OLYMPIADES MATHÉMATIQUES
LYCÉE, PREMIÈRE

ACADÉMIE DE NICE
2020

SUJET + CORRIGÉ

20e OLYMPIADES DE MATHÉMATIQUES

Mercredi 11 mars 2020[1], 2 énoncés (national et académique) en 4 heures, élèves de première générale et technologique[2] et de début de terminale[3], inscription auprès de votre professeur de mathématiques avant les vacances d'hiver selon académie.

Liberté • Égalité • Fraternité
RÉPUBLIQUE FRANÇAISE
MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE

Sujet et Corrigé vous sont présentés par freemaths.fr . . .

Olympiades nationales de mathématiques 2020

Voie générale

Académie de Nice

L'épreuve se déroule en deux parties indépendantes et indissociables de deux heures chacune, **les énoncés des deux parties sont donc séparés et distribués séparément à des moments différents**. Les copies rédigées sont ramassées à l'issue de la première partie (« exercices nationaux »). Une pause de cinq à quinze minutes est prévue, avant la seconde partie (« exercices académiques »). Des consignes de confinement peuvent être données selon la zone géographique de passation de l'épreuve.

L'usage de calculatrice avec mode examen actif est autorisé. L'usage de calculatrice sans mémoire, « type collège » est autorisé.

Il est conseillé aux candidats qui ne pourraient formuler une réponse complète à une question d'exposer le bilan des initiatives qu'ils ont pu prendre.

Les énoncés doivent être rendus au moment de quitter définitivement la salle de composition.

Exercices académiques

Résolution individuelle

Les candidats traitent les **deux exercices.**

Exercice académique numéro 1

Les nombres heureux

On considère un entier naturel N et on note $S(N)$ la somme des carrés des chiffres de N.
Par exemple, $S(15) = 1^2 + 5^2 = 26$.

On définit ensuite la suite $\left(S_n(N)\right)$ pour tout entier naturel $n \geq 1$, par $\begin{cases} S_1(N) = S(N) \\ S_{n+1}(N) = S\left(S_n(N)\right) \text{ pour } n \geq 1 \end{cases}$.

On dit que le nombre *N* est heureux s'il existe un entier $n \geq 1$ tel que $S_n(\mathrm{N}) = 1$.

Partie A : Quelques calculs autour des nombres heureux

1. **a.** Calculer $S_1(4)$, puis vérifier que $S_2(4) = 37$.

b. Calculer $S_n(4)$ pour tout entier n compris entre *3* et *8*. Le nombre *4* est-il un nombre heureux ? Justifier.

2. Justifier que *7* est un nombre heureux.

3. **a.** Quelle est la valeur de $S_n(1)$ pour tout entier naturel $n \geq 1$?

b. Démontrer que toutes les puissances de *10* sont des nombres heureux.

Partie B : Quelques propriétés des nombres heureux

Les questions 1, 2, 3 et 4 sont indépendantes

1. **a.** On admet que le nombre *319* est heureux. Le nombre *931* est-il heureux ? Justifier.

b. Démontrer que si un nombre est heureux alors, tout nombre constitué des mêmes chiffres, à permutation près, est également heureux.

2. Démontrer que si N est un nombre heureux, alors, pour tout entier naturel $n \geq 1$, $S_n(N)$ est un nombre heureux.

3. On suppose que N est un entier inférieur ou égal à *99*.

a. Justifier que pour tout $n \geq 1$, $S_n(N) \leq 162$.

b. Soit M un entier naturel non nul. Compléter le programme en langage naturel ci-dessous afin qu'il donne, pour un nombre N donné inférieur ou égal à 99, la liste des nombres $S_n(N)$ pour n entier, $1 \leq n \leq M$.

On recopiera, sur la copie, uniquement les deux lignes à compléter.

```
N donné
L ← liste vide
Pour n allant de ……… à ……….,
    a ← quotient de la division euclidienne de N par 100.
    b ← quotient de la division euclidienne de (N – 100a) par 10.
    c ← ……………………………………………….
    N ← a²+b²+c²
    Mettre N à la fin de la liste L
Afficher L
```

c. On fait tourner l'algorithme avec $M = 4$ et $N = 87$. Donner l'affichage obtenu.

4. On appelle point fixe de S un entier N tel que $S(N) = N$.

Le but de cette question est de démontrer que 0 et 1 sont les seuls entiers inférieurs ou égaux à 99, points fixes de S.

Notons a le chiffre des dizaines de l'entier N et b son chiffre des unités.

On peut ainsi écrire : $N = 10a + b$, avec a et b entiers naturels compris entre 0 et 9.

a. Démontrer que $S(N) = N$ si et seulement si $(2a - 10)^2 + (2b - 1)^2 = 101$.

b. On admet qu'il existe deux entiers relatifs x et y tels que $x^2 + y^2 = 101$. Justifier que l'on a nécessairement $|x| \leq 10$ et $|y| \leq 10$.

c. En déduire que $b \leq 5$.

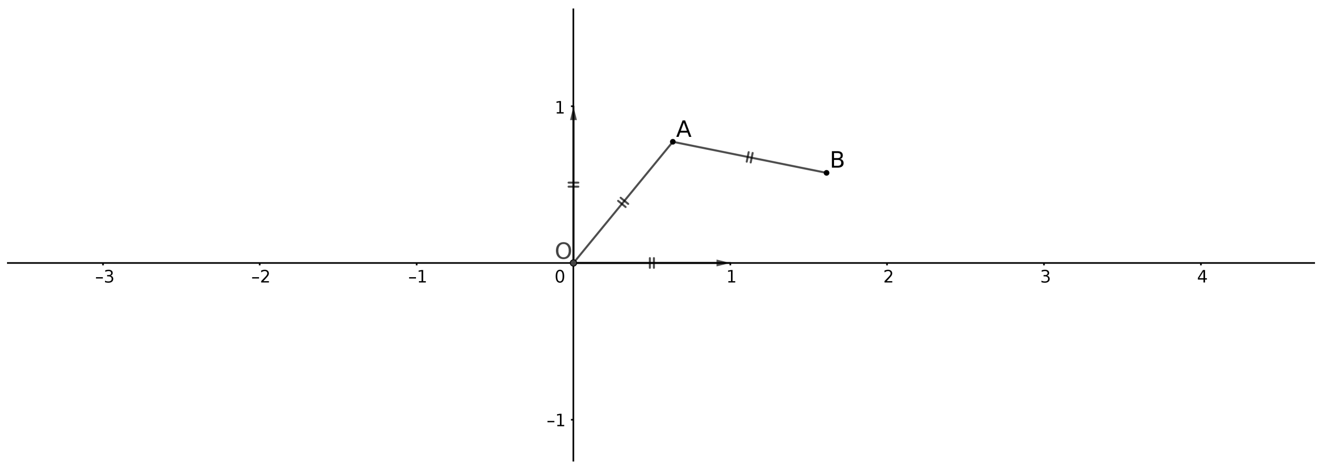
d. Conclure.

Exercice académique numéro 2

Des allumettes à la chaîne

On dispose d'une boîte d'allumettes mesurant toutes une unité de longueur. On se place dans le plan muni d'un repère orthonormé et d'origine *O* de coordonnées *(0 ; 0)*. On trace une chaîne avec les allumettes en partant du point *O*. Chaque allumette commence là où la précédente termine... jusqu'à l'extrémité libre de la dernière allumette, que l'on appelle l'arrivée du chemin.

Dans l'exemple ci-dessous, on a deux allumettes, *[OA]* et *[AB]*, et le point *B* est l'arrivée.
Le but de cet exercice est de montrer que l'on peut atteindre n'importe quel point du plan, quitte à utiliser suffisamment d'allumettes.



Dans un premier temps, on cherche à montrer que l'on peut atteindre tout point de l'axe des abscisses.

1. Tracer, sur l'annexe, un chemin qui permette d'atteindre le point de coordonnées (2 ; 0).

2. En déduire une méthode pour atteindre les points de coordonnées $(n; 0)$ avec n entier naturel.

3. Soit x un réel. Supposons atteint le point de coordonnées $(x; 0)$.

- **a.** Expliquer comment atteindre le point de coordonnées $(x + 1; 0)$.
- **b.** Expliquer de même comment atteindre le point de coordonnées $(x - 1; 0)$.

4. Soit x un réel dans l'intervalle $[-2; 2]$. Expliquer comment atteindre le point de coordonnées $(x; 0)$ avec une chaîne de 2 allumettes. On pourra s'appuyer sur un schéma.

5. En déduire que l'on peut atteindre tous les points de l'axe des abscisses.

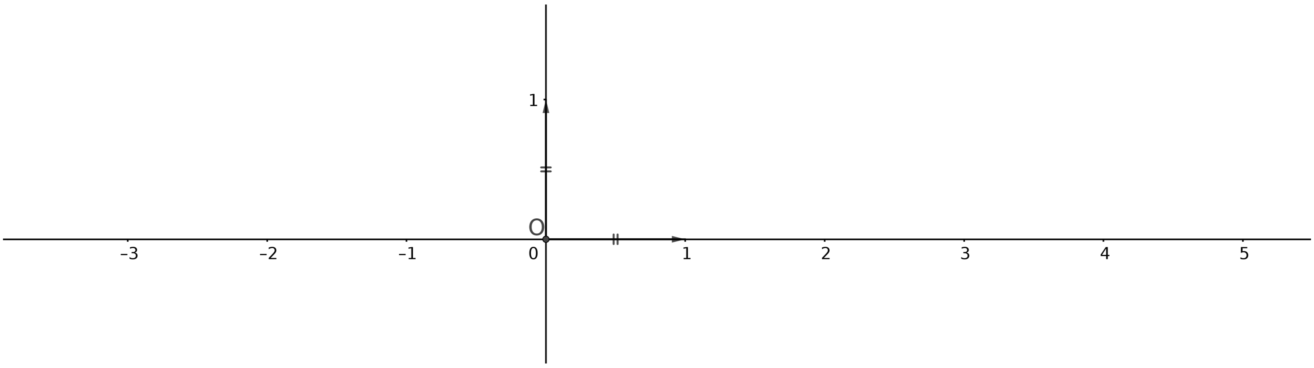
6. Expliquer comment atteindre chaque point du plan.

7. On s'intéresse maintenant au nombre minimal d'allumettes nécessaires pour atteindre un point donné.

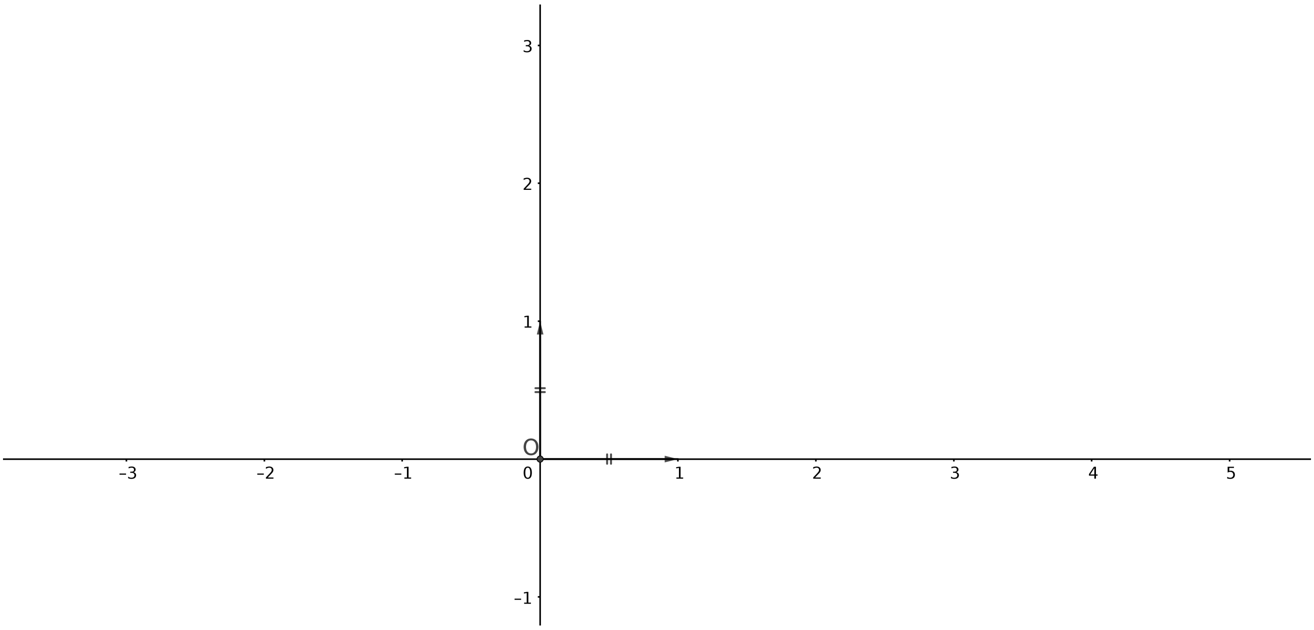
- **a.** Tracer, sur l'annexe, un chemin de longueur minimale, pour atteindre le point de coordonnées $(3; 3)$.
- **b.** Même question pour le point de coordonnées $(4; 3)$.
- **c.** Soit x un réel. Déterminer le nombre minimal d'allumettes pour atteindre le point de coordonnées $(x; 0)$ en fonction de x.
- **d.** Soient x et y deux réels. Déterminer le nombre minimal d'allumettes pour atteindre le point de coordonnées $(x; y)$ en fonction de x et y.

