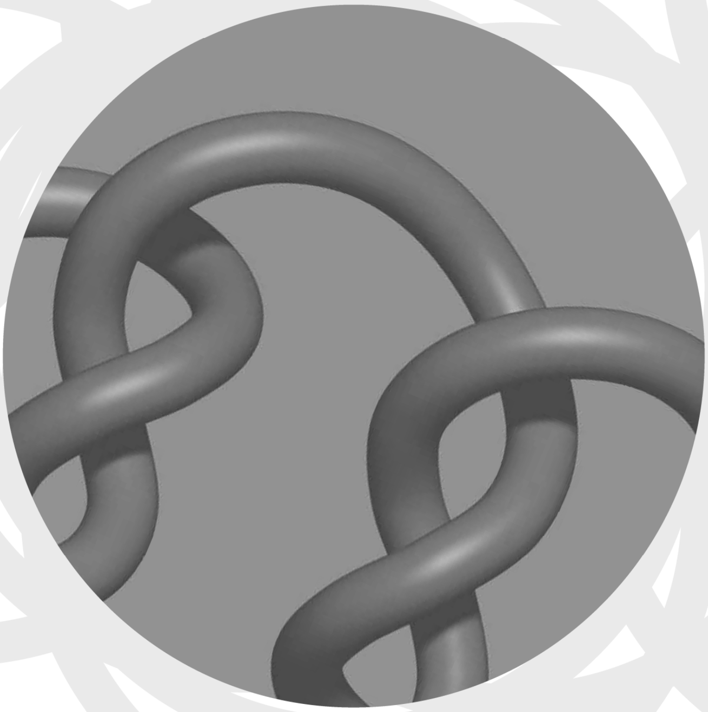
SUJET + CORRIGÉ

OLYMPIADES DE MATHÉMATIQUES

ACADÉMIE DE NICE

Classes de première S • 2013



OLYMPIADES
de mathématiques
20 mars 2013

Série S

Durée de l'épreuve : 4 heures

Ce sujet comporte 6 pages numérotées de 1 à 6.

L'utilisation d'une calculatrice est autorisée.

Le candidat doit traiter les quatre exercices.

Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée.

Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Exercice 1 : les nombres Harshad

Un entier naturel non nul est un **nombre Harshad** s'il est divisible par la somme de ses chiffres.
Par exemple, $n = 24$ est un nombre Harshad car la somme de ses chiffres est $2 + 4 = 6$, et 24 est bien divisible par 6.

1.
   a) Montrer que 364 est un nombre Harshad.
   b) Quel est le plus petit entier qui ne soit pas un nombre Harshad ?

2.
   a) Donner un nombre Harshad de 4 chiffres.
   b) Soit *n* un entier non nul. Donner un nombre Harshad de *n* chiffres.

3.
   a) Montrer que 110, 111, 112 forment une liste de trois nombres Harshad consécutifs.
   b) En insérant judicieusement le chiffre 0 dans l'écriture décimale des nombres précédents, construire une autre liste de trois nombres Harshad consécutifs.
   c) Justifier l'existence d'une infinité de listes de trois nombres Harshad consécutifs.

4.
   a) Soit $A = 30 \times 31 \times 32 \times 33$. Calculer la somme des chiffres de *A*.
   b) En déduire que 98 208 030, 98 208 031, 98 208 032 et 98 208 033 forment une liste de quatre nombres Harshad consécutifs.
   c) Justifier l'existence d'une infinité de listes de quatre nombres Harshad consécutifs.

5.
   a) En s'inspirant de la question 4, trouver une liste de cinq nombres Harshad consécutifs.
   b) Justifier l'existence d'une infinité de listes de cinq nombres Harshad consécutifs.

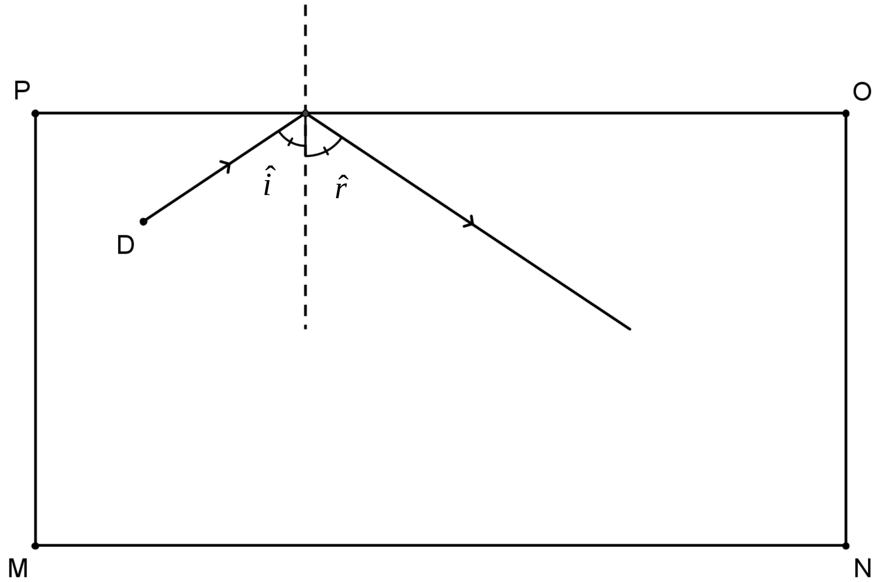
6.
   a) Soit *i* un chiffre compris entre 0 et 8.
      Soit *p* un entier dont le chiffre des dizaines est *i* et le chiffre des unités est 9.
      Montrer que soit la somme des chiffres du nombre *p* soit celle de *p* + 2 est un nombre pair.
      En déduire que *p* et *p* + 2 ne peuvent pas être tous les deux des nombres Harshad.
   b) Existe-t-il une liste de 22 nombres Harshad consécutifs ?

