SUJET + CORRIGÉ

OLYMPIADES DE MATHÉMATIQUES

ACADÉMIE D'ORLÉANS-TOURS

Classes de première S • 2012

Académie d'Orléans-Tours

Olympiades de mathématiques

Session 2012

Mercredi 21 mars 2012
8 h - 12 h

Les exercices 1 et 2 sont issus de la sélection du jury national.
Les exercices 3 et 4 sont issus de la sélection du jury académique.
Les 4 exercices sont à traiter par le candidat.

Conformément à la réglementation, l'usage d'une calculatrice est autorisé

Ce sujet comporte 8 pages numérotées de 1 à 8

La page 8 est une annexe <u>à rendre avec la copie</u>

<u>EXERCICE NATIONAL 1</u> :

On dit qu'un nombre entier est *digisible* lorsque les trois conditions suivantes sont vérifiées :

- aucun de ses chiffres n'est nul ;
- il s'écrit avec des chiffres tous différents ;
- il est divisible par chacun d'eux.

Par exemple,

- 24 est *digisible* car il est divisible par 2 et par 4.
- 324 est *digisible* car il est divisible par 3, par 2 et par 4.
- 32 n'est pas *digisible* car il n'est pas divisible par 3.

On rappelle qu'un nombre entier est divisible par 3 si et seulement si la somme de ses chiffres est divisible par 3.

1. Proposer un autre nombre *digisible* à deux chiffres.

2. Proposer un nombre *digisible* à quatre chiffres.

3. Soit n un entier *digisible* s'écrivant avec un 5.

a. Démontrer que 5 est le chiffre de ses unités.

b. Démontrer que tous les chiffres de n sont impairs.

c. Démontrer que n s'écrit avec au plus quatre chiffres.

d. Déterminer le plus grand entier *digisible* s'écrivant avec un 5.

4. Soit n un entier *digisible* quelconque.

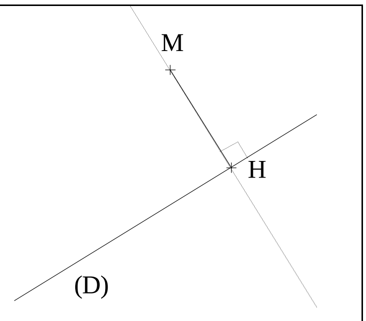
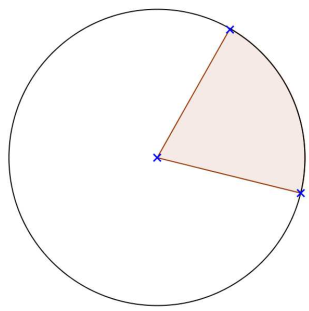
a. Démontrer que n s'écrit avec au plus sept chiffres.

b. Si n s'écrit avec sept chiffres, dont un 9, déterminer les chiffres de n.

c. Déterminer le plus grand entier *digisible*.

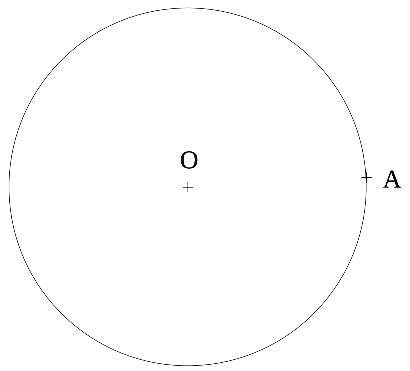
<u>EXERCICE NATIONAL 2</u> :

Rappels

• *On appelle* ***distance entre un point M et une droite (D)*** *la distance MH, où H est le point d'intersection de (D) avec la droite perpendiculaire à (D) passant par M.*	
• *Dans la figure ci-contre, si le rayon du disque est R, et si l'angle du secteur angulaire grisé mesure α (en degrés), alors* ***l'aire de la portion de disque*** *grisée vaut $\frac{\pi\alpha R^2}{360}$.* *Dans la partie II de l'exercice, on considérera la distance d'un point M à* ***un segment*** *[BC] comme étant la distance du point M à la droite (BC).*	

Partie I

Soit C un cercle de centre O, A un point de ce cercle et D le disque délimité par ce cercle.