Annexe de l'exercice académique numéro 2.

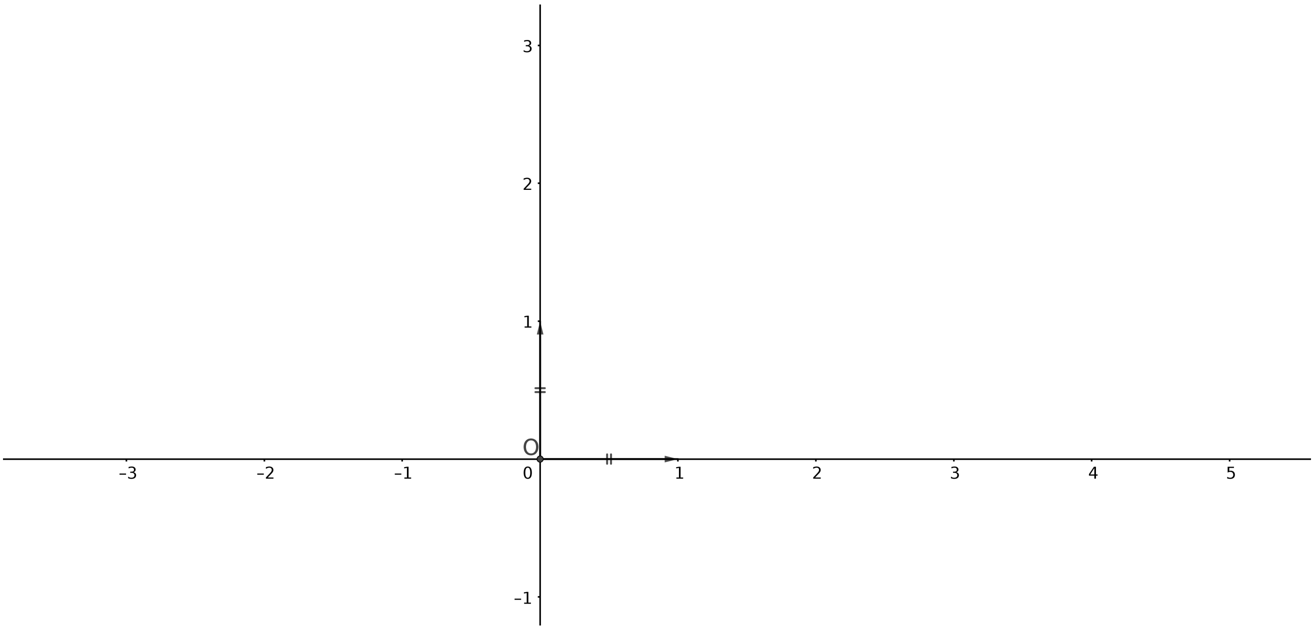
Question 1



Question 7 a.



Question 7 b.



OLYMPIADES MATHÉMATIQUES
LYCÉE, PREMIÈRE

CORRECTION !

Épreuve ▪ 2020

Exercice académique numéro 1 : *Les nombres heureux*

On considère un entier naturel N et on note $S(N)$ la somme des carrés des chiffres de N.
Par exemple, $S(15) = 1^2 + 5^2 = 26$.

On définit ensuite la suite $\left(S_n(N)\right)$ pour tout entier naturel $n \geq 1$, par $\begin{cases} S_1(N) = S(N) \\ S_{n+1}(N) = S\left(S_n(N)\right) \text{ pour } n \geq 1 \end{cases}$.

On dit que le nombre *N* est heureux s'il existe un entier $n \geq 1$ tel que $S_n(\mathrm{N}) = 1$.

Partie A : Quelques calculs autour des nombres heureux

1. **a.** Calculer $S_1(4)$, puis vérifier que $S_2(4) = 37$.

$S_1(4) = S(4) = 4^2 = 16$ et $S_2(4) = S\left(S_1(4)\right) = S(16) = 1^2 + 6^2 = 37$

b. Calculer $S_n(4)$ pour tout entier n compris entre *3* et *8*. Le nombre *4* est-il un nombre heureux ? Justifier.

$$S_3(4) = S\left(S_2(4)\right) = S(37) = 3^2 + 7^2 = 58$$
$$S_4(4) = S\left(S_3(4)\right) = S(58) = 5^2 + 8^2 = 89$$
$$S_5(4) = S\left(S_4(4)\right) = S(89) = 8^2 + 9^2 = 145$$
$$S_6(4) = S\left(S_5(4)\right) = S(145) = 1^2 + 4^2 + 5^2 = 42$$
$$S_7(4) = S\left(S_6(4)\right) = S(42) = 4^2 + 2^2 = 20$$
$$S_8(4) = S\left(S_7(4)\right) = S(20) = 2^2 + 0^2 = 4$$

La suite $(S_n(4))$ est donc une suite 8-périodique qui ne prend pas 1 comme valeur sur ses huit premiers termes.

Par conséquent, aucun de ses termes n'est égal à 1 et 4 n'est pas un nombre heureux.

2. Justifier que *7* est un nombre heureux.

$$S_1(7) = S(7) = 7 = 49$$
$$S_2(7) = S\left(S_1(7)\right) = S(49) = 4^2 + 9^2 = 97$$
$$S_3(7) = S\left(S_2(7)\right) = S(97) = 9^2 + 7^2 = 130$$
$$S_4(7) = S\left(S_3(7)\right) = S(130) = 1^2 + 3^2 + 0^2 = 10$$

$S_5(7) = S\left(S_4(7)\right) = S(10) = 1^2 + 0^2 = 1$: 7 est donc bien un nombre heureux.

3. **a.** Quelle est la valeur de $S_n(1)$ pour tout entier naturel $n \geq 1$?

On remarque que $S_1(1) = 1^2 = 1$ donc appliquer S_1 à 1 ne change pas sa valeur. Par conséquent, pour tout entier naturel *n* non nul, $S_n(1) = \mathrm{S}_{n-1}\left(S_1(1)\right) = \mathrm{S}_{n-1}(1)$: la suite $\left(\mathrm{S}_n(1)\right)$ est une suite constante.

On en déduit que pour tout entier naturel *n ≥ 1*, $\mathrm{S}_n(1) = 1$.

b. Démontrer que toutes les puissances de *10* sont des nombres heureux.

Soit *k* un entier naturel, $S_1\left(10^k\right) = 1^2 = 1$ donc toute puissance de 10 est un nombre heureux.

Partie B : Quelques propriétés des nombres heureux

Les questions 1, 2, 3 et 4 sont indépendantes

1. **a.** On admet que le nombre *319* est heureux. Le nombre *931* est-il heureux ? Justifier.

Comme $S_1(319) = 3^2 + 1^2 + 9^2 = 9^2 + 3^2 + 1^2 = S_1(931)$, on en déduit que pour tout entier naturel *n* supérieur à 2 on a $S_n(319) = S_{n-1}(S_1(319)) = S_{n-1}(S_1(931)) = S_n(931)$.

Comme 319 est un nombre heureux, il existe un entier naturel *n ≥ 1* tel que $S_n(319) = 1$.

Par conséquent, $S_n(931) = 1$ et 931 est aussi un nombre heureux.

b. Démontrer que si un nombre est heureux alors, tout nombre constitué des mêmes chiffres, à permutation près, est également heureux.

On reprend le raisonnement précédent en remarquant que l'image de ces deux nombres par S_1 est le même car ils sont composés des mêmes chiffres.

2. Démontrer que si N est un nombre heureux, alors, pour tout entier naturel $n \geq 1$, $S_n(N)$ est un nombre heureux.

Si *N* est un nombre heureux, alors il existe un nombre entier *m* non nul tel que $S_m(N) = 1$.

Par conséquent, si *n < m*, $S_{m-n}(S_n(N)) = S_m(N) = 1$ et donc $S_n(N)$ est un nombre heureux.

Si *n > m*, alors $S_n(N) = S_{n-m}(S_m(N)) = S_{n-m}(1) = 1$ et on aboutit à la même conclusion.

Si *n = m*, alors $S_n(N) = 1$

3. On suppose que N est un entier inférieur ou égal à *99*.

a. Justifier que pour tout $n \geq 1$, $S_n(N) \leq 162$.

On peut écrire $N = \overline{ab}$ avec *a* et *b* entiers naturels inférieurs à 9.

Alors $S(N) = a^2 + b^2$ et $S(N) \leqslant 9^2 + 9^2$, donc $S(N) \leqslant 162$.

Soit M un entier supérieur à 100 et inférieur à 162.

Alors, on peut écrire $M = \overline{cde}$ avec *c*, *d* et *e* entiers naturels avec $c = 1$, $d \leq 6$ et $e \leq 9$.

Alors $S(M) = c^2 + d^2 + e^2$ et $S(M) \leqslant 1^2 + 6^2 + 9^2$, donc $S(M) \leq 118 \leq 162$.

On en déduit que pour tout entier naturel $n \geq 1$, $S_n(N) \leq 162$.

b. Soit M un entier naturel non nul. Compléter le programme en langage naturel ci-dessous afin qu'il donne, pour un nombre N donné inférieur ou égal à 99, la liste des nombres $S_n(N)$ pour n entier, $1 \leq n \leq M$. On recopiera, sur la copie, uniquement les deux lignes à compléter.

Pour n allant de 1 à M,

c ← N-100a-10b

c. On fait tourner l'algorithme avec $M = 4$ et $N = 87$. Donner l'affichage obtenu.

L = {113 ; 11 ; 2 ; 4}

4. On appelle point fixe de S un entier N tel que $S(N) = N$.

Le but de cette question est de démontrer que 0 et 1 sont les seuls entiers inférieurs ou égaux à 99, points fixes de S.

Notons a le chiffre des dizaines de l'entier N et b son chiffre des unités.

On peut ainsi écrire : $N = 10a + b$, avec a et b entiers naturels compris entre 0 et 9.

a. Démontrer que $S(N) = N$ si et seulement si $(2a - 10)^2 + (2b - 1)^2 = 101$.

$S(N) = N \Leftrightarrow a^2 + b^2 = 10a + b$

$\Leftrightarrow a^2 - 10a + b^2 - b = 0$

$\Leftrightarrow 4a^2 - 40a + 4b^2 - 4b = 0$

$\Leftrightarrow (2a - 10)^2 - 100 + (2b - 1)^2 - 1 = 0$

$\Leftrightarrow (2a - 10)^2 + (2b - 1)^2 = 101$

b. On admet qu'il existe deux entiers relatifs x et y tels que $x^2 + y^2 = 101$. Justifier que l'on a nécessairement $|x| \leq 10$ et $|y| \leq 10$.

$x^2 \leq x^2 + y^2$ et $y^2 \leq x^2 + y^2$

Donc si $x^2 + y^2 = 101$, alors $x^2 \leq 101$ et $y^2 \leq 101$

alors $-\sqrt{101} \leq x \leq \sqrt{101}$ et $-\sqrt{101} \leq y \leq \sqrt{101}$

Or x et y sont des entiers relatifs, donc $-10 \leq x \leq 10$ et $-10 \leq y \leq 10$

On en déduit que si $x^2 + y^2 = 101$, alors $|x| \leq 10$ et $|y| \leq 10$

c. En déduire que $b \leq 5$.

D'après les questions précédentes, on a $|2b - 1| \leq 10$, soit $-10 \leq 2b - 1 \leq 10$

On en déduit $-4.5 \leq b \leq 5.5$

Or b est un entier naturel, donc $0 \leq b \leq 5$

d. Conclure.

Si $b = 0$, alors $(2a - 10)^2 = 101 - (2 \times 0 - 1)^2 = 100$. Donc $|2a - 10| = 10$ et donc a = 0.

Si $b = 1$, alors de même $|2a - 10| = 10$ et donc a = 0.

Si $b = 2$, alors $(2a - 10)^2 = 101 - (2 \times 2 - 1)^2 = 92$ qui n'est pas un carré, donc aucun nombre ne convient.

Si $b = 3$, alors $(2a - 10)^2 = 101 - (2 \times 3 - 1)^2 = 76$ qui n'est pas un carré.

Si $b = 4$, alors $(2a - 10)^2 = 101 - (2 \times 4 - 1)^2 = 52$ qui n'est pas un carré.

Si $b = 5$, alors $(2a - 10)^2 = 101 - (2 \times 5 - 1)^2 = 20$ qui n'est pas un carré.