Exercice 2 : le billard

On considère un billard de forme rectangulaire, de longueur 300 cm et de largeur 160 cm dont les boules sont assimilées à des points.

Entre deux rebonds toutes les trajectoires sont rectilignes.

Lorsque la boule atteint l'un des bords (rails) du billard, elle y rebondit suivant les règles de la physique des chocs élastiques : l'angle d'incidence $\hat{i}$ tant égal à l'angle de réflexion $\hat{r}$, comme sur la figure ci-dessous $\left(\hat{i}=\hat{r}\right)$.



1. On frappe une boule placée au milieu du rail $[\mathrm{MN}]$.
   a) Quel point du rail $[\mathrm{PO}]$ peut-on viser pour que la boule atteigne le point N en une bande (c'est-à-dire avec un seul rebond) ?
   b) Quel point du rail $[\mathrm{PO}]$ peut-on viser pour que la boule atteigne en une bande le milieu du rail $[\mathrm{NO}]$?
   c) Quel point du rail $[\mathrm{NO}]$ peut-on viser pour que la boule revienne à son point de départ en trois bandes (c'est-à-dire après exactement trois rebonds) ?

2. On frappe une boule placée en un point quelconque du rail $[\mathrm{MN}]$.
   a) Est-il possible d'atteindre en une bande n'importe quelle boule placée sur la surface de jeu ?
   b) Est-il toujours possible de la frapper de sorte qu'elle revienne en trois bandes à son point initial ?

Exercice 3 : les lampadaires

Le plan d'un lotissement de maisons est donné sous la forme d'un quadrillage composé de cinq lignes et cinq colonnes numérotées de 1 à 5. Les maisons de ce lotissement sont représentées par des carrés grisés.

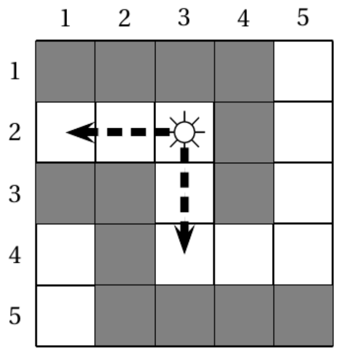


Figure 1

On souhaite éclairer l'ensemble du lotissement à l'aide de lampadaires.

Un lampadaire éclaire toute la ligne et toute la colonne à partir de la case sur laquelle il est positionné (tant que la lumière qu'il émet ne rencontre pas de maison ou la frontière du lotissement).

Par exemple, sur la figure 1, un lampadaire positionné en (2 ; 3) (2^e ligne et 3^e colonne) éclairera les cases (2 ; 1), (2 ; 2), (2 ; 3), (3 ; 3) et (4 ; 3).

1. Combien de lampadaires faut-il placer **au minimum** pour éclairer l'ensemble du lotissement de la figure 1 ? À quelles positions les placer ?
2. Si le lotissement ne contient aucune maison, combien de lampadaires faut-il placer **au minimum** pour l'éclairer entièrement ? À quelles positions les placer ?
3. Dessiner le plan d'un lotissement pour lequel il faut placer sept lampadaires au minimum pour l'éclairer entièrement.
4. Combien de lampadaires faut-il utiliser au minimum pour éclairer l'ensemble des lotissements suivants ?

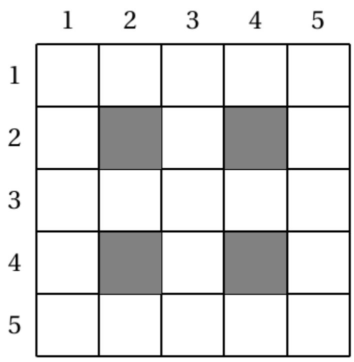


Figure 2

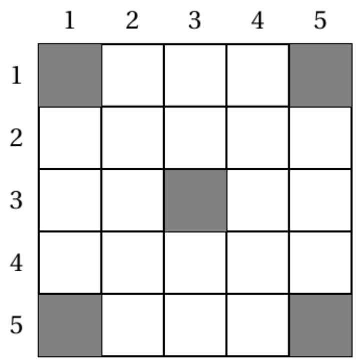


Figure 3

5. On code un lotissement à l'aide d'un tableau `T[i,j]` où i (resp. j) désigne le numéro de la ligne (resp. colonne) avec $1 \leq i \leq 5$ et $1 \leq j \leq 5$. On convient que :

- `T[i,j]` vaut 0 si la case (i ; j) n'est pas éclairée ;
- `T[i,j]` vaut 1 si la case (i ; j) est éclairée ;
- `T[i,j]` vaut 2 si la case (i ; j) contient une maison.

