SUJET + CORRIGÉ

OLYMPIADES DE MATHÉMATIQUES

ACADÉMIE D'ORLÉANS-TOURS

Classes de première S • 2013

Olympiades de mathématiques

Session 2013

Académie d'Orléans-Tours

Mercredi 20 mars 2013   8 h - 12 h

Les exercices 1 et 2 sont issus de la sélection du jury national.
Les exercices 3 et 4 sont issus de la sélection du jury académique.
Les quatre exercices sont à traiter par le candidat.

Conformément à la réglementation, l'usage d'une calculatrice est autorisé
Ce sujet comporte 5 pages numérotées de 1 à 5

EXERCICE 1 : LES NOMBRES HARSHAD

Un entier naturel non nul est un **nombre Harshad** s'il est divisible par la somme de ses chiffres.
Par exemple, $n = 24$ est un nombre Harshad car la somme de ses chiffres est $2 + 4 = 6$, et 24 est bien divisible par 6.

1. a. Montrer que 364 est un nombre Harshad.

b. Quel est le plus petit entier qui ne soit pas un nombre Harshad ?

2. a. Donner un nombre Harshad de 4 chiffres.

b. Soit n un entier non nul. Donner un nombre Harshad de n chiffres.

3. a. Montrer que 110, 111, 112 forment une liste de trois nombres Harshad consécutifs.

b. En insérant judicieusement le chiffre 0 dans l'écriture décimale des nombres précédents, construire une autre liste de trois nombres Harshad consécutifs.

c. Justifier l'existence d'une infinité de listes de trois nombres Harshad consécutifs.

4. a. Soit $A = 30 \times 31 \times 32 \times 33$. Calculer la somme des chiffres de A.

b. En déduire que 98 208 030, 98 208 031, 98 208 032 et 98 208 033 forment une liste de quatre nombres Harshad consécutifs.

c. Justifier l'existence d'une infinité de listes de quatre nombres Harshad consécutifs.

5. a. En s'inspirant de la question 4, trouver une liste de cinq nombres Harshad consécutifs.

b. Justifier l'existence d'une infinité de listes de cinq nombres Harshad consécutifs.

6. a. Soit i un chiffre compris entre 0 et 8.

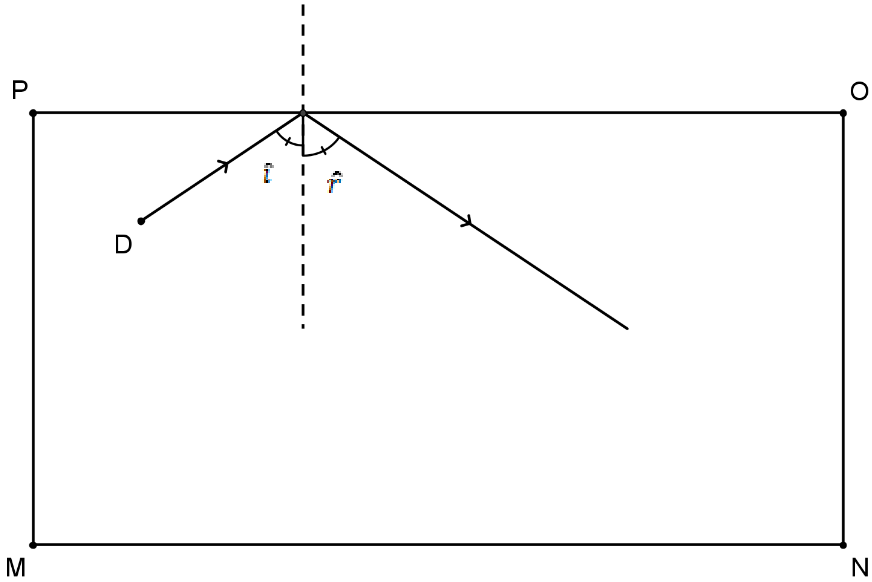
Soit p un entier dont le chiffre des dizaines est i et le chiffre des unités est 9.

