SUJET + CORRIGÉ

OLYMPIADES DE MATHÉMATIQUES

ACADÉMIE D'ORLÉANS-TOURS

Classes de première S • 2011

Olympiades de mathématiques

Session 2011

Académie d'Orléans-Tours

Mercredi 23 mars 2011   8 h - 12 h

Les exercices 1 et 2 sont issus de la sélection du jury national.
Les exercices 3 et 4 sont issus de la sélection du jury académique.
Les 4 exercices sont à traiter par le candidat.

Conformément à la réglementation, l'usage d'une calculatrice est autorisé.

Ce sujet comporte 8 pages numérotées de 1 à 8

Exercice national 1 : Essuie-glaces

(Les parties 1, 2 et 3 sont indépendantes)

On se propose de calculer l'aire de la surface essuyée par plusieurs modèles de balais d'essuie-glace d'un véhicule. On considèrera que les pare-brises sont des surfaces planes.

Un premier véhicule est équipé d'un seul balai porté par une tige métallique de 60 cm, modélisée par un segment [OB]. Soit A le point de [OB] tel que OA = 15 cm. Le balai en caoutchouc est alors modélisé par le segment [AB] (voir figure 1 ci-dessous). Déterminer la valeur exacte de l'aire de la surface essuyée par le balai, en admettant que celui-ci décrit autour du point O un angle de 180°. En donner une valeur arrondie au cm^2 près.

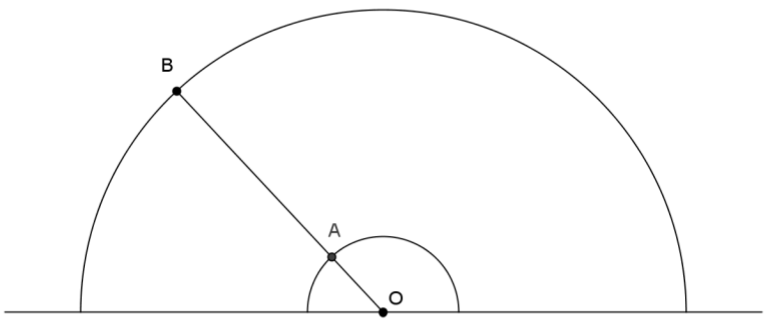


Fig. 1

Le pare-brise d'un second véhicule possède deux essuie-glaces modélisés par deux segments [OB] et [O'B'] de même longueur R, l'un tournant l'un autour d'un point O, l'autre autour d'un point O', tels que OO' = R (voir figure 2 ci-dessous). Ces balais en caoutchouc couvrent la longueur totale de chaque segment. L'extrémité de chaque segment décrit un demi-cercle au-dessus de la droite (OO'). Déterminer l'aire de la surface du pare-brise essuyée par les balais.

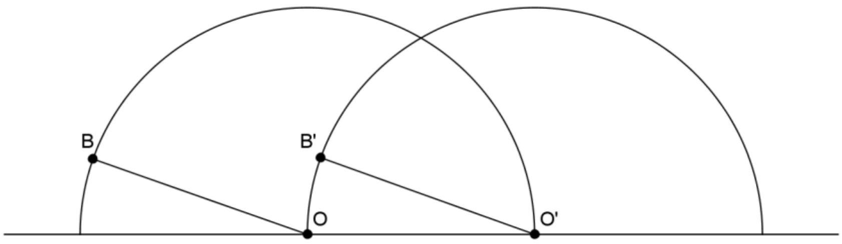


Fig. 2

Un troisième véhicule est équipé d'un essuie-glace dont le support métallique est modélisé par la réunion de deux segments (voir la figure 3 ci-dessous) : un segment [AB], qui porte le balai en caoutchouc sur toute sa longueur, et un segment [OC] qui relie le centre de rotation O à un point C du segment [AB] tels que $\widehat{OCA} = 30°$, CB = 4 CA et $OC = \sqrt{3} \times CA$. On pose CA = *a*.