On suppose un lotissement entièrement codé par un tableau `T`.

Écrire un algorithme qui affiche si oui ou non le lotissement est entièrement éclairé.

6.

a) Dessiner le plan du lotissement associé à un tableau `T` obtenu à l'aide de l'algorithme ci-dessous :

```
Variables :        i, j et s sont des entiers naturels
                   T est un tableau
Initialisation :   Affecter à s la valeur 1.
Traitement :       Pour i variant de 1 à 5
                   | Pour j variant de 1 à 5
                   |   | Si (2*i-j)==s alors
                   |   |   | Affecter à T[i,j] la valeur 2
                   |   |   | s prend la valeur s+1
                   |   | Sinon affecter à T[i,j] la valeur 0
```

b) Combien de lampadaires faut-il placer au minimum pour éclairer entièrement ce lotissement ?

Exercice 4 : les triangles olympiques

On considère un triangle T dont les côtés mesurent a, b et c.

Un tel triangle T est dit « olympique » lorsque que :

- a, b et c sont des entiers naturels ;
- $1 < a \leq b \leq c$;
- T est un triangle rectangle;
- $a^2 = b + c$.

1. Donner un exemple de triangle olympique. On précisera les mesures des trois côtés.
2.
   a) En utilisant le théorème de Pythagore, montrer que b et c sont des entiers consécutifs, c'est-à-dire que $c = b + 1$.

   b) En déduire une expression simple de b en fonction de a .

   c) Le nombre entier a peut-il être un nombre pair ?

   d) Un triangle olympique peut-il être isocèle ?

   e) Existe-t-il un triangle olympique T pour tout nombre entier a impair supérieur à 2 ?
3. Dans toute la suite, on suppose que a est un nombre impair.

   a) Calculer, en fonction de a, l'aire $\mathcal{A}$ d'un triangle olympique.

   b) Combien y a-t-il de valeurs de a pour lesquelles l'aire $\mathcal{A}$ est inférieure ou égale à 2013 ?
4. On tire trois fois de suite avec remise un jeton d'une urne qui en contient cent numérotés de 1 à 100.

   Calculer la probabilité que les numéros des trois jetons définissent (dans l'ordre de tirage) un triangle olympique de côtés de mesure a, b et c.

Olympiades académiques de mathématiques 2013

ÉLÉMENTS DE CORRECTION série S

EXERCICE 1. LES NOMBRES HARSHAD

On notera dans le corrigé s(n) la somme des chiffres de l'entier n.

1.a) 364 est divisible par 3+ 6 + 4 = 13.

b) 11 est le plus petit entier qui ne soit pas de Harshad.

2. a) 1000 par exemple.

b) 10^{n-1} par exemple.

3. a) 110, 111, 112 forment une liste de trois nombres Harshad consécutifs

b) 1**0**10 ; 1**0**11 ; 1**0**12 sont trois nombres Harshad consécutifs.

c) 1**0…0**10 ; 1**0…0**11 ; 1**0…0**12 sont trois nombres Harshad consécutifs (avec autant de 0 que l'on veut).

4. a) A = 30 × 31 × 32 × 33 = 982080. Sa somme de chiffres est 27.
b) 98208030 = 98208000 + 30 est divisible par s(98208030) = 27 + 3 = 30.
idem pour les trois suivants.
c) 98208**0…0**30 ; etc. forment une liste de quatre Harshad consécutifs.

5. a) A = 30 × 31 × 32 × 33 × 34 = 33390720 a pour somme de chiffres 27.
3339072030 ; 3339072031 ; 3339072032 ; 3339072033 ; 3339072034 sont cinq nombres de Harshad consécutifs/
b) 3339072**0…0**30 ; etc. forment une liste de cinq Harshad consécutifs.

6 .a) s(p + 2) = s(p) – i – 9 + (i + 1) + 1 = s(p) – 7 donc s(p) et s(p + 2) sont de parités différentes.