Montrer que soit la somme des chiffres du nombre p soit celle de $p + 2$ est un nombre pair. En déduire que p et $p + 2$ ne peuvent pas être tous les deux des nombres Harshad.

b. Existe-t-il une liste de 22 nombres Harshad consécutifs ?

EXERCICE 2 : LE BILLARD RECTANGULAIRE

On considère un billard de forme rectangulaire, de longueur 300 cm et de largeur 160 cm dont les boules sont assimilées à des points.
Entre deux rebonds toutes les trajectoires sont rectilignes.
Lorsque la boule atteint l'un des bords (rails) du billard, elle y rebondit suivant les règles de la physique des chocs élastiques : l'angle d'incidence $\hat{i}$ étant égal à l'angle de réflexion $\hat{r}$, comme sur la figure ci-dessous ($\hat{i} = \hat{r}$)



1. On frappe une boule placée au milieu du rail [MN].

   a. Quel point du rail [PO] peut-on viser pour que la boule atteigne le point N en une bande (c'est-à-dire avec un seul rebond) ?

   b. Quel point du rail [PO] peut-on viser pour que la boule atteigne en une bande le milieu du rail [NO] ?

   c. Quel point du rail [NO] peut-on viser pour que la boule revienne à son point de départ en trois bandes (c'est-à-dire après exactement trois rebonds) ?

2. On frappe une boule placée en un point quelconque du rail [MN].

   a. Est-il possible d'atteindre en une bande n'importe quelle boule placée sur la surface de jeu ?

   b. Est-il toujours possible de la frapper de sorte qu'elle revienne en trois bandes à son point initial ?

EXERCICE 3 : « FOURMIDABLE !! »

A partir d'un cône de génératrice [AS] (figure 1), on fabrique un tronc de cône en coupant celui-ci par un plan parallèle à la base en un point quelconque C, distinct de A et de S, de la génératrice [SA].

On donne OA = 1.

Deux fourmis « F1 » et « F2 » partent du point A.
La fourmi « F1 » parcourt le cercle de base et revient en A.
La fourmi « F2 » parcourt d'abord le segment [AC], puis le cercle supérieur du tronc et revient en A en suivant le segment [CA].

L'objectif du problème est de comparer les distances parcourues par les deux fourmis, selon les valeurs des longueurs AS et AC

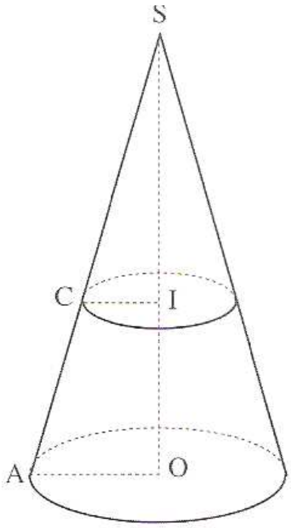
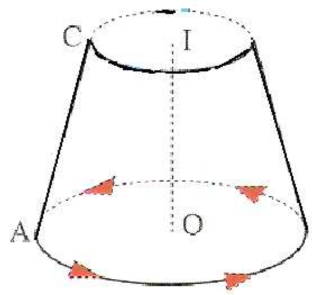
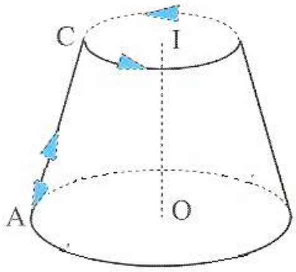


Figure 1



Trajet de F1



Trajet de F2

Partie A : Etudes d'exemples

1. Dans cette question, on suppose AC =1

a. On suppose de plus AS = 3. Démontrer que, parmi les deux fourmis, c'est la fourmi « F1 » qui parcourt la plus grande distance.

b. Dans cette question, on a AC = 1 et cette fois AS = 4. Laquelle des deux fourmis parcourt la plus grande distance ?