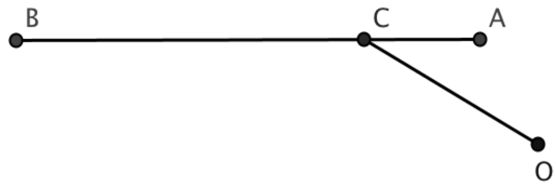


Fig. 3

a. Démontrer que le triangle AOC est isocèle.

b. Lorsqu'il essuie le pare-brise du véhicule, l'essuie-glace tourne autour du point O. En début de course le balai en caoutchouc est en position horizontale : les points A, B et C coïncident respectivement avec les points M, N et P du pare-brise tels que [MN] est horizontal (voir la figure 4 ci-dessous). En fin de course A, B, C coïncident respectivement avec les points M', N' et P' du pare-brise tels que le segment [OM'] est horizontal.

Déterminer l'angle dont a tourné le dispositif autour du point O pour passer d'une position à l'autre, puis exprimer en fonction de *a* l'aire de la surface essuyée par le balai.

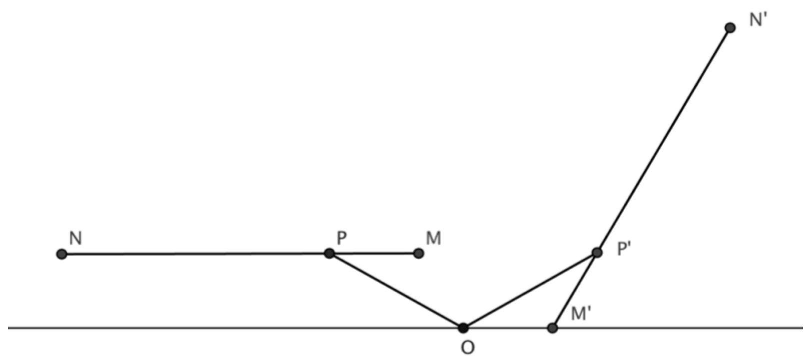


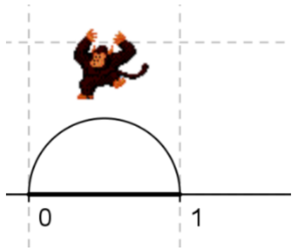
Fig. 4

Exercice National 2 : Le singe sauteur

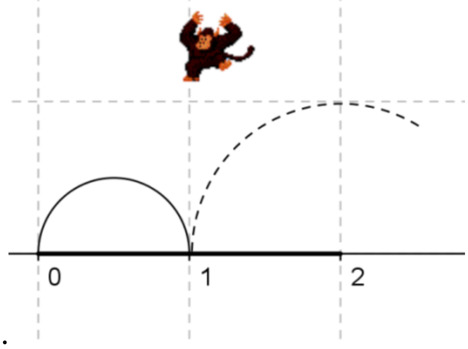
J'ai un petit singe sauteur qui passe son temps à faire des bonds sur une demi-droite graduée en choisissant d'aller vers l'avant ou vers l'arrière.

Le nombre n est dit ***atteignable*** si le singe peut, en partant de l'**origine** (position d'abscisse 0), atteindre la position d'abscisse n en **exactement** n bonds successifs (en avant ou en arrière) de longueurs 1, 2, …, n (**effectués** dans cet ordre) et sans **jamais** sortir du segment $[0 ; n]$.

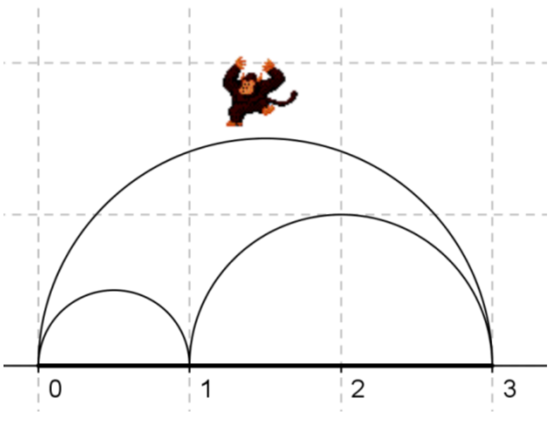
Par exemple : Le nombre 1 est atteignable en un bond.