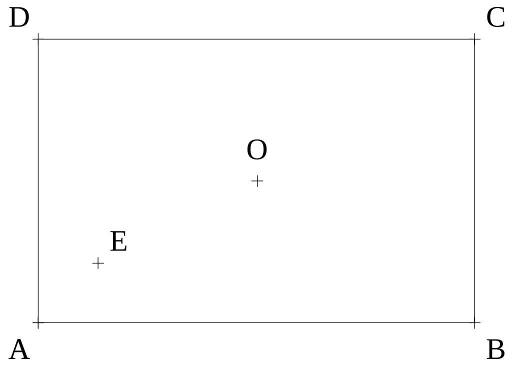
1. Reproduire la figure, et représenter l'ensemble des points du disque équidistants de O et de A.

2. Hachurer l'ensemble des points du disque plus proches de O que de A.

3. Soit M un point déterminé aléatoirement de manière équiprobable sur la surface du disque D.
Quelle est la probabilité que M soit plus proche de O que de A ?

Partie II

Soit ABCD un rectangle de longueur AB = 20 cm et de largeur BC = 12 cm, de centre O.
Soit E un point situé à l'intérieur du rectangle, proche de A, à 2 cm de chaque bord (comme sur la figure ci-après, qui n'est toutefois pas à l'échelle).
Soit M un point déterminé aléatoirement de manière équiprobable à l'intérieur du rectangle ABCD.



1. Quelle est la probabilité que M soit plus proche du côté [BC] que du côté [AD] ?

2. ***a.*** Reproduire le rectangle, et représenter l'ensemble des points intérieurs au rectangle et équidistants des côtés [AB] et [BC].

   b. Hachurer l'ensemble des points intérieurs au rectangle et plus proches du côté [BC] que du côté [AB].

   c. Quelle est la probabilité que M soit plus proche du côté [BC] que du côté [AB] ?

3. Quelle est la probabilité que M soit plus proche du côté [AB] que des trois autres côtés [BC], [CD] et [DA] ?

4. Quelle est la probabilité que M soit plus proche de O que de E ?

5. Quelle est la probabilité que M soit plus proche de O que des quatre sommets A, B, C et D ?

EXERCICE ACADÉMIQUE 3 :

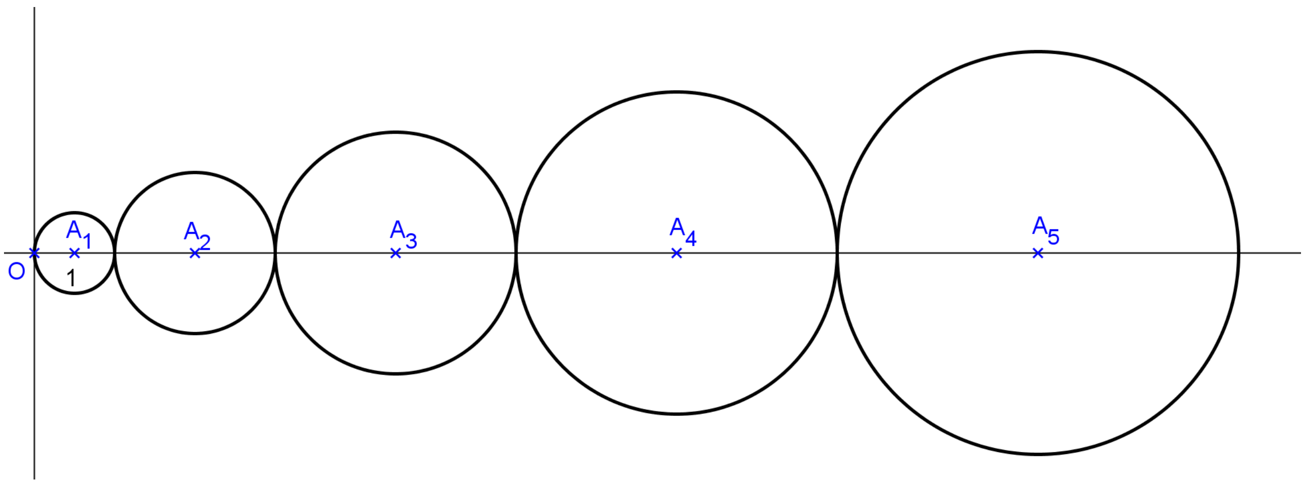
Des cercles à la suite …

On rappelle que, pour tout entier $n \geq 1$, la somme des entiers de 1 à n est donnée par :

$$1+2+3+.....+n = \frac{n(n+1)}{2} \quad .$$

Le plan est muni d'un repère orthonormal d'origine O.
On considère des cercles tous centrés sur l'axe des abscisses et définis de la manière suivante :

- le cercle C_1 passe par le point O et a pour rayon 1 ;
- le cercle C_2 est tangent extérieurement au cercle C_1 et a pour rayon 2 ;
- le cercle C_3 est tangent extérieurement au cercle C_2 et a pour rayon 3 ;
- et plus généralement, pour tout entier $n \geq 2$, le cercle C_n est tangent extérieurement au cercle C_{n-1} et a pour rayon n.