2. Dans cette question, la longueur AC est quelconque et on suppose AS = 3

a. Exprimer la distance parcourue par la fourmi « F2 » en fonction de la longueur AC.

b. Démontrer que, quelle que soit la longueur AC, la fourmi « F1 » parcourt la plus grande distance.

Partie B : Etude du cas général

Dans cette partie, les longueurs AC et AS sont quelconques.

1. Exprimer la distance parcourue par la fourmi « F2 » en fonction des longueurs AC et SA.

2. Les deux fourmis peuvent-elles parcourir la même distance ? Si oui, dans quel(s) cas ?

3. Comparer les distances parcourues par les deux fourmis, selon les valeurs des longueurs AS et AC.

EXERCICE 4 : TOURNER EN … CARRÉS

Partie A Quelques calculs…remarquables

1. a. Vérifier les égalités suivantes :

$$(1^2+3^2)(4^2+5^2)=(1\times4+3\times5)^2+(1\times5-3\times4)^2=(1\times4-3\times5)^2+(1\times5+3\times4)^2$$

b. Vérifier que le produit $(7^2+5^2)(10^2+13^2)$ est égal à chacune des deux sommes suivantes : $135^2 + 41^2$ et $5^2 + 141^2$
Justifier le choix des nombres 135 et 41 ; 5 et 141 qui interviennent dans ces sommes.

c. Ecrire de même, de deux manières différentes, le produit $(11^2+27^2)(35^2+18^2)$ sous la forme d'une somme de deux carrés de nombres entiers naturels.

2. Dans cette question, *a, b, c* et *d* sont des entiers naturels non nuls.

a. Démontrer que, quelles que soient les valeurs de ces entiers, le produit $P = (a^2 + b^2)(c^2 + d^2)$ peut s'écrire sous la forme d'une somme de deux carrés de deux nombres entiers naturels.

b. On suppose que *a* est différent de *b* et *c* différent de *d*. Peut-on écrire P de deux manières différentes sous la forme d'une somme de deux carrés de deux nombres entiers naturels ? Justifier votre réponse.

Les parties B et C peuvent être traitées de manière indépendante

Partie B Une application : un rectangle contre deux carrés

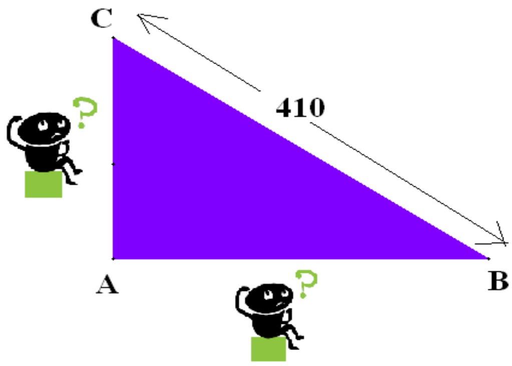
Peut-on échanger de manière équitable un terrain rectangulaire de dimensions 116 mètres et 106 mètres contre deux terrains carrés dont les mesures, en mètres, des côtés seraient des nombres entiers. (*La somme des aires des deux carrés doit donc être égale à l'aire du rectangle).*
Justifier soigneusement votre réponse.

Pourriez-vous donner plusieurs solutions au problème posé ?

Partie C Une autre application : un triplé de carrés

1. Existe-t-il un triangle ABC rectangle en A tel que l'hypoténuse BC mesure 410 cm, les mesures, en cm, des côtés AB et AC étant des nombres entiers.
On pourra utiliser la question 1.a) de la partie A

2. En utilisant le tableur de votre calculatrice ou en la programmant donner le maximum de solutions au problème posé.



CORRECTION, Orléans-Tours 2013

Premier exercice Académique (exo 3)

Olympiades mathématiques, S

Partie A : Étude d'exemples

1. $AC = 1$.

   a) $AC = 1$ et $AS = 3$. F1 parcourt une distance de 2π et, d'après le théorème de Thalès, $CI = \dfrac{2}{3}$ donc F2 parcourt $1 + 1 + 2 \times \dfrac{2}{3}\pi = \dfrac{6+4\pi}{3} \leqslant 2\pi$ donc F1 parcourt la plus grande distance.

   b) $AC = 1$ et $AS = 4$. F1 parcourt toujours une distance de 2π et, d'après le théorème de Thalès, $CI = \dfrac{3}{4}$ donc F2 parcourt $1 + 1 + 2 \times \dfrac{3}{4}\pi > 2\pi$ donc, cette fois-ci, F2 parcourt la plus grande distance.