Mais le nombre 2 ne l'est pas car, après avoir fait le bond de longueur 1 (qu'il est obligé de faire vers l'avant), s'il fait un bond de longueur 2 en avant ou en arrière il sort de l'intervalle $[0 ; 2]$.



Le nombre 3 n'est pas atteignable pour une autre raison : après avoir fait un bond de longueur 1 et un autre de longueur 2 vers l'avant, il est obligé de faire un bond de longueur 3 vers l'arrière (sinon il sort de l'intervalle $[0 ; 3]$) et se trouve sur le nombre 0 au lieu de 3.



Questions

1. Montrer que le nombre 4 est atteignable et ceci d'une seule façon.

2. Montrer que le nombre 5 n'est pas atteignable.

On peut montrer de la même façon que les nombres 6, 7 et 8 ne sont pas atteignables ; *ce résultat est admis*.

3. Le nombre 9 est-il atteignable ?

Pour la suite, on rappelle que, pour tout nombre entier m, on a : $1+2+3+....+m=\frac{m(m+1)}{2}$.

4. Montrer que tous les nombres entiers qui sont des carrés sont atteignables.

5.
   a. Montrer que si le nombre entier n est atteignable alors le produit $n(n-1)$ est divisible par 4. En déduire une condition sur l'entier n pour qu'il soit atteignable.
   b. La réciproque de cette proposition est-elle vraie ?

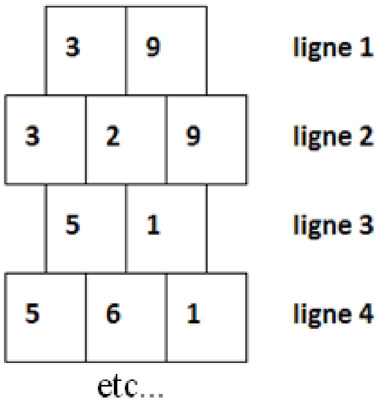
6. On suppose N $\geq$ 6 et atteignable par une séquence qui commence par 1+2+3 … Montrer que N + 4 est aussi atteignable.

Exercice académique 3 : Marelle cyclique

Léo compose un tableau de la manière suivante :

- Sur la première ligne, il écrit deux chiffres pris parmi les dix entiers 0 ; 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 ; 7 ; 8 et 9 (ces deux chiffres pouvant être égaux).
- Ensuite il pose alternativement des lignes à trois ou deux cases.
- Pour remplir une case :
    - il calcule la somme des deux chiffres placés juste au-dessus et écrit dans la case le chiffre des unités de cette somme.
    - S'il n'y a qu'un seul chiffre au-dessus de la case à remplir, il répète ce chiffre.

Exemple



Partie A

1.

a. Compléter le tableau ci-dessus (appelé « marelle ») jusqu'à la ligne 9. Quelle serait la 2011e ligne de cette figure ?

b. Construire jusqu'à la ligne 9 la marelle dont la première ligne est formée des chiffres 3 et 2.

c. Recommencer en prenant les chiffres 7 et 3 sur la première ligne.

d. Quelle conjecture peut-on faire sur les lignes 1 et 9 d'une marelle ?

2. Démontrer que toute marelle possède la propriété observée à la question 1.d. On pourra noter x et y les entiers choisis sur la première ligne.

Dans les deux parties suivantes, on garde la notation $(x\ ;\ y)$ pour les deux nombres de la première ligne.

Partie B

1. Démontrer que la première ligne est identique à la troisième si et seulement si $x + y$ est un multiple de 10 et en déduire toutes les valeurs possibles pour $(x\ ;\ y)$.

2. Donner toutes les valeurs de $(x\ ;\ y)$ pour lesquelles la première ligne est identique à la cinquième sans être identique à la troisième ligne.

3. Peut-on donner des valeurs à $(x\ ;\ y)$ pour que la première ligne soit identique à la septième sans être identique à la troisième ligne? Si oui, donner un exemple.

