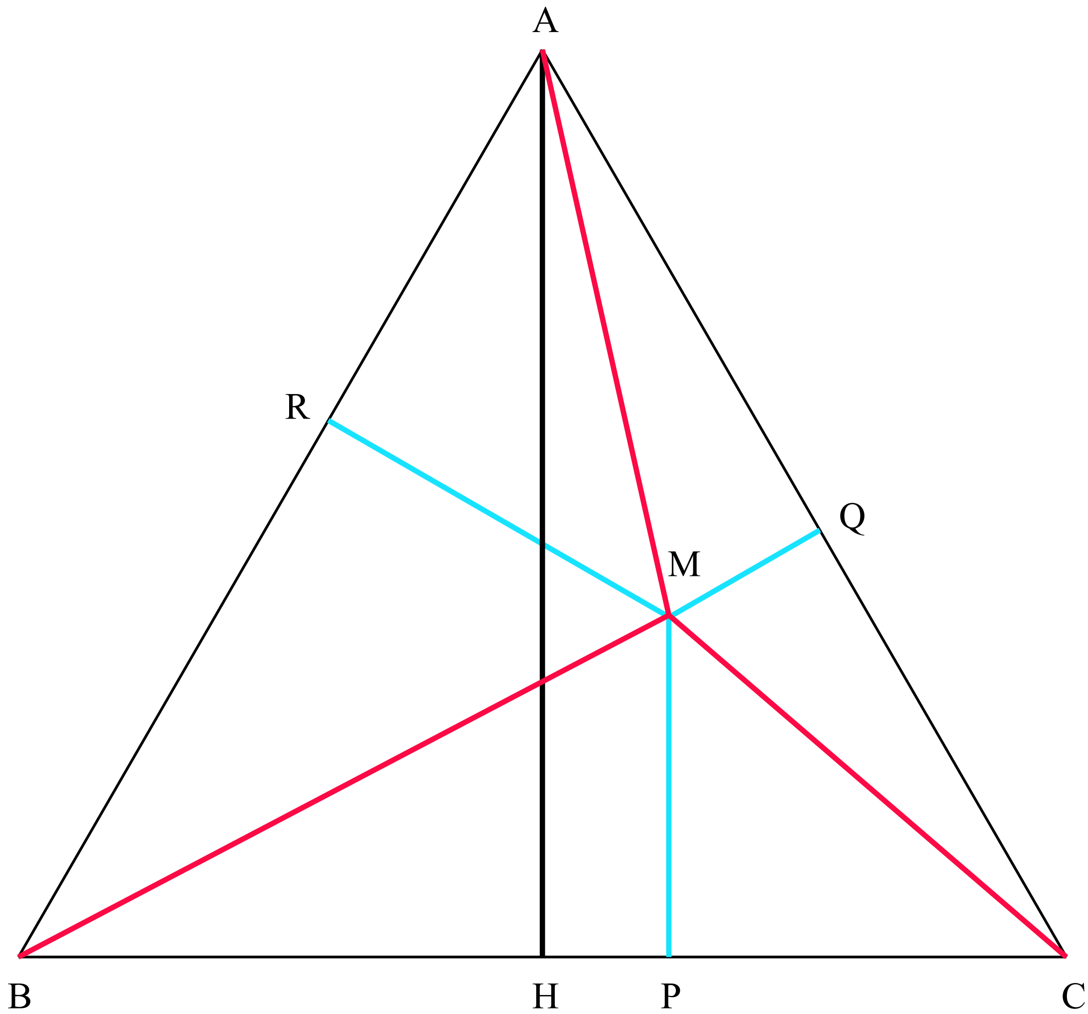
CORRECTION, Orléans-Tours 2014

Premier exercice Académique (exo 3)

Olympiades mathématiques, S

Partie I : Une longueur remarquable

1. $AH = AB\dfrac{\sqrt{3}}{2} = 12$ cm.
2. L'aire de ABC est égale d'une part à $\dfrac{BC \times AH}{2}$ et d'autre part à $\dfrac{BC}{2}(MP+MQ+MR)$ et comme $BC \neq 0$, on a $AH = MP + MQ + MR$.