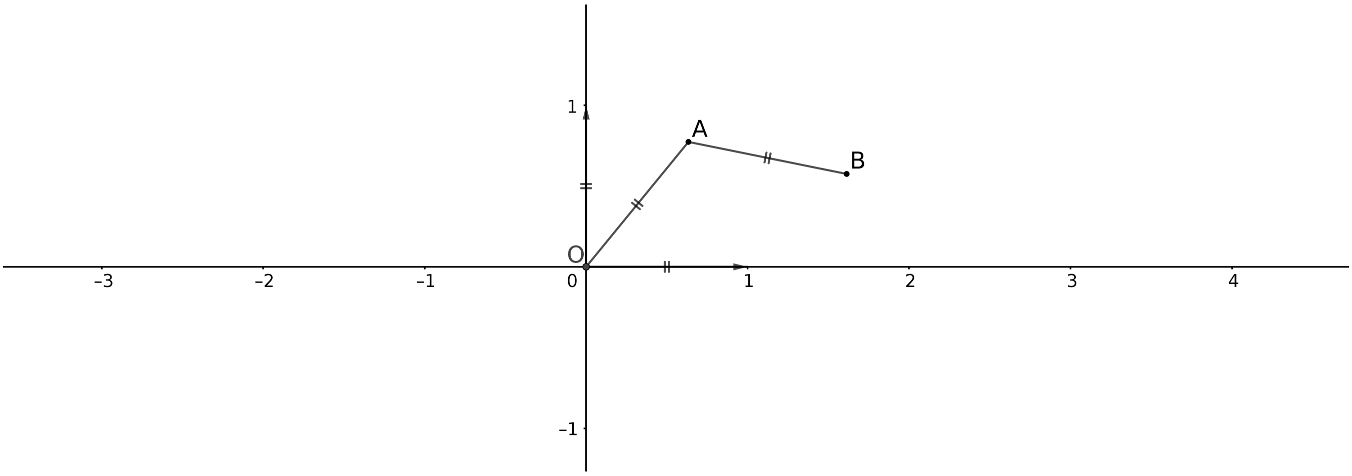
Donc les seules possibilités sont *N = 0* et *N = 1*.

Exercice académique numéro 2

Des allumettes à la chaîne

On dispose d'une boîte d'allumettes mesurant toutes une unité de longueur. On se place dans le plan muni d'un repère orthonormé et d'origine *O* de coordonnées *(0 ; 0)*. On trace une chaîne avec les allumettes en partant du point *O*. Chaque allumette commence là où la précédente termine... jusqu'à l'extrémité libre de la dernière allumette, que l'on appelle l'arrivée du chemin.

Dans l'exemple ci-dessous, on a deux allumettes, *[OA]* et *[AB]*, et le point *B* est l'arrivée.
Le but de cet exercice est de montrer que l'on peut atteindre n'importe quel point du plan, quitte à utiliser suffisamment d'allumettes.



Dans un premier temps, on cherche à montrer que l'on peut atteindre tout point de l'axe des abscisses.

1. Tracer, sur l'annexe, un chemin qui permette d'atteindre le point de coordonnées (2 ; 0).

2. En déduire une méthode pour atteindre les points de coordonnées $(n;0)$ avec *n* entier naturel.

Si n = 0, aucune allumette n'est nécessaire.
Sinon, on aligne *n* allumettes à la suite, aux points de coordonnées $A_k=(k;0)$ avec $1\leq k\leq n$.

3. Soit x un réel. Supposons atteint le point de coordonnées $(x;0)$.

a. Expliquer comment atteindre le point de coordonnées $(x+1;0)$.

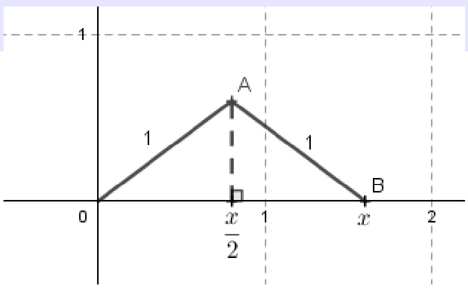
Si on a atteint le point de coordonnées $(x;0)$, on rajoute une allumette joignant les points de coordonnées $(x;0)$ et $(x+1;0)$. La distance entre ces deux points est bien égale à $(x+1)-x=1$.

b. Expliquer de même comment atteindre le point de coordonnées $(x-1;0)$.

Si on a atteint le point de coordonnées $(x;0)$, on rajoute une allumette joignant les points de coordonnées $(x;0)$ et $(x-1;0)$. La distance entre ces deux points est bien égale à $x-(x-1)=1$.

4. Soit x un réel dans l'intervalle $[-2;2]$. Expliquer comment atteindre le point de coordonnées $(x;0)$ avec une chaîne de 2 allumettes. On pourra s'appuyer sur un schéma.

On définit les points $A\left(\frac{x}{2};\sqrt{1-\frac{x^2}{4}}\right)$ et $B(x;0)$.



On place les deux allumettes, une de *O* à *A* et une de *A* à *B* . Comme x est un réel dans l'intervalle $[-2;2]$, on vérifie que $1-\frac{x^2}{4}\geq 1-\frac{4}{4}\geq 0$ donc l'ordonnée du point *A* est bien définie.
Il reste à prouver que *OA = AB = 1*.
D'une part, $OA^2=\left(\frac{x}{2}-0\right)^2+\left(\sqrt{1-\frac{x^2}{4}}-0\right)^2=\frac{x^2}{4}+1-\frac{x^2}{4}=1.$
D'autre part, $AB^2=\left(x-\frac{x}{2}\right)^2+\left(0-\sqrt{1-\frac{x^2}{4}}\right)^2=\frac{x^2}{4}+1-\frac{x^2}{4}=1.$
On a bien *OA = AB = 1*.

5. En déduire que l'on peut atteindre tous les points de l'axe des abscisses.

Soit *(y ; 0)* les coordonnées d'un point de l'axe des abscisses.

Si $-2\leq y\leq 2$, d'après la question 4, on peut faire un chemin de O à ce point en utilisant deux allumettes.

Sinon, il existe un entier relatif *n* tel que $|y-n|\leq 2$. D'après la question 4, on peut atteindre le point de coordonnées $(y-n;0)$ avec deux allumettes. Ensuite, comme dans la question 3, en rajoutant $|n|$ allumettes, on peut aller du point de coordonnées $(y-n;0)$ à celui de coordonnées $(y-n+n;0)=(y;0)$.
On peut donc bien atteindre tous les points de l'axe des abscisses.

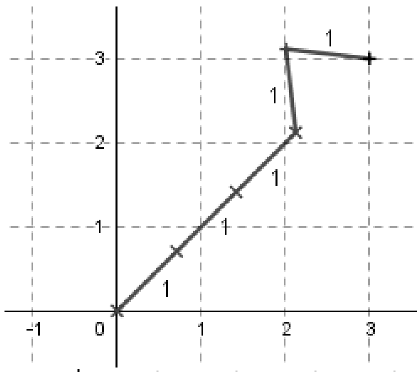
6. Expliquer comment atteindre chaque point du plan.

Soit $(x;y)$ les coordonnées d'un point du plan. On note $r=\sqrt{x^2+y^2}$. On peut, d'après la question précédente, atteindre le point de coordonnées $(r;0)$ à partir du point *O* . Maintenant, si on tourne ce chemin autour de *O*, on peut atteindre tous les points qui sont sur le cercle de centre *O* et de rayon *r* , en particulier le point de coordonnées $(x;y)$.

7. On s'intéresse maintenant au nombre minimal d'allumettes nécessaires pour atteindre un point donné.

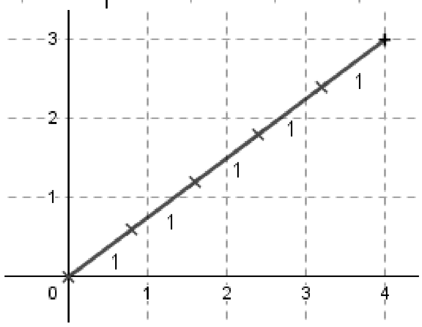
a. Tracer, sur l'annexe, un chemin de longueur minimale, pour atteindre le point de coordonnées $(3;3)$.

On attend un chemin de longueur 5.



b. Même question pour le point de coordonnées $(4;3)$.

On attend un chemin de longueur 5.



c. Soit x un réel. Déterminer le nombre minimal d'allumettes pour atteindre le point de coordonnées $(x\,;0)$ en fonction de x.

Si x est un nombre relatif :

Il suffit de $|x|$ allumettes pour atteindre le point de coordonnées $(x\,;0)$.
Comme une allumette est de longueur 1, alors il n'est pas possible d'atteindre ce point avec moins de $|x|$ allumettes .

Si x n'est pas un entier relatif :

- Si 0<x<1 ou -1<x<0 : il suffit de deux allumettes (cf question 4) ;
- si x > 1 ou x< - 1 : il suffit de $|e(x)|+1$ allumettes, où *e*(x) est la partie avant la virgule de x.
  En effet, d'après la question 4, on peut utiliser deux allumettes pour atteindre le point de coordonnées $\left(x-\left(|e(x)|-1\right);0\right)$ car | $x-\left(|e(x)|-1\right)$ | < 2.
  On en utilise $|e(x)|-1$ de plus pour atteindre le point de coordonnées $(x\,;0)$.

d. Soient x et y deux réels. Déterminer le nombre minimal d'allumettes pour atteindre le point de coordonnées $(x\,;y)$ en fonction de x et y.

D'après la question 6, il suffit d'autant d'allumettes pour atteindre ce point que pour atteindre celui de coordonnées $\left(\sqrt{x^2+y^2};0\right)$. D'après la question précédente, si $\sqrt{x^2+y^2}$ est un nombre entier alors il faut $\sqrt{x^2+y^2}$ allumettes. Dans le cas contraire, il faut $E\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)+1$ allumettes.

Olympiades nationales de mathématiques 2020
Voie générale

Académie de Nice

L'épreuve se déroule en deux parties indépendantes et indissociables de deux heures chacune, **les énoncés des deux parties sont donc séparés et distribués séparément à des moments différents**. Les copies rédigées sont ramassées à l'issue de la première partie (« exercices nationaux »). Une pause de cinq à quinze minutes est prévue, avant la seconde partie (« exercices académiques »). Des consignes de confinement peuvent être données selon la zone géographique de passation de l'épreuve.

L'usage de calculatrice avec mode examen actif est autorisé.

L'usage de calculatrice sans mémoire, « type collège » est autorisé.

Il est conseillé aux candidats qui ne pourraient formuler une réponse complète à une question d'exposer le bilan des initiatives qu'ils ont pu prendre.

Les énoncés doivent être rendus au moment de quitter définitivement la salle de composition.

Exercices académiques

Résolution en équipe

Les candidats traitent **les deux exercices.**

Exercice académique numéro 1

Nombres similaires

On dit que deux nombres entiers non nuls sont similaires si on peut réorganiser les chiffres de l'un pour obtenir l'autre. On ne peut pas mettre de zéro en première position : *01* est le nombre *1*. Par exemple, les nombres *17* et *71* sont similaires, les nombres *584*, *485* et *548* sont similaires, et *10* et *1* ne sont pas similaires. Deux nombres similaires ont donc le même nombre de chiffres.
Soit n un entier naturel non nul. On range les nombres entre *1* et n dans des boîtes, en regroupant les nombres similaires dans une même boîte. On cherche à savoir combien de boîtes sont nécessaires pour faire cela. On note ce nombre de boîtes $f(n)$.

Partie 1

1. Pour tout n compris entre *1* et *9*, déterminer $f(n)$.

2. Donner l'exemple d'une boîte contenant exactement deux nombres similaires.

3. On cherche à calculer *f(99)*. Dans cette question, on considère les nombres entiers à deux chiffres.

a. Si un nombre entier à deux chiffres comporte un zéro, peut-il être similaire à un autre nombre ? Combien de nombres à deux chiffres possèdent un zéro ?

b. Les nombres s'écrivant avec 2 chiffres identiques non nuls sont-ils similaires à d'autres nombres ?

c. Si un nombre s'écrit avec deux chiffres différents non nuls, à combien d'autres nombres est-il similaire ? Combien de boîtes sont-elles nécessaires pour ranger tous les nombres avec deux chiffres différents non nuls ?

4. En déduire que *f(99)=63*.

Partie 2

On pourra réutiliser dans cette partie les résultats de la partie 1 sans démonstration.
Le but de cette partie est de calculer *f(999)*.
On admet que l'on peut regrouper les nombres entre *1* et *999* en *4* catégories :
A : Les nombres qui sont inférieurs ou égaux à 99.
B : Les nombres qui ont trois chiffres et dont au moins un est un zéro.
C : Les nombres qui ont trois chiffres non nuls, et au moins deux chiffres identiques.
D : Les nombres qui ont trois chiffres non nuls, et dont les chiffres sont tous différents.