Pour tout entier $n \geq 1$, on désigne par A_n le centre du cercle C_n et par x_n l'abscisse du point A_n.
On rappelle que les cercles sont centrés sur l'axe des abscisses et on suppose le repère choisi de telle sorte que tous les nombres réels x_n soient positifs.

1. ***a.*** Calculer les abscisses x_1 , x_2 … x_6 respectives des points A_1, A_2 … A_6.

b. Conjecturer l'expression, pour tout entier $n \geq 1$, de x_n en fonction de n.

c. Valider votre conjecture par une démonstration.

2. On désigne par Δ une droite passant par le point O et tangente au cercle $\mathcal{C}_5$.

a. Construire Δ sur la feuille donnée en annexe p 8/8. Justifier la construction.

Cette feuille annexe p 8/8 est à rendre avec la copie.

b. On considère les points suivants :

- T le point de contact de la droite Δ avec le cercle $\mathcal{C}_5$;
- P_3 et Q_3 les deux points d'intersection de la droite Δ et du cercle $\mathcal{C}_3$;
- P_4 et Q_4 les deux points d'intersection de la droite Δ et du cercle $\mathcal{C}_4$.

Démontrer que les cordes $[P_3Q_3]$ et $[P_4Q_4]$ ont la même longueur. On pourra considérer les points I_3 et I_4 milieux respectifs de ces deux segments.

3. Dans cette question, on considère un entier naturel $n \geq 2$ et les n cercles de $\mathcal{C}_1$ à $\mathcal{C}_n$. Une droite Δ passant par le point O et tangente au cercle $\mathcal{C}_n$ définit des cordes sur chacun des cercles $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$, … $\mathcal{C}_{n-1}$

a. Pour tout entier k tel que $1 \leq k \leq n-1$, on désigne par P_k et Q_k les deux points d'intersection de la droite Δ et du cercle $\mathcal{C}_k$. Démontrer que $P_kQ_k = \dfrac{2k}{n}\sqrt{n^2 - k^2}$.

b. Démontrer que, parmi les $n-1$ cordes $[P_kQ_k]$, il en existe au moins deux qui ont la même longueur si et seulement si n^2 est la somme des carrés de deux entiers.

c. Pour $n = 6$, une droite Δ passant par le point O et tangente au cercle $\mathcal{C}_6$ définit des cordes sur chacun des cercles $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$, ... $\mathcal{C}_5$. Parmi ces cinq cordes, en existe-t-il deux qui ont la même longueur ?

d. Et pour $n = 10$?

<u>EXERCICE   ACADÉMIQUE 4</u> :

Accrochez les wagons !

Dans cet exercice, l'unité de masse sera la tonne et l'unité de longueur le mètre.

Un convoi ferroviaire est constitué de N wagons choisis parmi deux types :

- Wagons de type A : longueur 20 , masse totale 60 ;
- Wagons de type B : longueur 30 , masse totale 100.

Un convoi de cinq wagons peut être symbolisé par une écriture du type (A,B,A,A,B), désignant les wagons dans l'ordre du convoi.
Ainsi les deux convois de trois wagons symbolisés par (A,A,B) et (A,B,A) sont considérés comme distincts.
On note L la longueur totale du convoi, **qui ne tient pas compte des espaces entre les wagons, ni des motrices.**

1. On forme un convoi de longueur 310 admettant exactement N wagons.

a. Pour quelle valeur de N ce convoi a-t-il une masse totale maximum ?

b. De combien de façons distinctes peut-on former un convoi répondant aux conditions de la question précédente ?