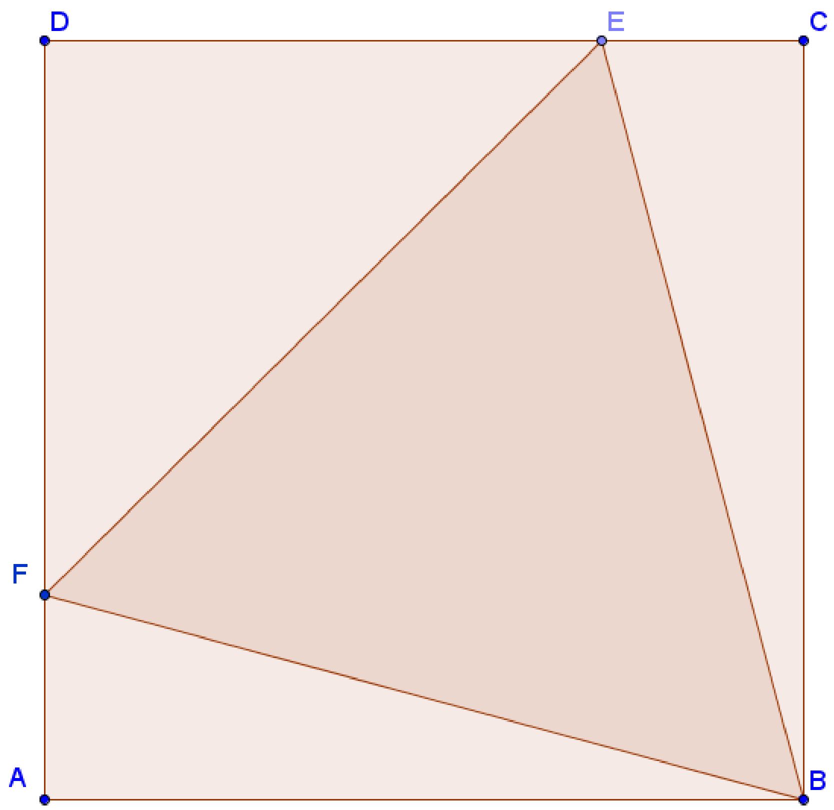
Partie C

Peut-on trouver une marelle dans laquelle apparaissent les 10 chiffres de 0 à 9 ?
Si oui, donner un exemple. Sinon, justifier l'impossibilité de construire une telle marelle.

Exercice académique 4 : Un triangle équilatéral inscrit …

<u>Partie A :</u> Un triangle équilatéral inscrit dans un carré

ABCD est un carré de côté 10 cm. On a construit un triangle équilatéral BEF tel que les points E et F appartiennent respectivement aux segments [CD] et [AD].



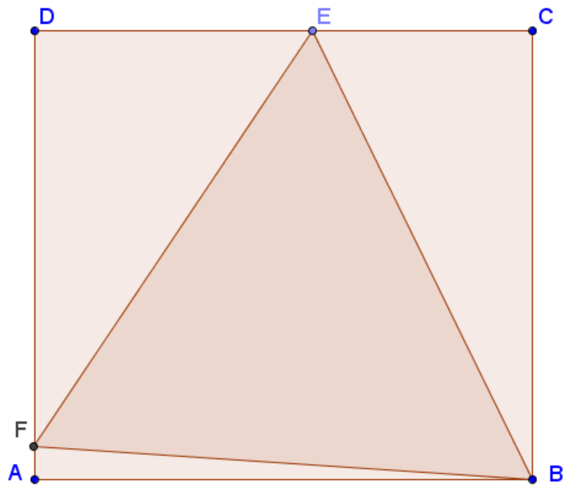
1. Démontrer que les segments [CE] et [AF] sont de même longueur et déterminer la valeur exacte de cette longueur.

2. Démontrer que l'aire du triangle DEF est égale à la somme des aires des triangles BCE et ABF.

Partie B : Un triangle équilatéral inscrit dans un rectangle

ABCD est un désormais un rectangle et on considère un triangle équilatéral BEF tel que les points E et F appartiennent respectivement aux segments [CD] et [AD].

1. Dans cette question, on suppose qu'un tel triangle équilatéral existe et on se propose de démontrer alors que l'aire du triangle DEF est égale à la somme des aires des triangles BCE et ABF.