1. Expliquer pourquoi, si deux nombres appartiennent à des catégories différentes, ils ne peuvent pas être similaires.

2. Montrer qu'il faut 54 boîtes pour ranger les nombres de la catégorie B.

3. Montrer qu'il faut 33 boîtes pour ranger les nombres de la catégorie C.

4. Déterminer le nombre de boîtes nécessaires pour ranger les nombres de la catégorie D.

5. En déduire la valeur de *f(999).*

Exercice académique numéro 2

Le cavalier errant

On considère un tableau de nombres placés en diagonale dans des cases comme suit :

1	2	4	7	11	16	22	…	…
3	5	8	12	17	23	…		
6	9	13	18	24	…			
10	14	19	25	…				
15	20	26	…					
21	27	…						
28	…							
…								
…								

Un cavalier se déplace sur ces cases. Il peut se déplacer sur les huit cases de A à H comme suit (on a représenté le cavalier par ♞) :

	A		B	
C				D
		♞		
E				F
	G		H	

Schéma des 8 positions

Le cavalier débute sur la case contenant le nombre 1. Parmi les cases qu'il peut atteindre, il va sur celle qui a le plus petit nombre, et qu'il n'a pas encore visitée. Par exemple, pour son premier mouvement, il peut atteindre les cases contenant les nombres 8 et 9, il va donc sur la case contenant 8. Son deuxième mouvement l'amène sur la case contenant le nombre 6.

Si toutes les cases qu'il peut atteindre ont déjà été visitées, il est bloqué.

1. Donner dans l'ordre les nombres des dix premières cases visitées par le cavalier. Aucune justification n'est demandée.

On nomme, comme dans le *Schéma des 8 positions* ci-dessus, les cases A à H qui sont accessibles pour le cavalier.

2. **a.** Des cases A et C, laquelle contient le plus petit nombre ? Justifier.

b. Même question pour les cases A et B. Justifier.

c. Plus généralement, classer les cases de A à H par ordre croissant du nombre qu'elle contient. La justification n'est pas attendue.

On repère les cases du tableau grâce au couple *(ℓ; c)*, *ℓ* étant le numéro de la ligne et *c* celui de la colonne. La case en haut à gauche est la case (1;1).

					colonne c ▼		
	(1;1)	(1;2)	(1;3)	(1;4)	(1;5)	(1;6)	..
	(2;1)	(2;2)	(2;3)	(2;4)	(2;5)	…	..
	(3;1)	(3;2)	(3;3)	(3;4)	…	…	..
	(4;1)	(4;2)	(4;3)	…	…	…	..
	(5;1)	(5;2)	…	…	…	…	..
ligne l ►	…	…	…	…	(l;c)	…	..
	…	…	…	…	…	…	..

3. On suppose dans cette question qu'aucune des 8 positions, que le cavalier peut atteindre, n'a été atteinte auparavant.

a. Si on note *(ℓ; c)* la case sur laquelle le cavalier se trouve, par quels couples, en fonction de *ℓ* et de *c*, note-t-on les cases A à H du *Schéma des 8 positions*?

b. À partir de quel numéro de ligne et quel numéro de colonne, le cavalier doit-il se trouver pour qu'aucune des huit positions ne sorte du tableau ?

c. Si le cavalier se trouve sur la première ligne, parmi les cases A à H, laquelle contient le plus petit nombre ? Distinguer les cas des colonnes 1, 2 et suivantes.

d. Même question si le cavalier se trouve sur la deuxième ligne.

e. Si le cavalier se trouve sur la première colonne, parmi les cases A à H, laquelle contient le plus petit nombre ? Distinguer les cas des lignes 1, 2 et suivantes.

f. Même question si le cavalier se trouve sur la deuxième colonne.

4. On se propose d'écrire un algorithme permettant de construire la liste des nombres successivement rencontrés lors du parcours du cavalier. Pour cela on dispose d'une boucle et de cinq procédures :

P1 : Élimination des nombres déjà visités d'une liste donnée.

P2 : Positionnement sur la case choisie par la procédure précédente.

P3 : Recherche du minimum d'une liste non vide de nombres, et arrêt si liste vide.

P4 : Positionnement sur la case contenant le nombre 1.

P5 : Liste des nombres contenus dans les cases accessibles.

Donner, dans l'ordre de leur exécution, les procédures permettant de construire le parcours du cavalier en entourant par un couple de parenthèses le groupe des procédures qui s'effectueront en boucle.

5. Pour n entier naturel, on note $T(n)$ le n-ième nombre triangulaire. On admet que $T(n) = \frac{1}{2}n(n+1)$.

On admet que le nombre *u* situé à la ligne numéro $\boldsymbol{\ell}$ et la colonne numéro $\boldsymbol{c}$ est donné par la formule :

$$u = \boldsymbol{\ell} + T(\boldsymbol{c} + \boldsymbol{\ell} - 2).$$

a. Vérifier que la formule donne bien le nombre 1 contenu dans la case (1 ; 1).

b. On suppose dans cette question que $\boldsymbol{c} \geq 2$. On se place dans la case contenant le nombre *u* à la ligne numéro $\boldsymbol{\ell}$ et à la colonne numéro $\boldsymbol{c}$. On se déplace d'une seule case vers le bas puis d'une seule case vers la gauche.

c. Vérifier à l'aide de la formule que le nombre contenu dans la case d'arrivée est le nombre $u + 1$.

d. On suppose dans cette question que $\boldsymbol{c} = 1$. À l'aide de la formule, donner en fonction de *u* le numéro de la colonne où se trouve le nombre $u + 1$, situé alors sur la ligne 1.

e. En exécutant l'algorithme de la question 4, le cavalier se trouve bloqué à la ligne 52 et la colonne 1. Sur quel nombre s'arrête-t-il ? Justifier.

www.freemaths.fr

OLYMPIADES MATHÉMATIQUES
LYCÉE, PREMIÈRE

CORRECTION !

Épreuve ▪ 2020

Correction de l'exercice académique numéro 1

Nombres similaires

On dit que deux nombres entiers non nuls sont similaires si on peut réorganiser les chiffres de l'un pour obtenir l'autre. On ne peut pas mettre de zéro en première position : *01* est le nombre *1*. Par exemple, les nombres *17* et *71* sont similaires, les nombres *584*, *485* et *548* sont similaires, et *10* et *1* ne sont pas similaires. Deux nombres similaires ont donc le même nombre de chiffres.

Soit n un entier naturel non nul. On range les nombres entre *1* et n dans des boîtes, en regroupant les nombres similaires dans une même boîte. On cherche à savoir combien de boîtes sont nécessaires pour faire cela. On note ce nombre de boîtes $f(n)$.

Partie 1

1. Pour tout n compris entre *1* et *9*, déterminer $f(n)$.

Pour tout n compris entre *1* et *9*, $f(n) = n$ car tous les nombres compris entre 1 et n s'écrivent avec un chiffre différent.

2. Donner l'exemple d'une boîte contenant exactement deux nombres similaires.

La boîte contenant le nombre 12 contient exactement deux nombres similaires : 12 et 21.

3. On cherche à calculer *f(99)*. Dans cette question, on considère les nombres entiers à deux chiffres.

a. Si un nombre entier à deux chiffres comporte un zéro, peut-il être similaire à un autre nombre ? Combien de nombres à deux chiffres possèdent un zéro ?

Non, car on ne peut pas changer l'ordre des chiffres sans mettre le zéro en première position, ce qui est interdit. Les nombres à deux chiffres avec un zéro sont 10, 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80, 90, il y en a donc 9.

b. Les nombres s'écrivant avec 2 chiffres identiques non nuls sont-ils similaires à d'autres nombres ?

Il s'agit des nombres 11, 22, 33, 44, 55, 66, 77, 88, 99. Si l'on change l'ordre de leurs chiffres, ils sont égaux seulement à eux-mêmes. Ils ne peuvent donc pas être similaires à d'autres nombres.

c. Si un nombre s'écrit avec deux chiffres différents non nuls, à combien d'autres nombres est-il similaire ? Combien de boîtes sont-elles nécessaires pour ranger tous les nombres avec deux chiffres différents non nuls ?

Si a et b sont deux chiffres distincts non nuls, alors les nombres s'écrivant ab et ba sont similaires. Les nombres qui s'écrivent sous la forme ab avec a et b deux chiffres différents sont au nombre de 72. On a en effet 9 choix pour a, et 8 choix pour b (qui ne peut juste pas être égal à a), et 9*8=72. Ce qui fait un total de 36 paires de nombres similaires.

4. En déduire que *f(99)=63*.

On compte 9 nombres inférieurs à 9, 9 nombres à deux chiffres avec un zéro, et 9 nombres dont les deux chiffres sont identiques. À ces nombres, on rajoute les 36 de la forme ab avec a et b distincts non zéros. Finalement, 63 boîtes sont nécessaires pour classer les nombres compris entre 1 et 99. Ainsi *f(99)=63*.

Partie 2

On pourra réutiliser dans cette partie les résultats de la partie 1 sans démonstration.
Le but de cette partie est de calculer *f(999)*.
On admet que l'on peut regrouper les nombres entre *1* et *999* en *4* catégories :
A : Les nombres qui sont inférieurs ou égaux à 99.
B : Les nombres qui ont trois chiffres et dont au moins un est un zéro.
C : Les nombres qui ont trois chiffres non nuls, et au moins deux chiffres identiques.
D : Les nombres qui ont trois chiffres non nuls, et dont les chiffres sont tous différents.

1. Expliquer pourquoi, si deux nombres appartiennent à des catégories différentes, ils ne peuvent pas être similaires.

On va pour cela montrer que si un nombre est dans une catégorie, tous les nombres qui lui sont similaires sont dans la même catégorie.
Pour la catégorie A : les nombres ont un ou deux chiffres. En changeant leur ordre, on ne change pas le nombre de chiffres, et on reste donc dans cette catégorie.
Pour la catégorie B : changer l'ordre des chiffres ne change pas la valeur des chiffres, et donc un nombre similaire a un nombre de la catégorie B a aussi un zéro, et est donc dans cette catégorie.
Pour la catégorie C : changer l'ordre des chiffres ne change pas le nombre de chiffres qui sont égaux entre eux.
Pour la catégorie D : le même raisonnement marche.

2. Montrer qu'il faut 54 boîtes pour ranger les nombres de la catégorie B.

Les nombres qui ont deux zéros sont 100, 200, 300, 400, 500, 600, 700, 800, 900. Ils ne sont similaires à aucun autre nombre, sinon il y aurait un 0 en première position. Donc 9 boîtes sont nécessaires pour ranger ces nombres de la catégorie B. Ceux qui ont un zéro sont de la forme a0b ou ab0, avec a et b non nuls. On remarque que a0b et b0a sont similaires. Il faut donc compter uniquement ceux de la forme ab0. En distinguant le cas a = b ou a ≠ b, le nombre de boîtes nécessaires pour ranger ces nombres de la catégorie B est 9 + 36 = 45. Finalement, pour la catégorie B, 54 boîtes sont nécessaires pour ranger tous les nombres.

3. Montrer qu'il faut 33 boîtes pour ranger les nombres de la catégorie C.

Les nombres 111, 222, 333, 444, 555, 666, 777, 888, 999 ne sont similaires à aucun autre : il faut 9 boîtes pour les ranger. Tous les autres nombres de la catégorie C de la forme aab, aba ou baa, avec a et b non nuls, sont similaires. Il faut donc 9 × 8 ÷ 3 = 24 boîtes pour ranger tous ces nombres. Finalement, pour la catégorie C, 9 + 24 = 33 boîtes sont nécessaires pour ranger tous les nombres.

4. Déterminer le nombre de boîtes nécessaires pour ranger les nombres de la catégorie D.

Si a, b et c sont trois chiffres distincts, alors abc, acb, bac, bca, cab et cba sont similaires, et ne sont similaires à aucun autre nombre. Il faut donc les regrouper par 6. Le nombre de boîtes nécessaires pour ranger les nombres de la catégorie D est donc le nombre de nombres dans cette catégorie, divisé par 6. Les nombres de D sont de la forme abc, avec a, b et c non nuls et distincts, il y en a donc 9 × 8 × 7 = 504. Finalement, pour la catégorie D, 504/6=84 boîtes sont nécessaires pour ranger tous les nombres.

5. En déduire la valeur de *f(999).*

Il suffit d'additionner les quantités calculées dans les questions précédentes, ce qui donne 63+54+33+84=234.

Exercice académique numéro 2

Le cavalier errant

On considère un tableau de nombres placés en diagonale dans des cases comme suit :

1	2	4	7	11	16	22	…	…
3	5	8	12	17	23	…		
6	9	13	18	24	…			
10	14	19	25	…				
15	20	26	…					
21	27	…						
28	…							
…								
…								

Un cavalier se déplace sur ces cases. Il peut se déplacer sur les huit cases de A à H comme suit (on a représenté le cavalier par ♞) :

	A		B	
C				D
		♞		
E				F
	G		H	

Schéma des 8 positions

Le cavalier débute sur la case contenant le nombre 1. Parmi les cases qu'il peut atteindre, il va sur celle qui a le plus petit nombre, et qu'il n'a pas encore visitée. Par exemple, pour son premier mouvement, il peut atteindre les cases contenant les nombres 8 et 9, il va donc sur la case contenant 8. Son deuxième mouvement l'amène sur la case contenant le nombre 6.

Si toutes les cases qu'il peut atteindre ont déjà été visitées, il est bloqué.

1. Donner dans l'ordre les nombres des dix premières cases visitées par le cavalier. Aucune justification n'est demandée.