2. Pour tout entier naturel n non nul, on note u_n le nombre de convois distincts de longueur $\mathrm{L} = 10 \times n$. Ainsi, u_5 désigne le nombre de convois distincts de longueur 50.

a. Déterminer u_{10}, c'est-à-dire le nombre de convois distincts de longueur 100.

b. Reproduire sur la copie et compléter le tableau suivant :

n	2	3	4	5	6	7
u_n						

c. Calculer u_8 à l'aide du tableau précédent en remarquant que tout convoi de longueur 80 se termine soit par un wagon A, soit par un wagon B.

d. Retrouver la valeur de u_{10}, puis calculer u_{15} et u_{20}.

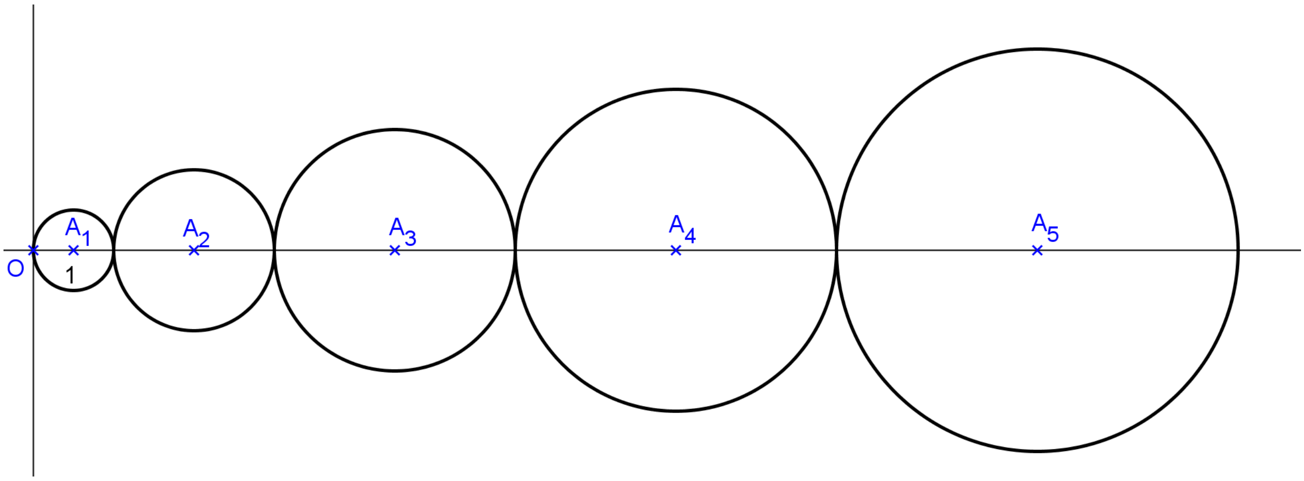
3. Ecrire un algorithme en langage naturel, permettant de calculer u_n, lorsque l'on saisit une valeur de n.

Nom :
Prénom :

Feuille annexe <u>à rendre avec la copie</u>

<u>Exercice Académique 3</u> : p 6/8

Question 2. *a*.



Exercice 3 : corrigé

1. **a)** $x_1 = 1$, $x_2 = 4$, $x_3 = 9$, $x_4 = 16$, $x_5 = 25$ et $x_6 = 36$.

b) Conjecture : pour tout entier $n \geq 1$, $x_n = n^2$.

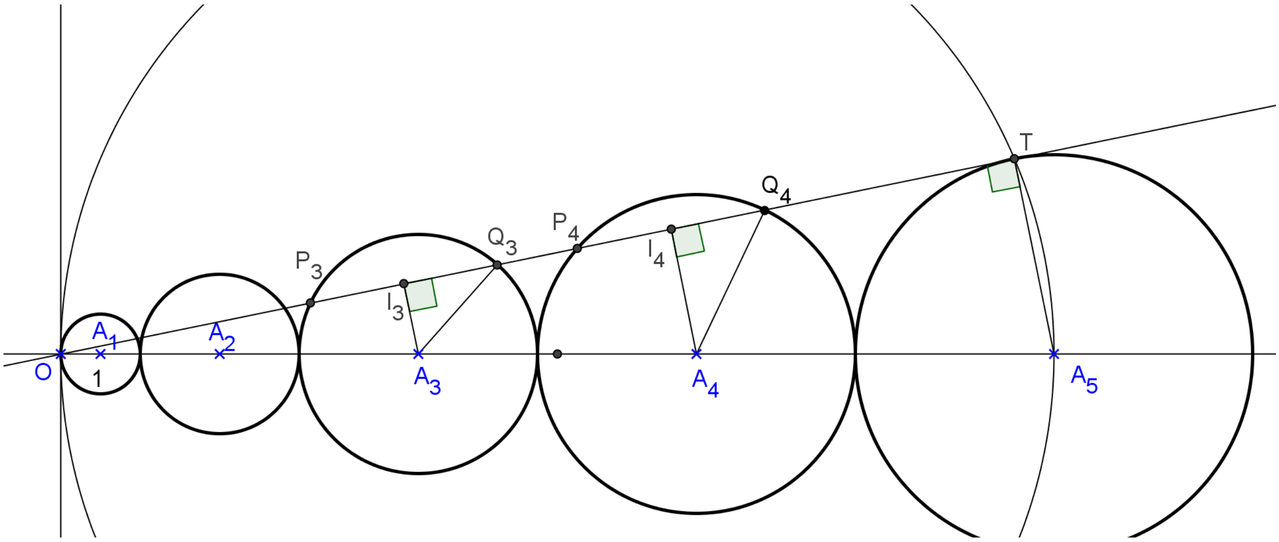
c) La relation est vérifiée pour $n = 1$. Démonstration dans le cas $n \geq 2$:

Si on désigne par r_n le rayon du cercle C_n, on a $x_n = \text{OA}_n = 2\,r_1 + 2\,r_2 + \ldots + 2\,r_{n-1} + r_n$.

d'où $x_n = 2\,(r_1 + r_2 + \ldots + r_{n-1}) + r_n = 2\left(1+2+3+\cdots+(n-1)\right) + n$

D'après la formule rappelée au début de l'énoncé : $x_n = (n-1)n + n = n^2$.

2. **a)** Le triangle OTA_5 étant rectangle en T, le point T appartient au cercle de diamètre $[\text{OA}_5]$. Il est donc le point d'intersection autre que O de ce cercle et de la droite Δ.



b) Les droites (I_3A_3), (I_4A_4) et (TA_5) sont parallèles puisque toutes trois perpendiculaires à la droite Δ. On peut donc appliquer le théorème de Thalès dans les triangles OTA_5, OI_3A_3 et OI_4A_4.

On obtient : $\dfrac{\text{I}_3\text{A}_3}{\text{OA}_3} = \dfrac{\text{I}_4\text{A}_4}{\text{OA}_4} = \dfrac{\text{TA}_5}{\text{OA}_5}$. D'où $\text{I}_3\text{A}_3 = \text{OA}_3 \times \dfrac{\text{TA}_5}{\text{OA}_5}$ et $\text{I}_4\text{A}_4 = \text{OA}_4 \times \dfrac{\text{TA}_5}{\text{OA}_5}$, ce qui donne :

$\text{I}_3\text{A}_3 = 9 \times \frac{5}{25} = \frac{9}{5}$ et $\text{I}_4\text{A}_4 = 16 \times \frac{5}{25} = \frac{16}{5}$.

On applique alors le théorème de Pythagore dans les triangles $\text{A}_3\text{I}_3\text{Q}_3$ et $\text{A}_4\text{I}_4\text{Q}_4$.

$\text{I}_3\text{Q}_3{}^2 = \text{A}_3\text{Q}_3{}^2 - \text{I}_3\text{A}_3{}^2 = 3^2 - \left(\frac{9}{5}\right)^2 = \frac{144}{25}$ et $\text{I}_4\text{Q}_4{}^2 = \text{A}_4\text{Q}_4{}^2 - \text{I}_4\text{A}_4{}^2 = 4^2 - \left(\frac{16}{5}\right)^2 = \frac{144}{25}$.

On obtient $\text{P}_3\text{Q}_3 = \text{P}_4\text{Q}_4 = \frac{24}{5}$. Les deux cordes $[\text{P}_3\text{Q}_3]$ et $[\text{P}_4\text{Q}_4]$ ont la même longueur.

3. **a)** De même qu'au **2. b)**, on applique le théorème de Thalès dans les triangles OTA_n et OI_kA_k.

On obtient : $\dfrac{\text{I}_k\text{A}_k}{\text{OA}_k} = \dfrac{\text{TA}_n}{\text{OA}_n}$. D'où $\text{I}_k\text{A}_k = \text{OA}_k \times \dfrac{\text{TA}_n}{\text{OA}_n} = k^2 \times \frac{n}{n^2} = \frac{k^2}{n}$.