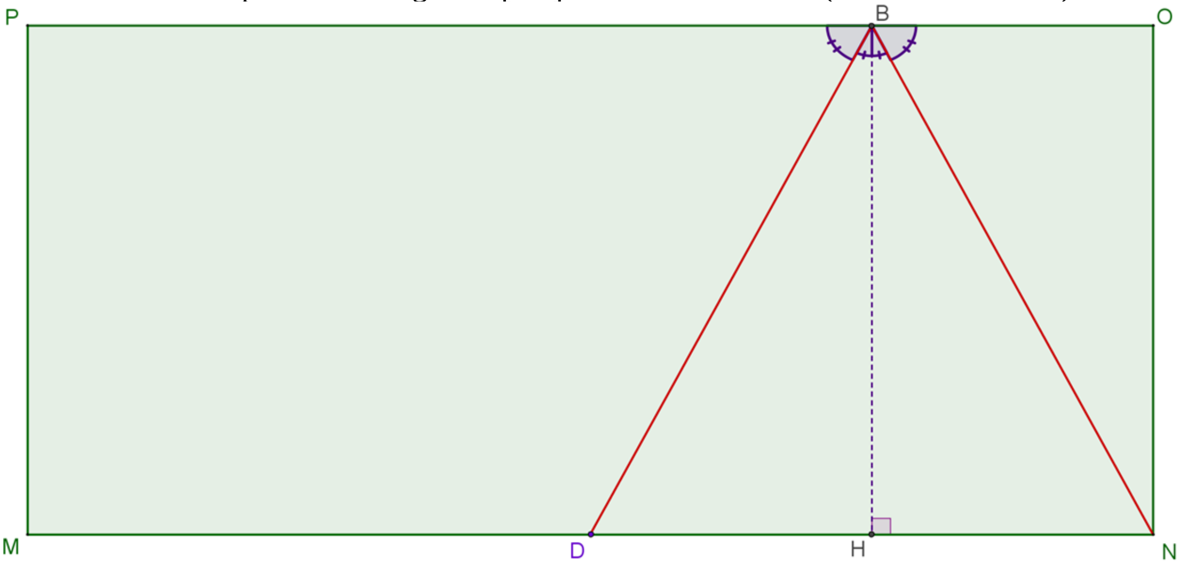
p et p + 2 sont tous les deux impairs, donc ne sont pas divisibles par 2.
L'un de ces nombres a une somme de chiffres paire, il ne peut donc pas être Harshad.

b) Les couples de terminaisons incompatibles sont :
09-11 ; 19-21 ; … ; 89-91.
Le plus grand « vide » possible est la série 90 ; 91 ; … ; 09 ; 10 qui a une longueur 21.
Il existe donc au maximum 21 nombres Harshad consécutifs.

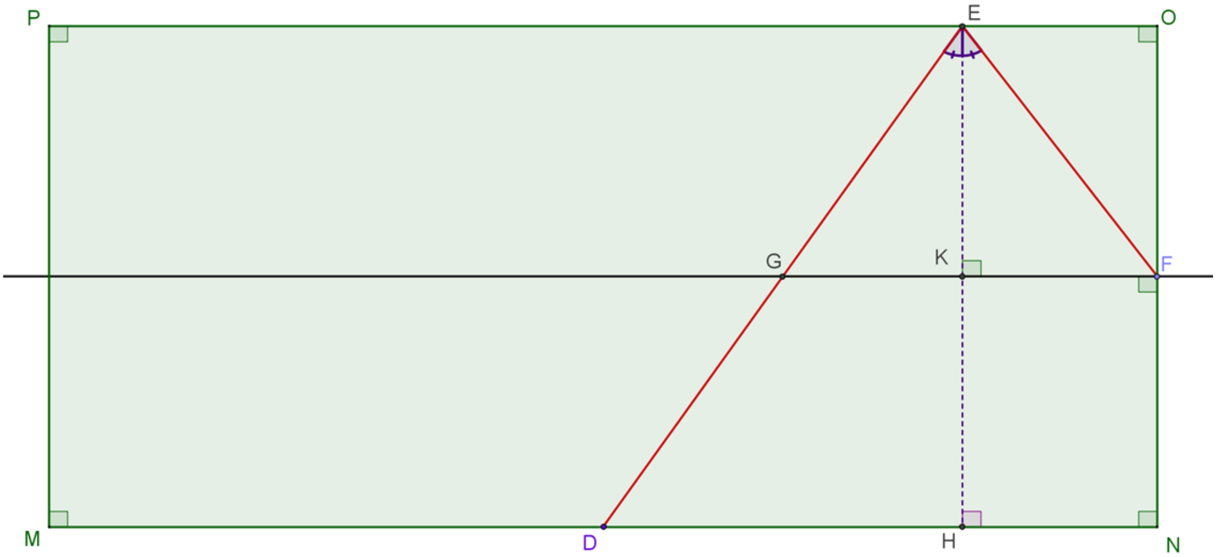
Remarque : le théorème de Grundman ramène ce nombre maximum à 20 (démonstration plus difficile).
Grundman a montré l'existence d'une telle liste de 20 Harshad consécutifs ; les nombres de cette liste ont
44 363 342 786 chiffres…

EXERCICE 2. BILLARD RECTANGULAIRE

1. La bille est placée initialement en D, milieu de $[MN]$.
   a. Si on vise un point B du rail $[PO]$ et que la bille atteint N, suivant les règles de la réflexion, la perpendiculaire à $[PO]$ en B est la bissectrice de l'angle $\widehat{DBN}$ et confondue avec la hauteur issue de B dans le triangle ABN.
   Le triangle DBN est donc isocèle en B, et la droite (HN) est la médiatrice de $[DN]$ ($DN = \frac{300}{2} = 150$ cm).
   Il faut donc viser le point B du segment $[PO]$ situé à 75 cm de O ($DH = HN = BO$.)



   b. Quel point du rail $[PO]$ faut-il viser pour que la bille atteigne en une bande le milieu du rail $[NO]$?