1 → 8 → 6 →2 →12 →9 →4 →3 →13 →7 →5 →10

On nomme, comme dans le *Schéma des 8 positions* ci-dessus, les cases A à H qui sont accessibles pour le cavalier.

2. **a.** Des cases A et C, laquelle contient le plus petit nombre ? Justifier.

L’échiquier étant construit diagonale descendante par diagonale descendante, de la gauche vers la droite, c’est la case A qui a le plus petit numéro car elle se situe le plus en haut à gauche.

b. Même question pour les cases A et B. Justifier.

La case A a le plus petit numéro car elle se situe sur la même ligne que B mais à gauche de B.

c. Plus généralement, classer les cases de A à H par ordre croissant du nombre qu'elle contient. La justification n'est pas attendue.

A < C < B < E < D < G < F < H

On repère les cases du tableau grâce au couple $(\ell;\, c)$, ℓ étant le numéro de la ligne et c celui de la colonne. La case en haut à gauche est la case (1;1).

					colonne c ▼		
	(1;1)	(1;2)	(1;3)	(1;4)	(1;5)	(1;6)	..
	(2;1)	(2;2)	(2;3)	(2;4)	(2;5)	…	..
	(3;1)	(3;2)	(3;3)	(3;4)	…	…	..
	(4;1)	(4;2)	(4;3)	…	…	…	..
	(5;1)	(5;2)	…	…	…	…	..
ligne l ►	…	…	…	…	(l;c)	…	..
	…	…	…	…	…	…	..

3. **On suppose dans cette question qu'aucune des 8 positions, que le cavalier peut atteindre, n'a été atteinte auparavant.**

a. Si on note $(\ell;\, c)$ la case sur laquelle le cavalier se trouve, par quels couples, en fonction de ℓ et de c, note-t-on les cases A à H du *Schéma des 8 positions* ?

A$(\ell - 2 \,;\, c - 1)$ B$(\ell - 2 \,;\, c + 1)$ C$(\ell - 1 \,;\, c - 2)$ D$(\ell - 1 \,;\, c + 2)$

E$(\ell + 1 \,;\, c - 2)$ F$(\ell + 1 \,;\, c + 2)$ G$(\ell + 2 \,;\, c - 1)$ H$(\ell + 1 \,;\, c + 2)$

b. À partir de quel numéro de ligne et quel numéro de colonne, le cavalier doit-il se trouver pour qu'aucune des huit positions ne sorte du tableau ?

On doit avoir $\ell \geq 3$ et $c \geq 3$.

c. Si le cavalier se trouve sur la première ligne, parmi les cases A à H, laquelle contient le plus petit nombre ? Distinguer les cas des colonnes 1, 2 et suivantes.

d. Même question si le cavalier se trouve sur la deuxième ligne.

	Colonne 1	Colonne 2	Colonne 3 et plus
Ligne 1	F	G	E
Ligne 2	D	G	C

e. Si le cavalier se trouve sur la première colonne, parmi les cases A à H, laquelle contient le plus petit nombre ? Distinguer les cas des lignes 1, 2 et suivantes.

f. Même question si le cavalier se trouve sur la deuxième colonne.

	Ligne 1	Ligne 2	Ligne 3 et plus
Colonne 1	F	D	B
Colonne 2	G	D	A

4. On se propose d'écrire un algorithme permettant de construire la liste des nombres successivement rencontrés lors du parcours du cavalier. Pour cela on dispose d'une boucle et de cinq procédures :

P1 : Élimination des nombres déjà visités d'une liste donnée.

P2 : Positionnement sur la case choisie par la procédure précédente.

P3 : Recherche du minimum d'une liste non vide de nombres, et arrêt si liste vide.

P4 : Positionnement sur la case contenant le nombre 1.

P5 : Liste des nombres contenus dans les cases accessibles.

Donner, dans l'ordre de leur exécution, les procédures permettant de construire le parcours du cavalier en entourant par un couple de parenthèses le groupe des procédures qui s'effectueront en boucle.

P4 (P5,P1,P3,P2)

5. Pour n entier naturel, on note $T(n)$ le n-ième nombre triangulaire. On admet que $T(n) = \frac{1}{2}n(n+1)$.

On admet que le nombre *u* situé à la ligne numéro $\boldsymbol{\ell}$ et la colonne numéro ***c*** est donné par la formule :

$$u = \boldsymbol{\ell} + T(\boldsymbol{c} + \boldsymbol{\ell} - 2).$$

a. Vérifier que la formule donne bien le nombre 1 contenu dans la case (1 ; 1).

u = 1 + T(1 + 1 - 2) = 1 + T(0) = 1 + 0 = 1.

b. On suppose dans cette question que $c \geq 2$. On se place dans la case contenant le nombre u à la ligne numéro ℓ et à la colonne numéro c. On se déplace d'une seule case vers le bas puis d'une seule case vers la gauche.

c. Vérifier à l'aide de la formule que le nombre contenu dans la case d'arrivée est le nombre $u + 1$.

$\ell + 1 + T(c - 1 + \ell + 1) = \ell + T(c - \ell - 2) + 1 = u + 1.$

d. On suppose dans cette question que $c = 1$. À l'aide de la formule, donner en fonction de u le numéro de la colonne où se trouve le nombre $u + 1$, situé alors sur la ligne 1.

On doit résoudre $u + 1 = 1 + T(c + 1 - 2) \Leftrightarrow u = T(c - 1) \Leftrightarrow 2u = c(c - 1) \Leftrightarrow c^2 - c - 2u = 0$ de discriminant $1 + 8u > 0$. Cette équation admet deux solutions réelles dont seule la solution positive peut être retenue : $c_+ = \frac{1+\sqrt{1+8u}}{2}$. De plus, comme $c = 1$ et $u = 1 + T(l - 1) = l + \frac{l(l-1)}{2}$, on a $1 + 8u = 1 + 8l + 4l(l - 1) = 1 + 4l + 4l^2 = (2l + 1)^2$ et c_+ est bien un nombre entier.

e. En exécutant l'algorithme de la question 4, le cavalier se trouve bloqué à la ligne 52 et la colonne 1. Sur quel nombre s'arrête-t-il ? Justifier.

$$u = 52 + T(52 + 1 - 2) = 52 + \frac{51 \times 52}{2} = 1378$$

Le cavalier avec Mathematica

In[ ]:=
```
Clear[echiquier, cavapos, cavalist]
```
efface

Les nombres triangulaires :

In[ ]:=
```
t[n_Integer] := n (n + 1) / 2;
```
dans

Construction de l'échiquier (avec bordure de 2 lignes et 2 colonnes d'infinis) :

In[ ]:=
```
echiquier =
  ArrayPad[Table[l + t[c + l - 2], {l, 1, 100}, {c, 1, 100}], {{2, 0}, {2, 0}}, Infinity];
```
garnis tab·· table infini

Échiquier de taille 8 :

In[ ]:=
```
Grid[echiquier[[3 ;; 10, 3 ;; 10]]]
```
grille

Out[ ]=

1	2	4	7	11	16	22	29
3	5	8	12	17	23	30	38
6	9	13	18	24	31	39	48
10	14	19	25	32	40	49	59
15	20	26	33	41	50	60	71
21	27	34	42	51	61	72	84
28	35	43	52	62	73	85	98
36	44	53	63	74	86	99	113

Fonction donnant les huit positions autour du cavalier, et donnant le nombre situé à la position (l,c) :

In[ ]:=
```
posiposs[{l_, c_}] := {{l - 2, c - 1}, {l - 1, c - 2}, {l - 2, c + 1},
   {l + 1, c - 2}, {l - 1, c + 2}, {l + 2, c - 1}, {l + 1, c + 2}, {l + 2, c + 1}};
```

Fonctions donnant le nombre situé à la position demandée et la position du nombre demandé :

```
nbposi[{l_, c_}] := echiquier[[l, c]];
posinb[n_] := Position[echiquier, n][[1]];
```
position

Terme général de la position du cavalier au rang n:

In[ ]:=
```
cavapos[1] := {3, 3};
cavapos[n_] :=
  (cavapos[n] = posinb[Min[Complement[nbposi /@ posiposs[cavapos[n - 1]], cavalist[n - 1]]]]);
```
mi·· complément

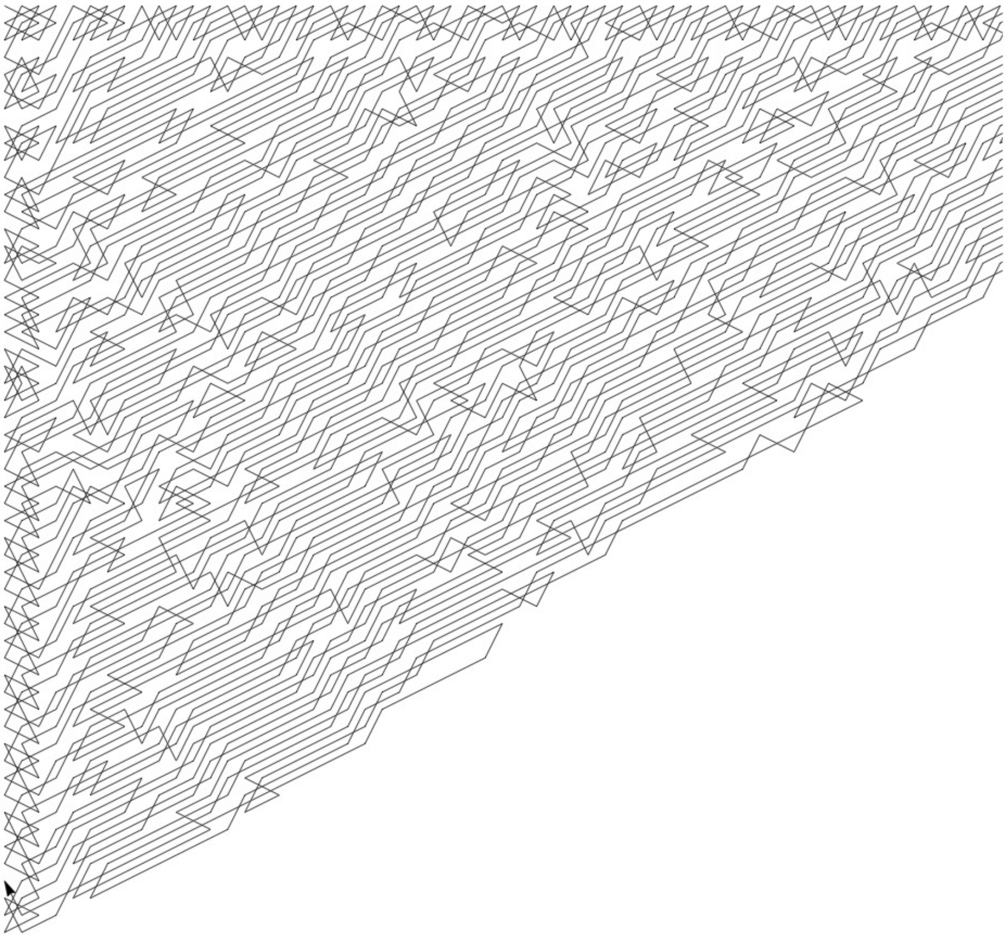
Liste des positions successives du cavalier :

In[ ]:=
```
cavalist[1] := {};
cavalist[n_] := (cavalist[n] = Join[cavalist[n - 1], {nbposi[cavapos[n - 1]]}]);
```
joins

Graphe des mouvements du cavalier :

In[ ]:=
```
Graphics[{Arrowheads[.01], Rotate[Arrow[Table[cavapos[i], {i, 1, 2402}]], -90°]}]
graphique  têtes de flèche  tourne  flèche  table
```

Out[ ]=



académie Nice

RÉGION ACADÉMIQUE PROVENCE-ALPES-CÔTE D'AZUR

MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE ET DE LA JEUNESSE
MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR, DE LA RECHERCHE ET DE L'INNOVATION

Olympiades nationales de mathématiques 2020 Voie technologique

---

Académie de Nice

L'épreuve se déroule en deux parties indépendantes et indissociables de deux heures chacune, **les énoncés des deux parties sont donc séparés et distribués séparément à des moments différents**. Les copies rédigées sont ramassées à l'issue de la première partie (« exercices nationaux »). Une pause de cinq à quinze minutes est prévue, avant la seconde partie (« exercices académiques »). Des consignes de confinement peuvent être données selon la zone géographique de passation de l'épreuve.
L'usage de calculatrice avec mode examen actif est autorisé. L'usage de calculatrice sans mémoire, « type collège » est autorisé.
Il est conseillé aux candidats qui ne pourraient formuler une réponse complète à une question d'exposer le bilan des initiatives qu'ils ont pu prendre.
Les énoncés doivent être rendus au moment de quitter définitivement la salle de composition.

