OLYMPIADES MATHÉMATIQUES
LYCÉE, PREMIÈRE

ACADÉMIE DE NANTES
2020

SUJET + CORRIGÉ

20e OLYMPIADES DE MATHÉMATIQUES

Mercredi 11 mars 2020[1], 2 énoncés (national et académique) en 4 heures, élèves de première générale et technologique[2] et de début de terminale[3], inscription auprès de votre professeur de mathématiques avant les vacances d'hiver selon académie.

Liberté • Égalité • Fraternité
RÉPUBLIQUE FRANÇAISE
MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE

MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE ET DE LA JEUNESSE

OLYMPIADES NATIONALES DE MATHEMATIQUES 2020

Métropole-Europe-Afrique-Orient-Inde

L'épreuve se déroule en deux parties indépendantes de deux heures chacune. Les énoncés des deux parties sont donc séparés et distribués séparément à des moments différents.

La première partie est constituée des exercices nationaux. À son issue, les copies sont ramassées et une pause de cinq à quinze minutes est prévue, avant la seconde partie, constituée des exercices académiques.

L'usage de la calculatrice **avec le mode examen activé** est autorisé.

L'usage de la calculatrice **sans mémoire**, « type collège », est autorisé.

Il est conseillé aux candidats qui ne pourraient formuler une réponse complète à une question d'exposer le bilan des initiatives qu'ils ont pu prendre.

Les énoncés doivent être rendus au moment de quitter définitivement la salle de composition.

La seconde partie de l'épreuve contient trois exercices.

Les candidats de voie générale ayant suivi l'enseignement de spécialité de mathématiques doivent traiter les exercices académiques 1 et 2.

Les autres candidats doivent traiter les exercices académiques 1 et 3.

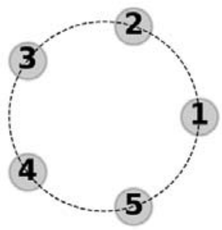
Exercices académiques

Mercredi 11 mars 2020 (10 h 10 – 12 h 10)

Exercice académique 1 (à traiter par tous les candidats)

Dernier à table

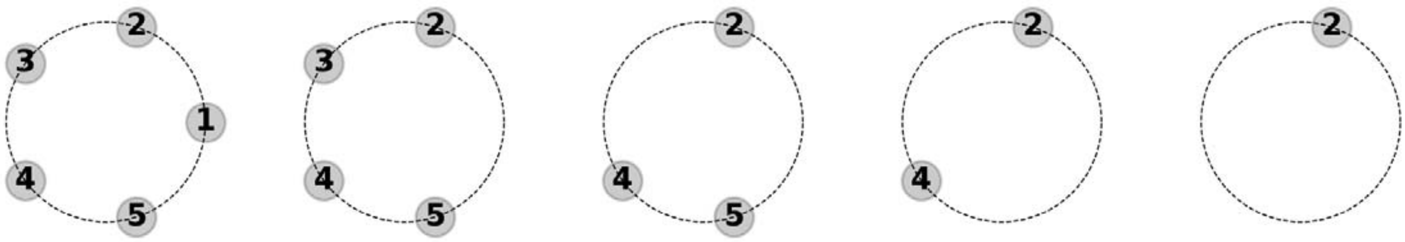
N est un nombre entier supérieur ou égal à 2.
N personnes prennent place en cercle autour d'une table ronde.
Elles sont numérotées de 1 à N dans le sens contraire des aiguilles d'une montre, comme indiqué par la figure suivante pour $N = 5$:



La personne portant le numéro 1 se lève et s'en va. La personne immédiatement à sa droite reste assise. Puis la personne située à la droite de cette dernière se lève et s'en va. Ce procédé se répète jusqu'à ce qu'il ne reste plus qu'une seule personne à table.

Exemple avec $N = 5$:

On retirera successivement les personnes numéro 1, numéro 3 et numéro 5 au premier tour de table. On rencontre ensuite la personne numéro 2 qui reste, puis la personne numéro 4 est retirée. La dernière personne à table est donc la personne numéro 2.



1. Justifier que, pour $N = 6$, la quatrième personne retirée porte le numéro 2 et celle qui reste en dernier porte le numéro 4.

2. On note $f(N)$ le numéro de la dernière personne qui reste, lorsque N personnes étaient présentes au début. Ainsi $f(5) = 2$ et $f(6) = 4$. On montre de même que $f(16) = 16$.
   Donner, sans justification, les valeurs de $f(N)$ pour N variant de 2 à 16.