$\overrightarrow{AB}$

Partie II : Un problème d'aire

1. Le point G, centre de gravité du triangle ABC, est à distance $\dfrac{AH}{3} = 4$ des trois côtés [AB], [BC], [CA] et,si M est en G, par symétrie, les trois quadrilatères ARMQ, BPMR et CQMP ont la même aire égale au tiers de l'aire du triangle.
2. Calcul de l'aire de ARMQ dans le cas où M est quelconque.

   On a $\overrightarrow{AH} = \dfrac{\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}}{2}$ et $AH = 12$ donc $\dfrac{MP}{AH} = \dfrac{x}{12}$ et $\overrightarrow{MP} = \dfrac{x}{12}\overrightarrow{AH}$.

   Soit a, b, c les trois réels positifs tels que $a + b + c = 1$ et que M soit le barycentre des trois points A, B, C, affectés des masses a, b, c : $a\overrightarrow{MA} + b\overrightarrow{MB} + c\overrightarrow{MC} = \overrightarrow{0}$.

Alors $\overrightarrow{MP} = \dfrac{x}{12}\left(\dfrac{\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}}{2}\right) = \dfrac{x}{24}\left(2\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right)$

et
$$\begin{aligned} a\overrightarrow{MP} &= \frac{x}{24}\left[2\left(b\overrightarrow{MB}+c\overrightarrow{MC}\right)+a\left(\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right)\right] \\ &= \frac{x}{24}\left((2b+a)\overrightarrow{MB}+(2c+a)\overrightarrow{MC}\right)\end{aligned}$$

P appartenant à (BC), on a $a = \dfrac{x}{24}\left((2b+a)+(2c+a)\right)$

et, comme $b+c = 1-a$, $a = \dfrac{x}{24}\left(2(1-a)+2a\right) = \dfrac{x}{12}$.

On a donc $a = \dfrac{x}{12}$ et de même, $b = \dfrac{y}{12}$ et $c = \dfrac{z}{12}$.

D'où $\overrightarrow{MP} = \dfrac{1}{24}\left((2y+x)\overrightarrow{MB}+(2z+x)\overrightarrow{MC}\right)$

ou $(2y+x)\overrightarrow{PB}+(2z+x)\overrightarrow{PC} = 0$

et $\dfrac{PB}{BC} = \dfrac{2z+x}{24}$, $\dfrac{PC}{BC} = \dfrac{2y+x}{24}$

Puis $PB = (2z+x)\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ et $PC = (2y+x)\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

De même, $AR = (2y+z)\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ et $AQ = (2z+y)\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

On peut alors calculer de deux façons l'aire du quadrilatère ARMQ.

- Soit comme somme des aires des deux triangles rectangles ARM et AQM.
$$\begin{aligned}\frac{1}{2}(MR.AR+MQ.AQ) &= \tfrac{1}{2}\left[z(2y+z)\tfrac{\sqrt{3}}{3}+y(2z+y)\tfrac{\sqrt{3}}{3}\right] \\ &= \frac{\sqrt{3}}{6}\left(y^2+4yz+z^2\right)\end{aligned}$$
- Soit comme somme des aires des deux triangles ARQ et MRQ :
$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\left[MR.MQ\,\frac{\sqrt{3}}{2}+AR.AQ\,\frac{\sqrt{3}}{2}\right] &= \frac{\sqrt{3}}{4}\left[zy+\frac{1}{3}(2y+z)(2z+y)\right] \\ &= \frac{\sqrt{3}}{6}\left(y^2+4yz+z^2\right)\end{aligned}$$