Exercices académiques

Résolution individuelle

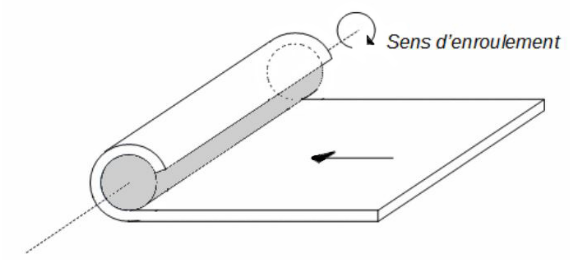
Les candidats traitent les **deux exercices.**

Exercice académique numéro 1

Ça tourne rond

On dispose d'un rouleau circulaire sur lequel on souhaite enrouler une certaine longueur de revêtement isolant formant ainsi plusieurs couches successives.

Fig 1. Vue de profil



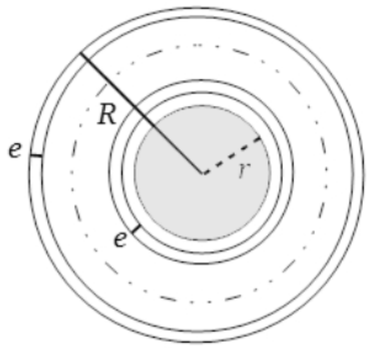
Lors de cet enroulement, on considère que les couches successives sont enroulées de façon parfaitement circulaire et que les tours réalisés sont complets.

Dans tout l'exercice, l'épaisseur du revêtement isolant est notée e, le rayon du rouleau circulaire est noté r et la longueur totale du revêtement isolant enroulé est notée L.

L'épaisseur totale, revêtement isolant et rouleau compris, est notée R.

Les surfaces considérées dans les questions de l'exercice ne concernent que la vue de côté ci-dessous, c'est-à-dire, le disque de rayon r, le disque de rayon R ou la couronne constituée du revêtement.

Fig 2. Vue de côté



Partie A : étude théorique

1. Exprimer en fonction de R et r, l'aire de la couronne située entre le rouleau et la couche supérieure de revêtement isolant.

2. Justifier que l'on a l'égalité entre surfaces : $L \times e = \pi(R^2 - r^2)$.

On note n le nombre de tours complets réalisés.

3. Justifier que $R - r = n \times e$ et que $R + r = 2\,r + n \times e$.

4. En déduire les relations suivantes : $L = \pi\,n\,(R + r)$ et $L = \pi\,n\,(2\,r + n \times e)$.

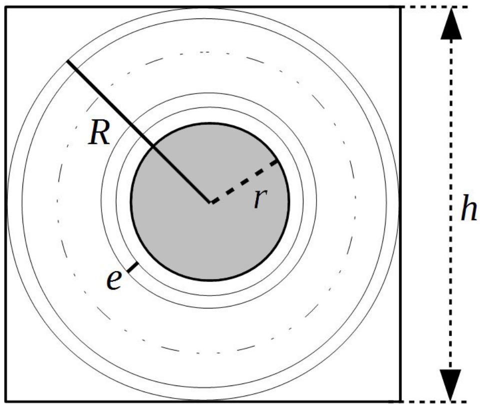
Partie B : applications numériques

Toutes les applications numériques se feront en prenant $r = 250\text{mm}$ et $e = 5\text{mm}$ Dans cette partie, on pourra utiliser les formules énoncées dans la partie A .

1. On compte autour du rouleau 50 tours complets de revêtement isolant.
Déterminer en mètre, la longueur totale de revêtement enroulé. *Arrondir au mm .*

2. Le rouleau complet après enroulement du revêtement isolant doit pouvoir rentrer dans une boîte dont l'une des faces est un carré de côté $h = 150$ cm.

a. Déterminer le nombre de couches de revêtement.
b. Calculer la longueur totale de revêtement enroulé en mètres, arrondie au mm.



3. On dispose d'une longueur de revêtement isolant de $400\ m$.

a. Déterminer le nombre maximal de tours complets possibles.
b. Calculer la longueur de revêtement isolant qui ne sera pas enroulé en mètres, arrondie au mm.

Exercice académique numéro 2

Les nombres heureux

On considère un entier naturel N et on note $S(N)$ la somme des carrés des chiffres de N.
Par exemple, $S(15) = 1^2 + 5^2 = 26$.

On définit ensuite la suite $\left(S_n(N)\right)$ pour tout entier naturel $n \geq 1$, par $\begin{cases} S_1(N) = S(N) \\ S_{n+1}(N) = S\left(S_n(N)\right) \text{ pour } n \geq 1 \end{cases}$.

On dit que le nombre *N* est heureux s'il existe un entier $n \geq 1$ tel que $S_n(\mathrm{N}) = 1$.

Partie A : Quelques calculs autour des nombres heureux

1. **a.** Calculer $S_1(4)$, puis vérifier que $S_2(4) = 37$.

b. Calculer $S_n(4)$ pour tout entier n compris entre *3* et *8*. Le nombre *4* est-il un nombre heureux ? Justifier.

2. Justifier que *7* est un nombre heureux.

3. **a.** Quelle est la valeur de $S_n(1)$ pour tout entier naturel $n \geq 1$?

b. Démontrer que toutes les puissances de *10* sont des nombres heureux.

Partie B : Quelques propriétés des nombres heureux

Les questions 1, 2, 3 et 4 sont indépendantes

1. **a.** On admet que le nombre *319* est heureux. Le nombre *931* est-il heureux ? Justifier.

b. Démontrer que si un nombre est heureux alors, tout nombre constitué des mêmes chiffres, à permutation près, est également heureux.

2. Démontrer que si N est un nombre heureux, alors, pour tout entier naturel $n \geq 1$, $S_n(N)$ est un nombre heureux.

3. On suppose que N est un entier inférieur ou égal à *99*.

a. Justifier que pour tout $n \geq 1$, $S_n(N) \leq 162$.

b. Soit M un entier naturel non nul. Compléter le programme en langage naturel ci-dessous afin qu'il donne, pour un nombre N donné inférieur ou égal à 99, la liste des nombres $S_n(N)$ pour n entier, $1 \leq n \leq M$.

On recopiera, sur la copie, uniquement les deux lignes à compléter.

```
N donné
L ← liste vide
Pour n allant de ……… à ……….,
     a ← quotient de la division euclidienne de N par 100.
     b ← quotient de la division euclidienne de (N – 100a) par 10.
     c ← …………………………………………….
     N ← a²+b²+c²
     Mettre N à la fin de la liste L
Afficher L
```

c. On fait tourner l'algorithme avec $M = 4$ et $N = 87$. Donner l'affichage obtenu.

OLYMPIADES MATHÉMATIQUES
LYCÉE, PREMIÈRE

CORRECTION !

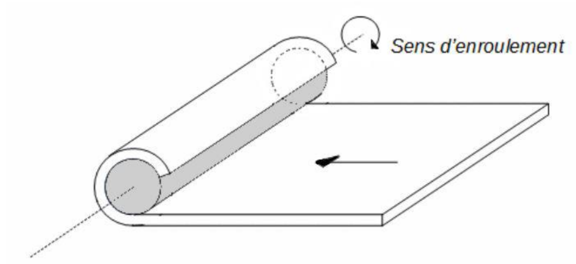
Épreuve ▪ 2020

Exercice académique numéro 1

Ça tourne rond

On dispose d'un rouleau circulaire sur lequel on souhaite enrouler une certaine longueur de revêtement isolant formant ainsi plusieurs couches successives.

Fig 1. Vue de profil



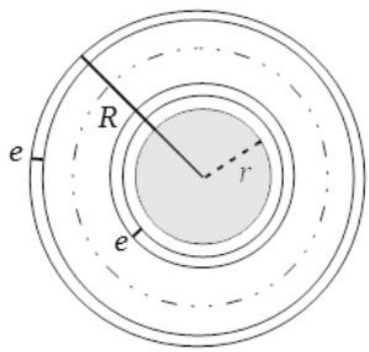
Lors de cet enroulement, on considère que les couches successives sont enroulées de façon parfaitement circulaire et que les tours réalisés sont complets.

Dans tout l'exercice, l'épaisseur du revêtement isolant est notée e, le rayon du rouleau circulaire est noté r et la longueur totale du revêtement isolant enroulé est notée L.

L'épaisseur totale, revêtement isolant et rouleau compris, est notée R.

Les surfaces considérées dans les questions de l'exercice ne concernent que la vue de côté ci-dessous, c'est-à-dire, le disque de rayon r, le disque de rayon R ou la couronne constituée du revêtement.

Fig 2. Vue de côté



Partie A : étude théorique

1. Exprimer en fonction de R et r, l'aire de la couronne située entre le rouleau et la couche supérieure de revêtement isolant.

$\pi R^2 - \pi r^2 = \pi(R^2 - r^2)$

2. Justifier que l'on a l'égalité entre surfaces : $L \times e = \pi(R^2 - r^2)$.

$L \times e$ est l'aire du rectangle de longueur L et d'épaisseur e correspondant au revêtement déroulé.
$\pi(R^2 - r^2)$ est l'aire de la couronne située entre le rouleau et la couche supérieure de revêtement.
Ces deux aires sont égales, d'où l'égalité $L \times e = \pi(R^2 - r^2)$..

3. Justifier que $R - r = n \times e$ et que $R + r = 2\,r + n \times e$.

$R - r$ est la longueur séparant le tube de la surface du rouleau. Elle est égale à $n \times e$ car il y a n couches d'épaisseur e. Donc $R - r = n \times e$.
De plus, $R + r = (n \times e + r) + r = 2r + n \times e$.

4. En déduire les relations suivantes : $L = \pi\, n\, (R + r)$ et $L = \pi\, n\, (2\,r + n \times e)$.

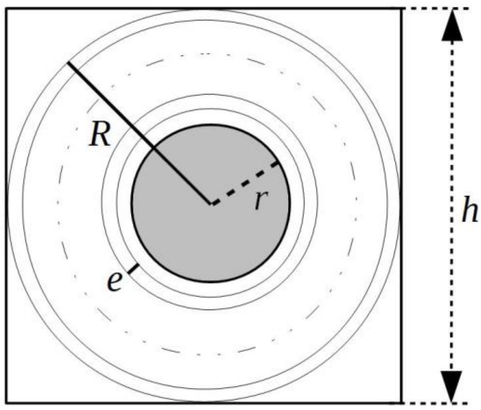
D'après la question 2, $L = \frac{\pi(R^2 - r^2)}{e}$. D'où $L = \frac{\pi(R^2-r^2)}{e} = \frac{\pi(\mathrm{R}-\mathrm{r})(R+r)}{e} = \frac{\pi \times n \times e(R+r)}{e} = \pi\, n\,(R + r)$.
D'après la question 3, $L = \pi\, n\,(R + r) = \pi\, n\,(2r + n \times e)$.

Partie B : applications numériques

Toutes les applications numériques se feront en prenant $r = 250\text{mm}$ et $e = 5\text{mm}$
Dans cette partie, on pourra utiliser les formules énoncées dans la partie A .

1. On compte autour du rouleau 50 tours complets de revêtement isolant.
Déterminer en mètre, la longueur totale de revêtement enroulé. *Arrondir au mm .*

$L = \pi\, n\,(2r + n \times e) = \pi \times 50\,(2 \times 250mm + 50 \times 5mm) \approx 117{,}810\, m.$



2. Le rouleau complet après enroulement du revêtement isolant doit pouvoir rentrer dans une boîte dont l'une des faces est un carré de côté $h = 150$ cm.

a. Déterminer le nombre de couches de revêtement.

$$2R \leq h \Leftrightarrow R \leq \frac{h}{2} \Leftrightarrow n \times e + r \leq \frac{h}{2} \Leftrightarrow n \leq \frac{\frac{h}{2} - r}{e}$$
$$\Leftrightarrow n \leq \frac{\frac{150cm}{2} - 25cm}{0{,}5cm} = 100$$

b. Calculer la longueur totale de revêtement enroulé en mètres, arrondie au mm.

$$L = \pi\, n\,(2r + n \times e)$$
$$= \pi \times 100\,(2 \times 250mm + 100 \times 5mm)$$
$$\approx 314{,}159\, m$$

3. On dispose d'une longueur de revêtement isolant de $400\, m$.

a. Déterminer le nombre maximal de tours complets possibles.

b. Calculer la longueur de revêtement isolant qui ne sera pas enroulé en mètres, arrondie au mm.

n	L (en m)
104	333,260148693
105	338,113909343
106	342,999085919
107	347,915678422
108	352,863686851
109	357,843111207
110	362,85395149
111	367,896207699
112	372,969879834
113	378,074967896
114	383,211471885
115	388,3793918
116	393,578727642
117	398,80947941
118	404,071647105
119	409,365230726
120	414,690230274

D'après le tableau de valeurs, il est possible de faire au maximum 117 tours et il restera environ 1,19 m d'isolant qui ne sera pas enroulé.

Exercice académique numéro 2 : *Les nombres heureux*

On considère un entier naturel N et on note $S(N)$ la somme des carrés des chiffres de N.
Par exemple, $S(15) = 1^2 + 5^2 = 26$.

On définit ensuite la suite $\left(S_n(N)\right)$ pour tout entier naturel $n \geq 1$, par $\begin{cases} S_1(N) = S(N) \\ S_{n+1}(N) = S\left(S_n(N)\right) \text{ pour } n \geq 1 \end{cases}$.