Puis on applique le théorème de Pythagore dans le triangle $\text{A}_k\text{I}_k\text{Q}_k$.

$\text{I}_k\text{Q}_k{}^2 = \text{A}_k\text{Q}_k{}^2 - \text{I}_k\text{A}_k{}^2 = k^2 - \left(\frac{k^2}{n}\right)^2 = \frac{k^2(n^2-k^2)}{n^2}$. D'où $\text{P}_k\text{Q}_k = 2\,\text{I}_k\text{Q}_k = \frac{2\,k}{n}\sqrt{n^2-k^2}$.

b) Soit k et k' des entiers distincts tels que $1 \leq k \leq n-1$ et $1 \leq k' \leq n-1$.

On a les équivalences successives suivantes :

$$\text{P}_k\text{Q}_k = \text{P}_{k'}\text{Q}_{k'} \Leftrightarrow \frac{k}{n}\sqrt{n^2-k^2} = \frac{k'}{n}\sqrt{n^2-k'^2} \Leftrightarrow k^2\left(n^2-k^2\right) = k'^2\left(n^2-k'^2\right)$$

$$\Leftrightarrow n^2\left(k^2-k'^2\right) = k^4 - k'^4 \Leftrightarrow n^2\left(k^2-k'^2\right) = \left(k^2+k'^2\right)\left(k^2-k'^2\right),$$

ce qui équivaut, puisque $(k^2-k'^2)$ est non nul, à $n^2 = k^2 + k'^2$.

c) Pour $n = 6$, on ne peut trouver deux cordes égales car aucune des sommes $k^2 + k'^2$ ne vaut 36.

d) Pour $n = 10$, on a $10^2 = 6^2 + 8^2$. On en déduit que les cordes $[\text{P}_6\text{Q}_6]$ et $[\text{P}_8\text{Q}_8]$ délimitées par la droite Δ sur les cercles C_6 et C_8 ont la même longueur.

Exercice 4 : corrigé

1. **a)** Notons x le nombre de wagons de type A et y celui de type B : on a donc $20x + 30y = 320$. La masse totale $M = 60x + 100y = 960 + 10y$ est maximum lorsque y est maximum. On sait que $2x + 3y = 32$ donc $0 \leq y \leq 10$. Donc ($x = 1, y = 10, N = 11, M = 1960$) est la seule solution du problème
avec $20x + 30y = 320$, La masse totale $M = 60x + 100y = 930 + 10y$ est maximum lorsque y est maximum. On sait que $2x + 3y = 31$ donc $0 \leq y \leq 10$. Donc ($x = 2, y = 9, N = 11, M = 1830$) est la seule solution du problème

b) avec $20x + 30y = 320$, il faut choisir la position du wagon de type A parmi les 11 wagons ,soit 11 compositions possibles.
avec $20x + 30y = 310$, il faut choisir la position de deux wagons de type A parmi les 11 wagons, soit 10+9+8+7+6+5+4+3+2+1=55 compositions possibles.

2.

a) Pour former un convoi de longueur 100 il faut avec les notations précédentes résoudre l'équation $2x + 3y = 10$, x et y entiers donc $x = 2$ $y = 2$ ou $x = 5$. Il y a donc 7 convois de longueur 10 possibles (A,A,B,B),(A,B,A,B),(A,B,B,A),(B,A,A,B),(B,A,B,A),(B,B,A,A),(A,A,A,A,A)

b)

n	2	3	4	5	6	7
u_n	1	1	1	2	2	3

c) Si le convoi de longueur 80 se termine par un wagon A , et si on retire ce wagon il restera un convoi de longueur 60. Inversement, tous les convois de longueur 60 complétés d'un wagon de type A conviennent. Si le convoi de longueur 80 se termine soit par un wagon B , et si on retire ce wagon il restera un convoi de longueur 50. Inversement, tous les convois de longueur 50 complétés d'un wagon de type B conviennent. On a donc $u_8 = u_6 + u_5 = 4$

d) De la même façon, $u_9 = u_7 + u_6 = 5$, $u_{10} = u_8 + u_7 = 7$
on a donc $u_n = u_{n-2} + u_{n-3}$

n	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
u_n	4	5	7	9	12	16	21	28	37	49	65	86	114

3. Donner l'entier n
a = 1, b = 1, c = 1
Pour k allant de 5 à n faire
    d reçoit a + b
    a reçoit b, b reçoit c, c reçoit d
    fin faire
afficher c