On pose a = AB, b = AD, x = AF et y = CE.

a. Démontrer que $x^2 - 2bx - 2ay + a^2 = 0$ et $y^2 - 2bx - 2ay + b^2 = 0$.

b. En déduire que l'aire du triangle DEF est égale à la somme des aires des triangles BCE et ABF.

Pour cela, on pourra utiliser l'égalité suivante, après l'avoir vérifiée :

$$\left(x^2 - 2bx - 2ay + a^2\right)by + \left(y^2 - 2bx - 2ay + b^2\right)ax = \left[(b-x)(a-y) - ax - by\right] \times (ay + bx).$$

2. On s'intéresse maintenant à l'existence d'un triangle équilatéral inscrit dans le rectangle ABCD.

a. On se place dans le cas où le rectangle ABCD a pour dimensions AB = 10 cm et AD = 9 cm. Construire un triangle BEF équilatéral tel que les points E et F appartiennent respectivement aux segments [CD] et [AD]. Expliquer la démarche et laisser apparents les traits de construction.

b. Examiner le cas où le rectangle ABCD a pour dimensions AB = 10 cm et AD = 8 cm.

CORRECTION, Orléans-Tours 2011

Premier exercice Académique (exo 3)

Olympiades mathématiques, S

Partie A

1. a.

	3	**9**
3	2	9
	5	1
5	6	1
	1	7
1	8	7
	9	5
9	4	5
	3	**9**

La première ligne est identique à la neuvième. Les $1^{\text{ère}}$; $9^{\text{ème}}$, $17^{\text{ème}}\dots(8k+1)^{\text{ème}}$ sont identiques et valent **39**.
Or $2009 = 8\times 251+1$ donc la $2009^{\text{ème}}$ est 39 et la $2011^{\text{ème}}$ est **51**

b.

	3	**2**
3	5	2
	8	7
8	5	7
	3	**2**

La première ligne est identique à la cinquième. La $1^{\text{ère}}$; $5^{\text{ème}}$, $9^{\text{ème}}\dots(4k+1)^{\text{ème}}$ sont identiques et valent **32**.
On peut valider la conjecture de la question 1 car la $1^{\text{ère}}$ ligne est bien identique à la $9^{\text{ème}}$ ligne.

c.

	7	**3**
7	0	3
	7	**3**

La première ligne est identique à la troisième. Toutes les lignes impaires valent **73** et toutes les lignes paires **703**.
On peut valider la conjecture de la question 1 car la $1^{\text{ère}}$ ligne est bien identique à la $9^{\text{ème}}$ ligne.

2.

Soit a et b deux nombres entiers naturels. On note $u(a)$ le chiffre des unités de a ($u(b)$ celui de b). Il suffit de remarquer que : $u(a+b) = u(u(a)+u(b))$
On peut donc « remplir » la marelle ainsi

$$\begin{array}{lcr} a & \text{---------------} & u(a) \\ + & & \\ b & \text{---------------} & u(b) \\ \hline & & u(u(a)+u(b)) \\ & & \uparrow \\ & & u(a+b) \end{array}$$

x	y	
x	$u(x+y)$	y
$u(2x+y)$	$u(x+2y)$	
$u(2x+y)$	$u(3x+3y)$	$u(x+2y)$
$u(5x+4y)$	$u(4x+5y)$	
$u(5x+4y)$	$u(9x+9y)$	$u(4x+5y)$
$u(14x+13y)$	$u(13x+14y)$	
$u(14x+13y)$	$u(27x+27y)$	$u(13x+14y)$
$u(41x+40y)$	$u(40x+41y)$	

Or $40x = 4x \times 10$ se termine toujours par un zéro et $41y = 40y + y$ et $40y$ se termine toujours par un 0 donc $40x + 41y$ se termine par y.
Donc le chiffre des unités de $40x + 41y$ est y.
De même $41x = 40x + x$ se termine par x et $40y$ par 0 donc $41x + 40y$ se termine par x et le chiffre des unités de $41x + 40y$ est x.
La neuvième ligne est donc toujours identique à la première

CORRECTION, Orléans-Tours 2011

Second exercice Académique (exo 4)