On dit que le nombre *N* est heureux s'il existe un entier $n \geq 1$ tel que $S_n(\mathrm{N}) = 1$.

Partie A : Quelques calculs autour des nombres heureux

1. **a.** Calculer $S_1(4)$, puis vérifier que $S_2(4) = 37$.

$S_1(4) = S(4) = 4^2 = 16$ et $S_2(4) = S\left(S_1(4)\right) = S(16) = 1^2 + 6^2 = 37$

b. Calculer $S_n(4)$ pour tout entier n compris entre *3* et *8*. Le nombre *4* est-il un nombre heureux ? Justifier.

$$S_3(4) = S\left(S_2(4)\right) = S(37) = 3^2 + 7^2 = 58$$
$$S_4(4) = S\left(S_3(4)\right) = S(58) = 5^2 + 8^2 = 89$$
$$S_5(4) = S\left(S_4(4)\right) = S(89) = 8^2 + 9^2 = 145$$
$$S_6(4) = S\left(S_5(4)\right) = S(145) = 1^2 + 4^2 + 5^2 = 42$$
$$S_7(4) = S\left(S_6(4)\right) = S(42) = 4^2 + 2^2 = 20$$
$$S_8(4) = S\left(S_7(4)\right) = S(20) = 2^2 + 0^2 = 4$$

La suite $(S_n(4))$ est donc une suite 8-périodique qui ne prend pas 1 comme valeur sur ses huit premiers termes.
Par conséquent, aucun de ses termes n'est égal à 1 et 4 n'est pas un nombre heureux.

2. Justifier que *7* est un nombre heureux.

$$S_1(7) = S(7) = 7 = 49$$
$$S_2(7) = S\left(S_1(7)\right) = S(49) = 4^2 + 9^2 = 97$$
$$S_3(7) = S\left(S_2(7)\right) = S(97) = 9^2 + 7^2 = 130$$
$$S_4(7) = S\left(S_3(7)\right) = S(130) = 1^2 + 3^2 + 0^2 = 10$$

$S_5(7) = S\left(S_4(7)\right) = S(10) = 1^2 + 0^2 = 1$: 7 est donc bien un nombre heureux.

3. **a.** Quelle est la valeur de $S_n(1)$ pour tout entier naturel $n \geq 1$?

On remarque que $S_1(1) = 1^2 = 1$ donc appliquer S_1 à 1 ne change pas sa valeur. Par conséquent, pour tout entier naturel *n* non nul, $S_n(1) = \mathrm{S}_{n-1}\left(S_1(1)\right) = \mathrm{S}_{n-1}(1)$: la suite $\left(\mathrm{S}_n(1)\right)$ est une suite constante.
On en déduit que pour tout entier naturel *n ≥ 1*, $\mathrm{S}_n(1) = 1$.

b. Démontrer que toutes les puissances de *10* sont des nombres heureux.

Soit *k* un entier naturel, $S_1\left(10^k\right) = 1^2 = 1$ donc toute puissance de 10 est un nombre heureux.

Partie B : Quelques propriétés des nombres heureux

Les questions 1, 2, 3 et 4 sont indépendantes

1. **a.** On admet que le nombre *319* est heureux. Le nombre *931* est-il heureux ? Justifier.

Comme $S_1(319) = 3^2 + 1^2 + 9^2 = 9^2 + 3^2 + 1^2 = S_1(931)$, on en déduit que pour tout entier naturel *n* supérieur à 2 on a $S_n(319) = S_{n-1}(S_1(319)) = S_{n-1}(S_1(931)) = S_n(931)$.

Comme 319 est un nombre heureux, il existe un entier naturel *n ≥ 1* tel que $S_n(319) = 1$.

Par conséquent, $S_n(931) = 1$ et 931 est aussi un nombre heureux.

b. Démontrer que si un nombre est heureux alors, tout nombre constitué des mêmes chiffres, à permutation près, est également heureux.

On reprend le raisonnement précédent en remarquant que l'image de ces deux nombres par S_1 est le même car ils sont composés des mêmes chiffres.

2. Démontrer que si N est un nombre heureux, alors, pour tout entier naturel $n \geq 1$, $S_n(N)$ est un nombre heureux.

Si *N* est un nombre heureux, alors il existe un nombre entier *m* non nul tel que $S_m(N) = 1$.

Par conséquent, si *n < m*, $S_{m-n}(S_n(N)) = S_m(N) = 1$ et donc $S_n(N)$ est un nombre heureux.

Si *n > m*, alors $S_n(N) = S_{n-m}(S_m(N)) = S_{n-m}(1) = 1$ et on aboutit à la même conclusion.

Si *n = m*, alors $S_n(N) = 1$

3. On suppose que N est un entier inférieur ou égal à *99*.

a. Justifier que pour tout $n \geq 1$, $S_n(N) \leq 162$.

On peut écrire $N = \overline{ab}$ avec *a* et *b* entiers naturels inférieurs à 9.

Alors $S(N) = a^2 + b^2$ et $S(N) \leqslant 9^2 + 9^2$, donc $S(N) \leqslant 162$.

Soit M un entier supérieur à 100 et inférieur à 162.

Alors, on peut écrire $M = \overline{cde}$ avec *c*, *d* et *e* entiers naturels avec $c = 1$, $d \leq 6$ et $e \leq 9$.

Alors $S(M) = c^2 + d^2 + e^2$ et $S(M) \leqslant 1^2 + 6^2 + 9^2$, donc $S(M) \leq 118 \leq 162$.

On en déduit que pour tout entier naturel $n \geq 1$, $S_n(N) \leq 162$.

b. Soit M un entier naturel non nul. Compléter le programme en langage naturel ci-dessous afin qu'il donne, pour un nombre N donné inférieur ou égal à 99, la liste des nombres $S_n(N)$ pour n entier, $1 \leq n \leq M$. On recopiera, sur la copie, uniquement les deux lignes à compléter.

Pour n allant de 1 à M,

c ← N-100a-10b

c. On fait tourner l'algorithme avec $M = 4$ et $N = 87$. Donner l'affichage obtenu.

L = {113 ; 11 ; 2 ; 4}

Olympiades nationales de mathématiques 2020
Voie technologique

Académie de Nice

L'épreuve se déroule en deux parties indépendantes et indissociables de deux heures chacune, **les énoncés des deux parties sont donc séparés et distribués séparément à des moments différents**. Les copies rédigées sont ramassées à l'issue de la première partie (« exercices nationaux »). Une pause de cinq à quinze minutes est prévue, avant la seconde partie (« exercices académiques »). Des consignes de confinement peuvent être données selon la zone géographique de passation de l'épreuve.

L'usage de calculatrice avec mode examen actif est autorisé.

L'usage de calculatrice sans mémoire, « type collège » est autorisé.

Il est conseillé aux candidats qui ne pourraient formuler une réponse complète à une question d'exposer le bilan des initiatives qu'ils ont pu prendre.

Les énoncés doivent être rendus au moment de quitter définitivement la salle de composition.

Exercices académiques

Résolution en équipe

Les candidats traitent **les deux exercices.**

Exercice académique numéro 1

À qui la crêpe ?

Ce soir, tous mes amis se sont réunis pour une soirée crêpes. Chacun se sert et mange à sa faim, jusqu'à ce qu'il ne reste plus qu'une seule crêpe.

1. a. Supposons que 4 personnes aient encore faim : Armand, Bilel, Chloé et Daphné. Ils tirent au sort pour déterminer la personne qui mangera la crêpe restante.
Mais ils n'ont qu'une pièce de monnaie équilibrée à deux faces.
Chloé propose la répartition suivante : on lance deux fois la pièce.

Si elle tombe sur...	Pile puis Pile	Pile puis Face	Face puis Pile	Face puis Face
… mange la crêpe	Armand	Bilel	Chloé	Daphné

Calculer la probabilité qu'Armand mange la crêpe, la probabilité que Bilel mange la crêpe, la probabilité que Chloé mange la crêpe et la probabilité que Daphné mange la crêpe.

Le tirage au sort est-il équitable ou avantage-t-il quelqu'un en particulier ?

b. En fait Daphné n'a pas très faim. 3 volontaires restent donc pour la dernière crêpe.

Bilel propose une nouvelle répartition : on lance deux fois la pièce.

Si elle tombe sur...	Pile la première fois	Face puis Pile	Face puis Face
… mange la crêpe	Armand	Bilel	Chloé

Montrer que ce nouveau tirage au sort n'est pas équitable entre les 3 intéressés.

Pour faire des tirages au sort équitables quel que soit le nombre de personnes intéressées par la dernière crêpe, Armand propose d'utiliser un dé à trois faces parfaitement équilibré. On note 1,2,3 les faces respectives du dé à trois faces.

2. a. Imaginons que 9 personnes veuillent la dernière crêpe. En lançant deux fois le dé à trois faces, proposer une méthode de tirage au sort équitable entre ces 9 personnes.

b. Même question si 27 personnes veulent la dernière crêpe.

c. Généralisons : que faire si 3^n personnes veulent la dernière crêpe ?

3.a. Imaginons que 6 personnes convoitent la dernière crêpe. En lançant une fois la pièce et une fois le dé à trois faces, proposer un tirage au sort équitable entre ces 6 personnes.

b. Que faire si 72 personnes désirent manger la dernière crêpe ?

c. Soit n un nombre entier naturel dont les seuls facteurs premiers sont 2 et 3.

Par exemple, $n = 72 = 2^3 \times 3^2$.

Expliquer comment faire un tirage au sort équitable entre n amis avec la pièce et le dé à trois faces.

En pratique, tout le monde ne possède pas de dé à trois faces.
Revenons à une situation plus réaliste : Armand range son dé à trois faces et nous propose d'utiliser à la place un dé équilibré à six faces.

4. a. Comment réaliser un tirage au sort équitable entre 3 personnes avec ce dé à six faces ?

b. Si on utilise seulement ce dé à six faces, peut-on faire un tirage au sort équitable entre 2 personnes ?

c. Expliquer pourquoi le résultat de la question 3.c) reste vrai lorsque l'on n'a plus de pièce ni de dé à trois faces, mais seulement un dé à six faces.

d. Armand sort maintenant un autre dé en plus du dé à six faces : un dé équilibré à vingt faces.

Il affirme qu'avec ces deux dés, il sait faire un tirage au sort équilibré pour n amis quel que soit le nombre entier n tant que ses facteurs premiers ne sont que des 2, des 3 ou des 5. Quelle est sa méthode ?

Exercice académique numéro 2
Un océan agité

Un océan est un rectangle de taille 3 x 5 composé de cases. Chaque case a un courant, c'est-à-dire une flèche vers une case voisine.

Les courants pointent toujours vers une autre case de l'océan.

Voici un exemple d'océan :

$\rightarrow$	$\downarrow$	$\leftarrow$	$\rightarrow$	$\leftarrow$
$\uparrow$	$\leftarrow$	$\rightarrow$	$\downarrow$	$\leftarrow$
$\uparrow$	$\rightarrow$	$\rightarrow$	$\leftarrow$	$\leftarrow$

Un bateau se déplace sur l'océan. Quand il est sur une case, il se déplace sur la case voisine indiquée par le courant. Par exemple, si le bateau est sur la case en haut à gauche de l'océan ci-dessus, il se déplace d'une case vers la droite.

1. a. Le bateau commence sur la case en haut à gauche. Sur l'océan de l'annexe, tracer en bleu la trajectoire du bateau. Que remarque-t-on ?

b. Le bateau commence sur la case au centre de l'océan. Sur l'océan de l'annexe, tracer en rouge la trajectoire du bateau.

Un *circuit* est un ensemble *E* de cases qui vérifie les propriétés suivantes :

- si le bateau commence sur une case de *E*, il ne sort pas de *E ;*
- le bateau visite toutes les cases de *E ;*
- le bateau repasse par sa case de départ.

Par exemple, la trajectoire bleue (de la question 1. a.) est un circuit.

2. Expliquer pourquoi la trajectoire rouge (de la question 1. b.) n'est pas un circuit.

3. Sur l'océan de l'annexe, colorier dans des couleurs différentes tous les circuits.

4. Compléter l'océan de l'annexe de façon à ce qu'il contienne un seul circuit et que ce circuit soit constitué de plus de quatre cases. Colorier ce circuit.

5. Compléter l'océan pour qu'il contienne un circuit passant par toutes les cases grisées et le colorier.

On cherche maintenant à prouver que tous les océans 3 x 5 ont au moins un circuit. On considère donc un océan de taille 3 x 5 sur lequel se déplace un bateau partant d'une case quelconque.

Dans les questions suivantes, on tiendra compte de la qualité de la rédaction.

6. a. Montrer que le bateau, après 16 mouvements, est repassé au moins deux fois par la même case.

b. En déduire qu'il existe au moins un circuit.

On s'intéresse maintenant au nombre maximum de circuits dans l'océan.

7. a. Montrer que deux circuits ne peuvent pas se croiser.

b. Montrer que, sur un océan de taille 3 x 5, il y a au plus 7 circuits.

c. Donner sur l'annexe un exemple d'océan avec 7 circuits.

On dit qu'un océan est un *tourbillon* s'il n'a qu'un circuit qui contient toutes les cases de l'océan.