   Le point E étant le point du rail $[PO]$ visé, le point F étant le milieu du rail $[NO]$ à atteindre, le point G étant le point d'intersection de la médiatrice du segment $[NO]$ et du segment $[DE]$, par les arguments précédents, on a cette fois :

$$GEF \text{ isocèle en } E \text{ et } GK = KF.$$

   Par ailleurs, dans le triangle DEH, $G \in [DE]$, K est le milieu de $[EH]$, et $(GK)//(DH)$, donc, par la réciproque du théorème des milieux, $DH = 2GK$.

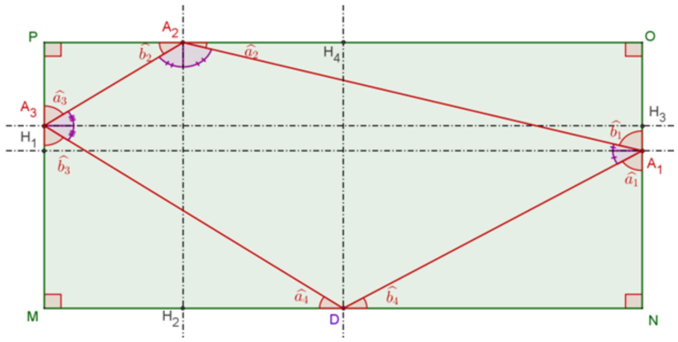
   Enfin, $EO = HN = KF = GK$ et $DN = DH + HN$, donc : $EO = \frac{DN}{3} = \frac{150}{3} = 50$ cm.
   Il faut donc viser le point E du segment $[PO]$ situé à 50 cm de O.

Quel point du rail $[NO]$ faut-il viser pour que la bille revienne à son point de départ en trois bandes (c'est-à-dire après avoir touché exactement trois rails) ?

Il est assez aisé de deviner que la ligne brisée joignant les milieux des trois rails répond à la question, on viserait donc le milieu du rail $[NO]$, puis de vérifier que cette trajectoire convient. On peut cependant montrer que c'est l'unique solution (la démonstration permettra ensuite de répondre immédiatement à la question 2.b.) :

Considérons une hypothétique trajectoire à trois bandes dans laquelle la bille part de D, touche les rails en $A_1 \in [NO]$, $A_2 \in [OP]$, $A_3 \in [PM]$ puis revient en D.

- <u>Schéma</u> :



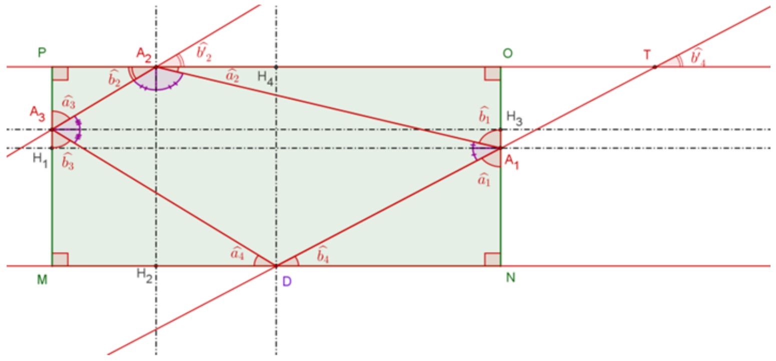
Les droites en traits tiretés sont des perpendiculaires aux rails.

Par les règles de la réflexion, tous les angles d'un même couple $(\widehat{a_i}; \widehat{b_i})$ $(1 \leq i \leq 3)$ sont de même mesure car leurs complémentaires sont de même mesure.
Mais aussi en tant que couple d'angles aigus aux sommets d'un même triangle rectangle, chaque couples $(\widehat{b_i}; \widehat{a_{i+1}})$ $(1 \leq i \leq 3)$ est aussi un couple d'angles complémentaires. Et il en est de même pour le couple $(\widehat{b_4}; \widehat{a_1})$.
Il s'ensuit les égalités :

$$(1)\ \widehat{b_4} = \widehat{a_2} = \widehat{b_2} = \widehat{a_4} \quad \text{et} \quad \widehat{a_1} = \widehat{b_1} = \widehat{a_3} = \widehat{b_3}.$$

Par ailleurs, en considérant les droites parallèles (PO) et (MN), et la droite (D, A_1) sécante à (MN) en D, et à (PO) en T, on a l'égalité des mesures des angles correspondants $\widehat{b'_4}$ et $\widehat{b_4}$.
Et en considérant les droites (PO) et (A_2A_3), on a l'égalité des mesures des angles aux sommets $\widehat{b'_2}$ et $\widehat{b_2}$.
En combinant avec les égalités (1), il vient que $\widehat{b'_2} = \widehat{b'_4}$, c'est-à-dire qu'on a une égalités des mesures des angles correspondants relativement aux droites (DA_1) et (A_2A_3) coupées par la sécante (PO).
On en déduit que les côtés opposés $[DA_1]$ et $[A_2A_3]$ dans le quadrilatère $DA_1A_2A_3$ sont parallèles.
On montre de même que les côtés opposés $[A_1A_2]$ et $[A_3D]$ sont parallèles.