3. Cette aire est égale au tiers de l'aire du triangle ABC, soit $16\sqrt{3}\,\text{cm}^2$.
Si $y^2+4yz+z^2 = 96$, on retrouve la solution $x = y = z = 4$.
On peut écrire $y^2+4yz+z^2 = \dfrac{3}{2}(y+z)^2 - \dfrac{1}{2}(y-z)^2$
D'où $3(y+z)^2-(y-z)^2 = 2\times 96 = 192$.
$(y-z)^2$ doit donc être divisible par 3 et donc aussi $y-z$
Si $y = z$, on retrouve la solution $x = y = z = 4$.
Si $y-z = 3$, $3(2z+3)^2-9 = 192$ ou $(2z+3)^2 = 67$ sans solution entière car 67 n'est pas un carré.
Si $y-z = 6$, $3(2z+6)^2-36 = 192$ ou $(2z+6)^2 = 76$ sans solution entière.
Si $y-z = 9$, $3(2z+9)^2-81 = 192$ ou $(2z+9)^2 = 91$ sans solution.
La réponse à la question 3 est donc NON.

CORRECTION, Orléans-Tours 2014

Second exercice Académique (exo 4)

Olympiades mathématiques, S

1. Soit$x$, $x+1$, $x+2$ trois entiers consécutifs et positifs.
   On a $x^2+(x+1)^2=(x+2)^2$ si et seulement si $x^2-2x-3=0$
   ou $(x-1)^2=4$ ou $x-1=2$ et $x=3$, $x+1=4$, $x+2=5$.
2. a. $x^3+(x+1)^3+(x+2)^3=(x+3)^3$ équivaut à
   $$2x^3-12x-18=0$$
   ou $x^3-6x-9=0$ qui a pour racine $x=3$.

   b. De $f(x)=x^3-6x-9$ on déduit $f'(x)=3x^2-6$.
   $f'>0$ pour $x^2>2$ donc sur $]-\infty,-\sqrt{2}[\cup]\sqrt{2},+\infty[$
   Et $f'<0$ pour $-\sqrt{2}<x<\sqrt{2}$, on a le tableau

x	$-\infty$		$-\sqrt{2}$		$\sqrt{2}$		4	
$f'(x)$		↗	$4\sqrt{2}-9$	↘	$-4\sqrt{2}-9$	↗	0	↗

   Sur $]-\infty,4[$, $f(x)<0$ et sur $]4,\infty[$, $f(x)\geqslant 0$
   La seule racine de $f(x)=0$ est donc 4.
3. a. Si a est impair, il en est de même de a^4, de $(a+2)^4$ et de $(a+4)^4$ tandis que $(a+1)^4$ et $(a+3)^4$ sont pairs. Alors $a^4+(a+2)^4$ est pair donc aussi $a^4+(a+1)^4+(a+2)^4+(a+3)^4$ tandis que $(a+4)^4$ est impair.
   On ne peut donc avoir l'égalité.

   b. Soit $a=q \pmod{10}$, c'est-à-dire que $a=10k+q$ avec $k\in\mathbb{N}$ et $0\leqslant q\leqslant 9$.

   $$\begin{aligned}\text{Alors } a^4=(10k+q)^4 &= \sum_{n=0}^{4}\binom{4}{n}(10k)^n q^{4-n}\\ &= q^4+\sum_{n=1}^{4}\binom{4}{n}k^n q^{4-n}(10)^{nk}\\ &= q^4 \pmod{10}.\end{aligned}$$

   On forme alors le tableau donnant pour chaque valeur de q comprise entre 0 et 9, la valeur (mod 10) de q^4, $(q+1)^4$, $(q+2)^4$, $(q+3)^4$ puis de $S=q^4+(q+1)^4+(q+2)^4+(q+3)^4$ et enfin $(q+4)^4$.

q	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
q^4	0	1	6	1	6	5	6	1	6	1
$(q+1)^4$	1	6	1	6	5	6	1	6	1	0
$(q+2)^4$	6	1	6	5	6	1	6	1	0	1
$(q+3)^4$	1	6	5	6	1	6	1	0	1	6
S	8	4	8	8	8	8	4	8	8	8
$(q+4)^4$	6	5	6	1	6	1	0	1	6	1

   Il apparaît qu'il n'existe aucune valeur de q pour laquelle $S=(q+4)^4 \pmod{10}$.

   L'assertion est démontrée.