8. Donner sur l'annexe un exemple de tourbillon de taille 2 x 4.

9. Est-il possible de réaliser un tourbillon de taille 3 x 5 ?

Annexe Un océan agité

Question 1a :

→	↓	←	→	←
↑	←	→	↓	←
↑	→	→	←	←

Question 1b :

→	↓	←	→	←
↑	←	→	↓	←
↑	→	→	←	←

Question 3 :

→	↓	←	→	←
↑	←	→	↓	←
↑	→	→	←	←

Question 4 :

→	→	→	↓	
	↓		←	↑
↑	→	→	→	↑

Question 5 :

↓	↓	←			←
→		↑	←	↑	↓
↑	↓	→	→		↓
↑		→	→	↑	←

Question 7c :

Question 8 :

OLYMPIADES MATHÉMATIQUES
LYCÉE, PREMIÈRE

CORRECTION !

Épreuve ▪ 2020

Exercice académique numéro 1

À qui la crêpe ?

Ce soir, tous mes amis se sont réunis pour une soirée crêpes. Chacun se sert et mange à sa faim, jusqu'à ce qu'il ne reste plus qu'une seule crêpe.

1. a. Supposons que 4 personnes aient encore faim : Armand, Bilel, Chloé et Daphné. Ils tirent au sort pour déterminer la personne qui mangera la crêpe restante.
Mais ils n'ont qu'une pièce de monnaie équilibrée à deux faces.
Chloé propose la répartition suivante : on lance deux fois la pièce.

Si elle tombe sur...	Pile puis Pile	Pile puis Face	Face puis Pile	Face puis Face
… mange la crêpe	Armand	Bilel	Chloé	Daphné

Calculer la probabilité qu'Armand mange la crêpe, la probabilité que Bilel mange la crêpe, la probabilité que Chloé mange la crêpe et la probabilité que Daphné mange la crêpe.

Le tirage au sort est-il équitable ou avantage-t-il quelqu'un en particulier ?

La probabilité qu'Armand mange la crêpe est la probabilité de l'événement « Pile puis pile ».

Les deux tirages étant indépendants, P(A mange la crêpe) = P(Pile) × P(Pile) = ¼.

Le même calcul donne P(B mange la crêpe) = P(C mange la crêpe) = P(D mange la crêpe) = ¼.

C'est donc un tirage au sort équitable.

b. En fait Daphné n'a pas très faim. 3 volontaires restent donc pour la dernière crêpe.

Bilel propose une nouvelle répartition : on lance deux fois la pièce.

Si elle tombe sur...	Pile la première fois	Face puis Pile	Face puis Face
… mange la crêpe	Armand	Bilel	Chloé

Montrer que ce nouveau tirage au sort n'est pas équitable entre les 3 intéressés.

Les probabilités des événements « Pile puis face » et « Face puis pile » n'ont pas changé donc :
P(B mange la crêpe) = P(C mange la crêpe) = ¼.
Par ailleurs, P(A mange la crêpe) = P(le premier tirage donne Pile) = ½.
Ce tirage au sort n'est donc pas équitable.

Pour faire des tirages au sort équitables quel que soit le nombre de personnes intéressées par la dernière crêpe, Armand propose d'utiliser un dé à trois faces parfaitement équilibré. On note 1,2,3 les faces respectives du dé à trois faces.

2. a. Imaginons que 9 personnes veuillent la dernière crêpe. En lançant deux fois le dé à trois faces, proposer une méthode de tirage au sort équitable entre ces 9 personnes.

Pour tirer au sort équitablement entre 9 personnes A, B, C… I, on lance deux fois le dé à trois faces. On décrète alors que A mange la crêpe si les faces sorties sont 1 puis 1, B si ce sont les faces 1 puis 2, C si ce sont les faces 1 puis 3, D si ce sont les faces 2 puis 1, E si ce sont les faces 2 puis 2, F si ce sont les faces 2 puis 3, G si ce sont les faces 3 puis 1, H si ce sont les faces 3 puis 2, I si ce sont les faces 3 puis 3. Quel que soit le premier ou le deuxième tirage, le dé étant équilibré, P(1)=P(2)=P(3)=1/3. De plus, les deux tirages étant indépendants, P(A mange la crêpe) = P(1 puis 1) = 1/3 × 1/3 = 1/9. De même, la probabilité que chaque participant mange la crêpe est égale à 1/9.

b. Même question si 27 personnes veulent la dernière crêpe.

On peut lancer le dé à trois faces à trois reprises. L'arbre des issues a 3× 3 × 3= 27 feuilles qui sont toutes équiprobables de probabilité 1/27. Dès lors, on peut attribuer à chaque issue un des 27 participants : la première personne mange la crêpe si l'issue des trois tirages est (1, 1, 1), la deuxième si c'est (1, 1, 2), …, la 27-ième si c'est (3, 3, 3).

c. Généralisons : que faire si 3^n personnes veulent la dernière crêpe ?

On procède de même qu'à la question précédente en lançant le dé à trois face à *n* reprises.

3.a. Imaginons que 6 personnes convoitent la dernière crêpe. En lançant une fois la pièce et une fois le dé à trois faces, proposer un tirage au sort équitable entre ces 6 personnes.

Cette expérience à six issues possibles équiprobables : (Pile, 1), (Pile, 2), (Pile, 3), (Face, 1), (Face, 2), (Face, 3). Ainsi, affecter à chacun des six gourmands une des six issues décrites définit un tirage au sort équitable.

b. Que faire si 72 personnes désirent manger la dernière crêpe ?

On remarque que 72 = 8 × 9 = 2 × 2 × 2 × 3 × 3. Ainsi, réaliser l'expérience aléatoire « tirer trois fois la pièce et deux fois le dé à trois faces » permet d'obtenir 72 issues équiprobables que l'on peut associer à chacune des 72 personnes en présence.

c. Soit n un nombre entier naturel dont les seuls facteurs premiers sont 2 et 3.
Par exemple, $n = 72 = 2^3 \times 3^2$.
Expliquer comment faire un tirage au sort équitable entre n amis avec la pièce et le dé à trois faces.

Si $n = 2^a \times 3^b$ avec *a* et *b* deux nombres entiers, l'expérience aléatoire « tirer *a* fois la pièce et *b* fois le dé à trois faces » permet d'obtenir *n* issues équiprobables que l'on peut associer à chacun des *n* amis.

En pratique, tout le monde ne possède pas de dé à trois faces.
Revenons à une situation plus réaliste : Armand range son dé à trois faces et nous propose d'utiliser à la place un dé équilibré à six faces.

4. a. Comment réaliser un tirage au sort équitable entre 3 personnes avec ce dé à six faces ?

On appelle A, B et C les trois amis. On lance le dé à six faces : si 1 ou 2 sort, A mange la crêpe, si 3 ou 4 sort, B mange la crêpe, si 5 ou 6 sort, C mange la crêpe. Dans tous les cas, que A, que B ou que C mange la crêpe est égale à $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$ et le tirage est équitable.

b. Si on utilise seulement ce dé à six faces, peut-on faire un tirage au sort équitable entre 2 personnes ?

Oui : on peut par exemple décider que la première personne gagne si un nombre pair sort et que la deuxième gagne si c'est un nombre impair.

c. Expliquer pourquoi le résultat de la question 3.c) reste vrai lorsque l'on n'a plus de pièce ni de dé à trois faces, mais seulement un dé à six faces.

Avec les mêmes notations que dans la question 3.c), il est possible de simuler les *a* lancers de pièces par *a* jets d'un dé à six faces en observant si le résultat est pair ou impair et de simuler les *b* lancers de dés à trois faces par *b* jets d'un dé à six faces en observant si le résultat est 1 ou 2 ; 3 ou 4 ; 5 ou 6.

d. Armand sort maintenant un autre dé en plus du dé à six faces : un dé équilibré à vingt faces.
Il affirme qu'avec ces deux dés, il sait faire un tirage au sort équilibré pour n amis quel que soit le nombre entier n tant que ses facteurs premiers ne sont que des 2, des 3 ou des 5. Quelle est sa méthode ?

Sa méthode est proche de celle de la question précédente : il faut juste comprendre comment faire un tirage au sort équitable entre 5 personnes avec un dé à 6 faces et un dé à 20 faces. Pour cela, le dé à 20 faces suffit : si on lance une fois, les cinq issues qui suivent sont équiprobables : (1 ou 2 ou 3 ou 4) ; (5 ou 6 ou 7 ou 8) ; (9 ou 10 ou 11 ou 12) ; (13 ou 14 ou 15 ou 16) ; (17 ou 18 ou 19 ou 20). Appelons cette expérience aléatoire l'expérience *E*. Si $n = 2^a 3^b 5^c$, on répète *a* fois l'expérience de la question 3.b., *b* fois l'expérience de la question 3.a. et *c* fois l'expérience *E*. On obtient alors bien *n* issues équiprobables.

Exercice académique numéro 2
Un océan agité

Un océan est un rectangle de taille 3 x 5 composé de cases. Chaque case a un courant, c'est-à-dire une flèche vers une case voisine.

Les courants pointent toujours vers une autre case de l'océan.

Voici un exemple d'océan :

→	↓	←	→	←
↑	←	→	↓	←
↑	→	→	←	←

Un bateau se déplace sur l'océan. Quand il est sur une case, il se déplace sur la case voisine indiquée par le courant. Par exemple, si le bateau est sur la case en haut à gauche de l'océan ci-dessus, il se déplace d'une case vers la droite.

1. a. Le bateau commence sur la case en haut à gauche. Sur l'océan de l'annexe, tracer en bleu la trajectoire du bateau. Que remarque-t-on ?

On remarque que le bateau ne quitte pas une trajectoire fermée comportant 4 cases.

b. Le bateau commence sur la case au centre de l'océan. Sur l'océan de l'annexe, tracer en rouge la trajectoire du bateau.

Un *circuit* est un ensemble *E* de cases qui vérifie les propriétés suivantes :

- si le bateau commence sur une case de *E*, il ne sort pas de *E ;*
- le bateau visite toutes les cases de *E ;*
- le bateau repasse par sa case de départ.

Par exemple, la trajectoire bleue (de la question 1. a.) est un circuit.

2. Expliquer pourquoi la trajectoire rouge (de la question 1. b.) n'est pas un circuit.

Le bateau ne revient pas à la case de départ donc ce n'est pas un circuit.

3. Sur l'océan de l'annexe, colorier dans des couleurs différentes tous les circuits.

4. Compléter l'océan de l'annexe de façon à ce qu'il contienne un seul circuit et que ce circuit soit constitué de plus de quatre cases. Colorier ce circuit.

5. Compléter l'océan pour qu'il contienne un circuit passant par toutes les cases grisées et le colorier.

On cherche maintenant à prouver que tous les océans 3 x 5 ont au moins un circuit. On considère donc un océan de taille 3 x 5 sur lequel se déplace un bateau partant d'une case quelconque.

Dans les questions suivantes, on tiendra compte de la qualité de la rédaction.

6. a. Montrer que le bateau, après 16 mouvements, est repassé au moins deux fois par la même case.

Comme il n'y a que 15 cases, au bout de 16 mouvements, le bateau est nécessairement repassé au moins deux fois par la même case.

b. En déduire qu'il existe au moins un circuit.

D’après la question précédente, il existe au moins une case *C* sur laquelle le bateau passe au moins deux fois au bout de 16 mouvements. L’ensemble des cases parcourues par le bateau en partant de *C* forme un circuit.

On s'intéresse maintenant au nombre maximum de circuits dans l'océan.

7. a. Montrer que deux circuits ne peuvent pas se croiser.

Si deux circuits se croisent, ils partagent une case en commun et n’en forment qu’un seul.

b. Montrer que, sur un océan de taille 3 x 5, il y a au plus 7 circuits.

Les plus petits circuits sont composés de deux cases. Comme $15 = 2 \times 7 + 1$, il ne peut y avoir plus de 7 circuits dans un océan composé de quinze cases.

c. Donner sur l’annexe un exemple d'océan avec 7 circuits.

On dit qu'un océan est un *tourbillon* s'il n'a qu'un circuit qui contient toutes les cases de l'océan.

8. Donner sur l’annexe un exemple de tourbillon de taille 2 x 4.

9. Est-il possible de faire un tourbillon de taille 3 x 5 ?

Annexe Un océan agité

Question 1a :

→	↓	←	→	←
↑	←	→	↓	←
↑	→	→	←	←

Question 1b :

→	↓	←	→	←
↑	←	→	↓	←
↑	→	→	←	←

Question 3 :

→	↓	←	→	←
↑	←	→	↓	←
↑	→	→	←	←

Question 4 :

→	→	→	↓	←
→	↓	←	←	↑
↑	→	→	→	↑

Question 5 :

↓	↓	←	↓	←	←
→	↓	↑	←	↑	↓
↑	↓	→	→	↑	↓
↑	→	→	→	↑	←

Question 7c :

→	←	→	←	←
↓	↓	↓	↓	↓
↑	↑	↑	↑	↑

Question 8 :

→	→	→	↓
↑	←	←	←