3. Pour cette question $N = 1\,024$.
   a. Justifier qu'à l'issue du premier tour de table la prochaine personne retirée porte le numéro 2.
   b. À l'issue du premier tour de table il reste donc 512 personnes.
   Justifier que $f(1\,024) = 2\,f(512)$.
   c. Calculer $f(1\,024)$.

4. Pour cette question $N = 63$.

a. Justifier qu'à l'issue du premier tour de table la prochaine personne retirée porte le numéro 4.

b. À l'issue du premier tour de table, il reste donc 31 personnes.
Justifier que $f(63) = 2\,(f(31) + 1)$.

c. Calculer $f(63)$.

5. Calculer $f(65)$.

6. Pour cette question on prend $N = 2\,020$.

a. Calculer $f(2\,020)$.

b. Une personne qui compte vite s'est positionnée pour être la dernière à rester, mais on décide de tourner dans l'autre sens, en commençant par le numéro 1.
Combien de personnes quitteront la table avant celle qui compte vite ?

7. Soit n un nombre entier supérieur ou égal à 1.
Démontrer la formule $f(2^n + p) = 2\,p$, pour p nombre entier naturel inférieur à 2^n.

8. Déterminer les nombres entiers N inférieurs à $2\,020$ vérifiant $f(N) = 100$.

9. Déterminer tous les nombres entiers N tels que $f(N) = N$.

Excercice académique 2
(à traiter par les candidats de voie générale ayant choisi la spécialité mathématiques)

Chaîne-produit

Dans tout l'exercice, n est un entier naturel tel que $n \geq 3$.
On place sur un cercle n nombres réels en les associant à des points de ce cercle.
Dans cet exercice, on appelle chaîne-produit toute liste de n nombres réels vérifiant les deux règles suivantes :

- Règle 1 : les nombres sont tous strictement positifs et différents deux à deux.
- Règle 2 : chaque nombre est égal au produit des deux nombres placés avant et après lui sur le cercle.

Un exemple :

$\left(3; 4; \frac{4}{3}; \frac{1}{3}; \frac{1}{4}; \frac{3}{4}\right)$ est une chaîne-produit car elle est formée de six nombres strictement positifs, différents deux à deux et on a les six égalités :

$$3 = \frac{3}{4} \times 4\ ;\ 4 = 3 \times \frac{4}{3}\ ;\ \frac{4}{3} = 4 \times \frac{1}{3}\ ;\ \frac{1}{3} = \frac{4}{3} \times \frac{1}{4}\ ;\ \frac{1}{4} = \frac{1}{3} \times \frac{3}{4} \text{ et } \frac{3}{4} = \frac{1}{4} \times 3.$$

La chaîne précédente pourra aussi être notée en choisissant un autre point de départ sur le cercle ou l'autre sens de parcours. Par exemple :

$$\left(4; \frac{4}{3}; \frac{1}{3}; \frac{1}{4}; \frac{3}{4}; 3\right) \text{ ou } \left(3; \frac{3}{4}; \frac{1}{4}; \frac{1}{3}; \frac{4}{3}; 4\right).$$

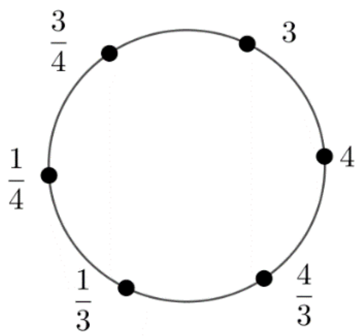


Figure 1

On dit qu'une chaîne-produit est de longueur n si elle contient n nombres avec les deux règles précédentes.
On obtient sa somme en additionnant les nombres qui la composent.
Ainsi, la chaîne de l'exemple a pour longueur 6 et pour somme $3 + 4 + \frac{4}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{3}{4} = \frac{29}{3}$.

A. Un autre exemple.

1. Compléter la liste $(2; 5; \ldots)$ pour qu'elle soit une chaîne-produit puis donner sa longueur et sa somme.

2. Une chaîne-produit peut-elle contenir le nombre 1 ? Si oui, donner un exemple, sinon expliquer pourquoi.

B. Chaîne-produit contenant deux réels donnés.

On considère deux nombres réels a et b strictement positifs et on souhaite compléter la liste $(a; b; \ldots)$ pour qu'elle soit une chaîne-produit.

3. Justifier que a est différent de 1 puis que b ne peut être égal à aucune des valeurs ci-dessous :

$$1\ ;\ a\ ;\ a^2\ ;\ \sqrt{a} \text{ ou } \frac{1}{a}.$$

4. Faire une figure et la compléter.

5. Donner la longueur puis la somme de la chaîne-produit $(a; b; \ldots)$ ainsi complétée.

C. Chaîne-produit contenant plusieurs nombres entiers et à somme entière.

On dit qu'une chaîne-produit est entière si elle contient au moins deux nombres entiers et si sa somme est un nombre entier.