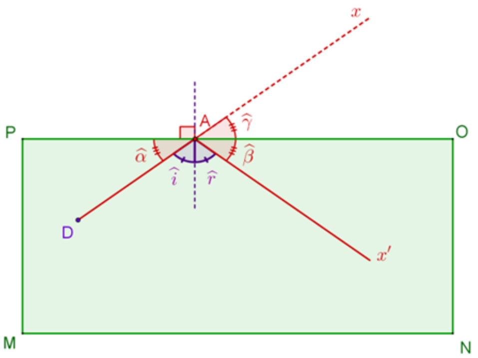
La trajectoire fermée en trois bandes D, A_1, A_2, A_3 forme donc un parallélogramme.



Le point D étant le milieu de $[MN]$, et les angles $\widehat{a_4}$ et $\widehat{b_4}$ même mesure, les triangles rectangles DNA_1 et DMA_3 sont symétriques par rapport à la médiatrice du rail $[MN]$, ce qui donne l'égalité des longueurs DA_1 et DA_3. Le parallélogramme $DA_1A_2A_3$ est donc un losange. Les triangles DNA_1 et A_1OA_2 étant rectangles et semblables car $\widehat{a_1} = \widehat{b_1}$ et $\widehat{b_4} = \widehat{a_2}$, comme aussi leurs hypoténuses sont de même longueur ($DA_1 = A_1A_2$, côtés consécutifs du losange $DA_1A_2A_3$), les côtés NA_1 et A_1O sont de même longueur.

On en conclut que le point N est nécessairement le milieu du rail $[NO]$, c'est le point qu'il faut viser.
Les résultats précédents assurent que suivant les règles de la réflexion, la bille retournera en D.

2. La construction de la trajectoire de la bille au-delà d'un rebond, conformément aux règles de la réflexion peut se faire par symétrie axiale par rapport au rail heurté.
Ainsi, si la bille part d'un point D et heurte un rail en A, sa poursuite de trajectoire (demi-droite $[A, x")$ est le symétrique de la demi-droite $[Ax)$, prolongement du segment $[DA]$:

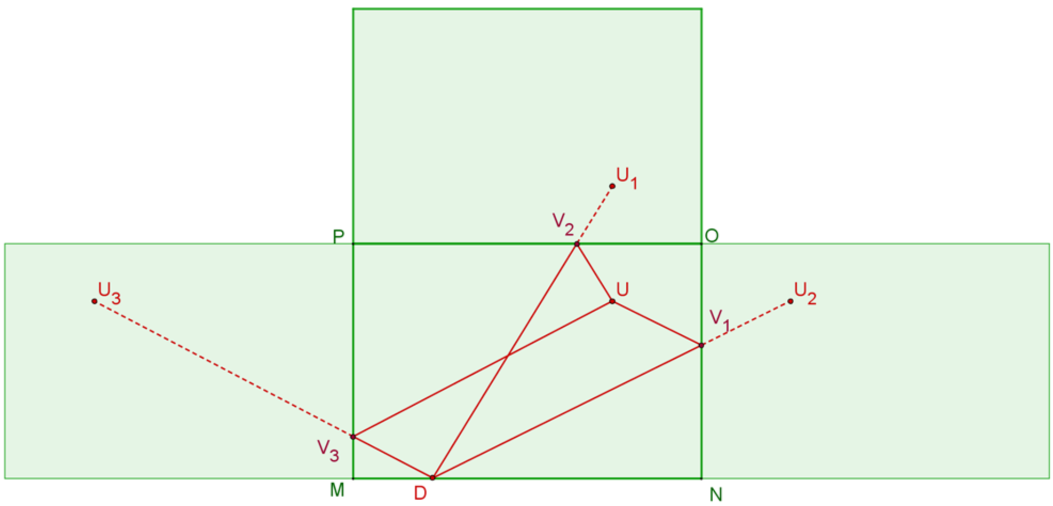


En effet, suivant les lois de la réflexion, les angles $\hat{\alpha}$ et $\hat{\beta}$, complémentaires respectifs des angles de même mesure $\hat{\imath}$ et $\hat{r}$, sont encore de même mesure, tandis que les angles $\hat{\beta}$ et $\hat{\gamma}$ sont de même mesure, par symétrie.

En cas de rebonds multiples, on peut, de la même façon, obtenir la trajectoire complète, en multipliant les symétries à partir du prolongement rectiligne de la trajectoire initiale.