2. AC est quelconque et $AS = 3$.

   a) D'après le théorème de Thalès, on obtient $CI = \dfrac{3 - AC}{3} = 1 - \dfrac{AC}{3}$.
   F2 parcourt donc une distance égale à :

   $$AC + AC + 2\pi CI = 2AC + 2\pi\left(1 - \frac{AC}{3}\right) = 2\pi + AC\left(2 - \frac{2\pi}{3}\right) = 2\pi + AC\frac{6-2\pi}{3}.$$

   b) F1 parcourt toujours 2π et F2 parcourt la distance $2\pi + \dfrac{AC(6-2\pi)}{3}$.

   Or $6 - 2\pi < 0$ donc $2\pi + AC\dfrac{6-2\pi}{3} < 2\pi$. Donc dans le cas où $AS = 3$, F1 parcourt toujours la plus grande distance, quelle que soit la valeur de AC.

Partie B : Étude du cas général

1. D'après le théorème de Thalès $CI = \dfrac{SC}{AS} = \dfrac{AS - AC}{AS} = 1 - \dfrac{AC}{AS}$. F2 parcourt la distance $2AC + 2\pi CI = 2AC + 2\pi\left(1 - \dfrac{AC}{AS}\right) = 2\pi + AC\left(2 - \dfrac{2\pi}{AS}\right)$ c'est-à-dire :

   $$2\pi + \frac{2AC}{AS}(AS - \pi).$$

2. F1 parcourt la distance 2π . D'après les calculs du 1. , les deux distances sont égales si et seulement si $AS = \pi$, et ce quelle que soit la valeur de AC.

3. Pour comparer les distances parcourues par F1 et F2 il suffit d'étudier le signe de $\dfrac{2AC}{AS}(AS - \pi)$. Il suffit donc de comparer AS et π.

   - Si $AS < \pi$ alors, quelle que soit la valeur de AC, c'est F1 qui parcourt la plus grande distance.
   - Si $AS > \pi$ alors quelle que soit la valeur de AC, c'est F2 qui parcourt la plus grande distance.
   - Si $AS = \pi$ alors, quelle que soit la valeur de AC, Les deux fourmis parcourent la même distance.

CORRECTION, Orléans-Tours 2013

Second exercice Académique (exo 4)

Olympiades mathématiques, S

Partie A

1. a) $\left(1^2+3^2\right)\left(4^2+5^2\right)=10\times 41=410$
   et $(1\times 4+3\times 5)^2+(1\times 5-3\times 4)^2=19^2+(-7)^2=19^2+7^2=410$.
   et $(1\times 4-3\times 5)^2+(1\times 5)^2+(1\times 5+3\times 4)^2=(-11)^2+17^2=11^2+17^2=410$.
   Donc vérification faite.

   b) $\left(7^2+5^2\right)\left(10^2+13^2\right)=74\times 269=19906=135^2+41^2$ et, par analogie avec la question 1.a), $135=7\times 10+5\times 13; 41=7\times 13-5\times 10; 5=7\times 10-5\times 13$ et $141=7\times 13+5\times 10$.

   c) $\left(11^2+27^2\right)\left(35^2+18^2\right)=1316650$
   $(11\times 35+27\times 18)^2+(11\times 18-27\times 35)^2=871^2+(-747)^2=871^2+747^2=1316650$.
   $(11\times 35-27\times 18)^2+(11\times 18+27\times 35)^2=(-101)^2+1143^2=101^2+1143^2=1316650$.