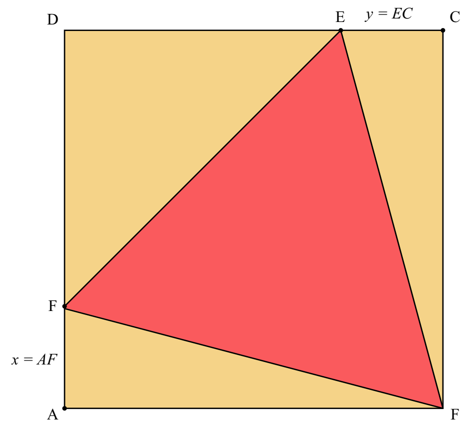
Olympiades mathématiques, S

Partie A

1. L'unité de longueur est le cm.
   On pose $x = AF$ et $y = EC$.
   On désigne par c le côté du triangle BEF.
   D'après le théorème de Pythagore :

   $x^2 + 100 = c^2$ (égalité 1)
   $y^2 + 100 = c^2$ (égalité 2)
   $(10 - x)^2 + (10 - y)^2 = c^2$ (égalité 3).

   Les égalités 21 et 2 donnent $x = y$.
   Les égalités 1 et 3 donnent alors :
   $x^2 + 100 = 2(10 - x)^2$, c'est-à-dire $x^2 - 40x + 100 = 0$.
   D'où, après résolution :
   $x = 20 + 10\sqrt{3}$ ou $x = 20 - 10\sqrt{3}$.
   Or, $0 \leqslant x \leqslant 10$ donc $x = 20 - 10\sqrt{3}$.
   Finalement : $EC = AF = 20 - 10\sqrt{3}\ cm$ (environ 2,68 cm).



2. Aire(ABF)+ Aire(ECB) $= 5x + 5y = 10x\ cm^2$ et Aire(DEF) $= \dfrac{1}{2}(10 - x)^2\ cm^2$.

   Il suffit alors de vérifier que $(10 - x)^2 = 20x$, ce qui est bien le cas puisque cette égalité est équivalente à l'égalité $x^2 - 40x + 100 = 0$ qui vérifie x.
   Finalement : Aire(ABF) + Aire(ECG) = Aire(DEF).

Partie B

L'unité de longueur est le cm et l'unité d'aire est le cm^2. Onpose $x = AF$ et $y = EC$.

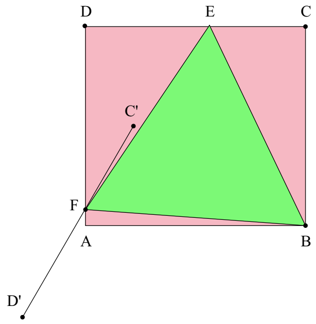
1. On désigne par c le côté du triangle BEF. D'après le théorème de Pythagore ;
   a. $x^2 + a^2 = c^2$ (égalité 1) ; $y^2 + b^2 = c^2$ (égalité 2) ; $(b - x)^2 + (a - y)^2 = c^2$ (égalité 3).
   Les égalités 2 et 3 donnent : $x^2 - 2bx - 2ay + a^2 = 0$.
   Les égalités 1 et 3 donnent : $y^2 - 2bx - 2ay + b^2 = 0$.
   b. On vérifie l'égalité p roposée. . .

   D'après a., on obtient $[(b - x)(a - y) - ax - by] \times (ay + bx) = 0$.
   Or x et y ne peuvent être simultanément nuls, donc $ay + bx \neq 0$
   donc $(b - x)(a - y) - ax - by = 0$.

   On en déduit que $\dfrac{1}{2}(b-x)(a-y) = \dfrac{1}{2}ax + \dfrac{1}{2}by$, ce qui démontre l'égalité attendue pour les aires.

2. On trace l'image [C'D'] du segment [CD] par la rotation de centre B et d'angle 60° (sens à préciser). Le point F est alors le point d'intersection (s'il existe) des segments [AD] et [C'D'].

a. Cas $AB = 10$ cm et $AD = 9$ cm.
F existe.



b. Cas $AB = 10$ cm et $AD = 8$ cm.
F n'existe pas.