Ceci permet de répondre aisément aux questions 1.a., 1.b. et 1.c. et plus encore aux questions 2.a. et 2.b.

a. On note D la position initiale de la bille, et U le point à atteindre.



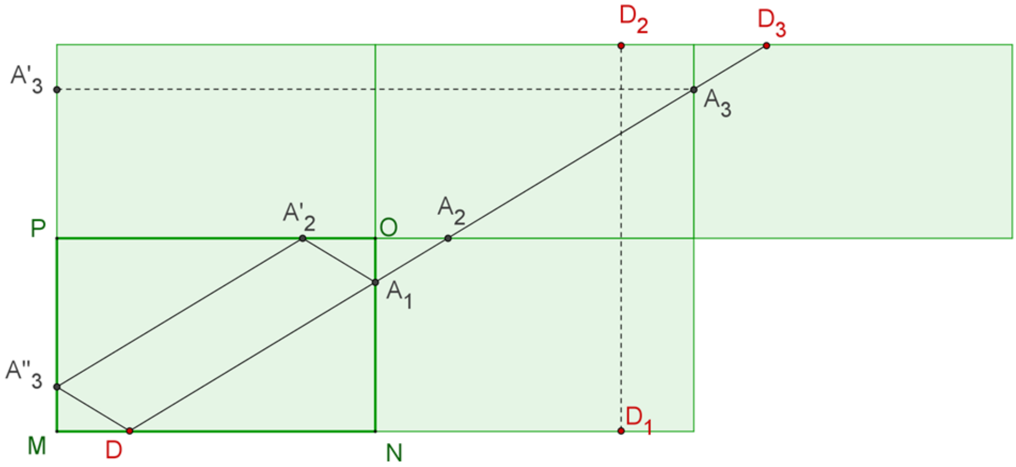
Sur la figure ci-dessus, où l'on a placé les points U_1, U_2, U_3 symétriques respectifs du point U à atteindre par rapport aux rails $[NO]$, $[OP]$ et $[PM]$, atteindre le point U en une bande sur l'un de ces rails, revient à atteindre l'un des symétriques U_1, U_2, U_3 par une trajectoire rectiligne rencontrant le rail par rapport auquel le symétrique est construit.

Il y a sur cet exemple trois façons d'atteindre le point U.

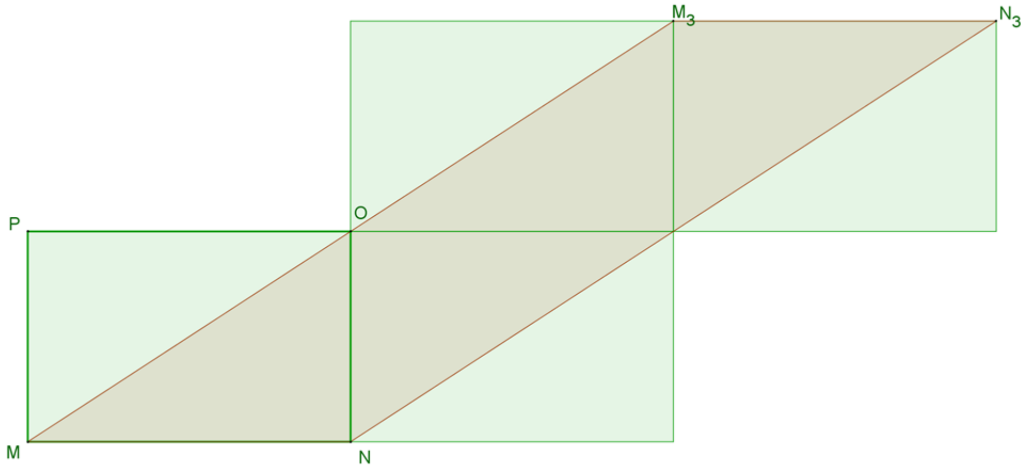
S'il s'agit de savoir si l'on peut atteindre un point quelconque du billard, on cherchera s'il est possible d'atteindre un symétrique quelconque par une trajectoire rectiligne rencontrant la rail par rapport auquel est construit le symétrique.

Où que soit situé le point D le long du rail $[MN]$, il est possible d'atteindre tout point situé sur n'importe où à l'intérieur des trois rectangles figurant les symétriques de la surface de jeu par rapport à chacun des rails $[NO]$, $[OP]$ et $[PM]$, il est donc possible d'atteindre tout point U de la surface de jeu en une bande, et ce de trois façons possibles toujours.

b. On peut répondre en reprenant les résultats du 1.c. (si l'on a cherché toutes les trajectoires possibles – on reprend le résultat selon lequel la trajectoire est nécessairement un parallélogramme ; si l'on a « intuité » qu'il s'agissait au 1.b. d'un losange, ce n'est pas possible). Ci-dessous, un autre méthode.
S'il s'agit de revenir au point initial en trois bandes, on cherchera des solutions en étudiant la possibilité de trajectoires rectilignes traversant trois symétriques de la surface jeu par rapport à des rails et atteignant l'image de D par la composée de ces trois symétries.
Ci-dessous la façon de revenir en un point D du rail $[MO]$ en trois bandes avec rebonds en A_1, A_2' et A_3'' :