2. a) On conjecture la formule

$$\left(a^2+b^2\right)\left(c^2+d^2\right)=(ac+bd)^2+(ad-bc)^2=(ac-bd)^2+(ad+bc)^2$$

   que l'on vérifie en développant chaque membre. On a donc au moins une décomposition.

   b) On suppose que a est différent de b et que c est différent de d.
   Si les décompositions obtenues au 2. a) sont identiques, alors nécessairement :

$$\begin{cases} ac+bd=\pm(ac-bd)\\ ad-bc=\pm(ad+bc)\end{cases} \text{ ou } \begin{cases} ac+bd=\pm(ad+bc)\\ ad-bc=\pm(ac-bd)\end{cases}$$

   - si $ac+bd=ac-bd$ alors $bd=0$ ou $d=0$, ce qui est contraire à l'hypothèse.
   - si $ac+bd=-(ac-bd)$ alors $ac=0$ ou $c=0$, ce qui est contraire à l'hypothèse.
   - si $ac+bd=ad+bc$ alors $(a-b)(c-d)=0$ donc $a=b$ ou $c=d$, ce qui est contraire à l'hypothèse.
   - si $ac+bd=-(ac+bc)$ alors $(a+b)(c+d)=0$, ce qui est impossible car a, b, c et d sont des entiers naturels strictement positifs.

   Les deux décompositions obtenues au 2.a) sont donc distinctes.

Partie B

Il suffit de remarquer que $116=100+16=10^2+4^2$ et que $106=9^2+5^2$. On obtient donc

$$\begin{aligned} 116\times 106 &= \left(10^2+4^2\right)\left(9^2+5^2\right)\\ &=(10\times 9+4\times 5)^2+(10\times 5-4\times 9)^2=110^2+14^2\\ &=(10\times 9-4\times 5)^2+(10\times 5+4\times 9)^2=116\times 106\\ &=86^2+70^2=14^2+110^2\end{aligned}$$

On peut donc échanger le terrain rectangulaire contre deux terrains carrés dont les dimensions des côtés seraient 86 m et 70 m ou bien 14 m et 110 m.

Partie C

1. D'après la question 1.a), $410=19^2+7^2=11^2+17^2$
   donc $410^2=410\times 410=\left(19^2+7^2\right)\left(11^2+17^2\right)=(19\times 11+7\times 17)^2+(19\times 17-7\times 11)^2=328^2+246^2$
   ou $410^2=(19\times 11-7\times 17)^2+(19\times 17+7\times 11)^2=90^2+400^2$.

   Le triangle ABC ayant comme mesure des côtés 328 ; 246 ; 410 vérifie donc la réciproque de Pythagore et le triangle ABC sera rectangle.
   De même le triangle ABC qui aurait comme mesure des côtés 90 ; 400 et 410 serait un triangle rectangle.

2. Voir l'algorithme page suivante

```
VARIABLES
  a EST_DU_TYPE NOMBRE
  b EST_DU_TYPE NOMBRE
  X EST_DU_TYPE NOMBRE
DEBUT_ALGORITHME
  LIRE X
  POUR a ALLANT_DE 1 A floor(X)
    DEBUT_POUR
    b PREND_LA_VALEUR sqrt(pow(X,2)-pow(a,2))
    SI (b==floor(b)) ALORS
      DEBUT_SI
      AFFICHER "("
      AFFICHER a
      AFFICHER " ; "
      AFFICHER b
      AFFICHER " )"
      FIN_SI
    FIN_POUR
FIN_ALGORITHME
```

3. En prenant X=410, on obtient ;

RÉSULTAT :

```
***Algorithme lancé***
(90 ; 400 )
(168 ; 374 )
(246 ; 328 )
(266 ; 312 )
(312 ; 266 )
(328 ; 246 )
(374 ; 168 )
(400 ; 90 )
```