La même construction est possible à partir de tout point D situé le long du rail $[MN]$, puisque le parallélogramme NN_3MM_3 est inclus dans la surface de jeu et les trois surfaces symétriques à considérer, et pour tout point D du rail $[MN]$, le point D_3 construit comme au-dessus par composition de trois symétries est tel que le segment $[DD_3]$ est inclus dans ce parallélogramme :



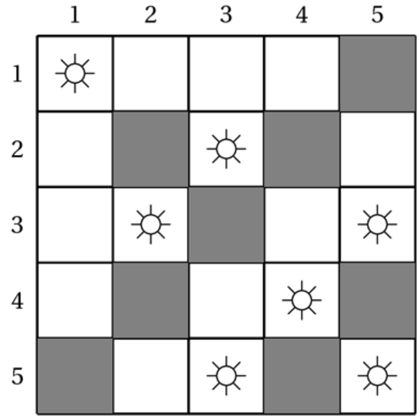
EXERCICE 3. LES LAMPADAIRES

1/ Il suffit de placer trois lampadaires pour éclairer l'ensemble du labyrinthe.

On peut les placer par exemple dans les cases $(4,1)$, $(2,3)$ et $(4,5)$.

2/ Il suffit de placer cinq lampadaires : par exemple sur toute la première ligne.

3/ Un exemple possible :



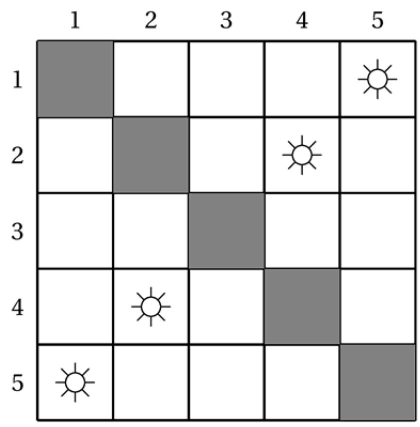
4/ Figure 2 : Trois lampadaires suffisent : en $(1,1)$, $(3,3)$ et $(5,5)$.

Figure 3 : Quatre lampadaires suffisent : en $(1,2)$, $(4,1)$, $(5,4)$ et $(2,5)$.

5/ Un algorithme possible :

```
Variables :        i, j et k sont des entiers naturels.
                   L est une liste.
Initialisation :   Affecter à k la valeur 0.
Traitement :       Pour i allant de 1 à 5
                   |  Pour j allant de 1 à 5
                   |  |  Si L[i, j] == 0 alors
                   |  |  |  Affecter à k la valeur 1
                   Si k == 0 alors
                   |  Afficher « Le labyrinthe est entièrement éclairé »
                   Sinon
                   |  Afficher « Le labyrinthe n'est pas entièrement éclairé »
```

6/ **a)** L'algorithme génère le plan suivant :



b) Quatre lampadaires suffisent.

EXERCICE 4. LES TRIANGLES OLYMPIQUES

1/ Le triangle $3-4-5$ convient.

2/ **a)** $c^2 = a^2 + b^2 \iff c^2 = b + c + b^2 \iff c^2 - c - \left(b^2 + b\right) = 0$.

Cette équation du second degré en la variable c admet deux racines : $-b$ et $b+1$.

$c = -b$ étant impossible, on déduit $c = b+1$ donc b et c sont consécutifs.

b) $a^2 = b + c = 2b + 1 \iff 2b = a^2 - 1$.

De même, $a^2 = b + c = 2c - 1 \iff 2c = a^2 + 1$.

c) Supposons a pair, alors $a^2 - 1$ est impair, contradiction avec $2b = a^2 - 1$.

d) $a = b$ amène une contradiction immédiate.

e) Si $a = 2p + 1$ avec p entier naturel non nul alors $2b = 4p^2 + 4p$ donc $b = 2p^2 + 2p$ et $2c = 4p^2 + 4p + 2$ donc $c = 2p^2 + 2p + 1$ et T existe.

3/ **a)** On a $\mathscr{A} = \dfrac{a \times b}{2} = \dfrac{a(a^2-1)}{4}$ car $2b = a^2 - 1$ (question 2/b).

b) On cherche à résoudre l'inéquation $a\left(a^2 - 1\right) \leqslant 8052$. La calculatrice fournit $a \leqslant 20$. Le nombre a étant un impair supérieur ou égal à 3, il y a 9 solutions.

4/ On note A : « les trois jetons définissent un triangle olympique de côtés de mesure a, b et c ». Il y a 100^3 cas possibles. Il y a 6 cas favorables à la réalisation de l'événement A. En effet, a est un nombre impair et comme $2c = a^2 + 1 \leqslant 200$ on déduit $a \leqslant 14$.

Ainsi, $a \in \{3; 5; 7; 9; 11; 13\}$ et donc $P(A) = \dfrac{6}{100^3}$.