6. a. Montrer qu'il n'existe pas de chaîne-produit entière contenant plus de trois entiers.
b. Déterminer toutes les chaîne-produits à somme entière contenant trois nombres entiers.

7. Existe-t-il une chaîne-produit contenant le nombre 6 et de somme 23 ?

8. a. Montrer que si une chaîne-produit contient exactement deux entiers a et b alors ces entiers sont placés l'un à côté de l'autre sur le cercle.
b. Déterminer toutes les chaîne-produits à somme entière contenant exactement deux entiers inférieurs à 100. (On pourra répondre à cette question en produisant un algorithme).
c. Déterminer toutes les chaîne-produits qui contiennent le nombre 611 et dont la somme est un nombre entier.

D. Chaîne-produit contenant deux réels x et $x + 1$.

Soit x un réel strictement positif et différent de 1.

9. On considère une chaîne-produit qui contient les deux réels x et $x + 1$ placés l'un à côté de l'autre sur le cercle.
Montrer qu'alors la somme de la chaîne est strictement supérieure à 7.

10. Montrer qu'il existe une chaîne-produit contenant les deux réels x et $x + 1$ ayant une somme inférieure à 6,5 et faire la figure correspondante.

Exercice académique 3
(à traiter par les candidats n'ayant pas suivi la spécialité de mathématiques de voie générale)

Rectangle mosaïque

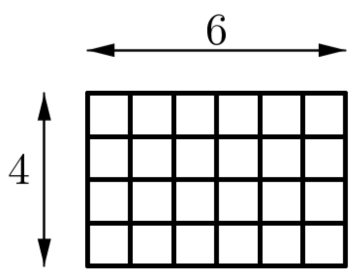
Une unité de longueur est choisie.
Étant donnés deux réels a et b avec $0 < a \leq b$, on note $R(a\,;b)$ le rectangle de largeur a et de longueur b.
Étant donné un réel strictement positif x, dire qu'un rectangle est une ***x*-mosaïque** signifie que les deux conditions suivantes sont vérifiées :

- x est <u>strictement</u> inférieur à la largeur du rectangle ;
- on peut quadriller le rectangle à l'aide de carrés de côté x.

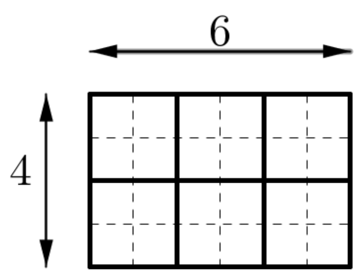
Les carrés de côtés x sont alors appelés ***x*-carreaux**.

<u>Exemples</u> :

$R(4\,;6)$ est une 1-mosaïque.
Le nombre de 1-carreaux est 24.

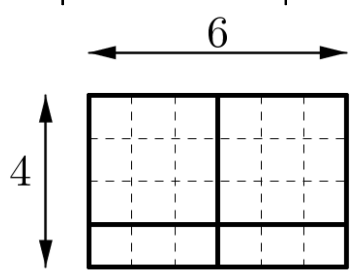


$R(4\,;6)$ est une 2-mosaïque.
Le nombre de 2-carreaux est 6.

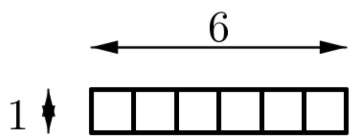


<u>Contre-exemples</u> :

$R(4\,;6)$ n'est pas une 3-mosaïque.



$R(1\,;6)$ n'est pas une 1-mosaïque puisque 1 est la largeur du rectangle.



Dire qu'un rectangle est une **mosaïque** signifie qu'il existe un réel strictement positif x tel que ce rectangle soit une x-mosaïque.

1. Montrer que $R(7\,;9)$ est une 0,5-mosaïque.

2. Justifier que $R(3\,;\ 4{,}6)$ est une mosaïque. Même question avec $R\left(\sqrt{45}\,;\sqrt{80}\right)$.

3. Montrer que tous les carrés sont des mosaïques.

Pour les questions de 4) à 8), a et b sont deux <u>entiers naturels</u> avec $0 < a \leq b$.

4. Dresser la liste des entiers naturels k non nuls pour lesquels $R(2\,020\,;2\,222)$ est une k-mosaïque.

5. Soit k, un entier naturel non nul, diviseur commun de a et b. $R(a\,;b)$ est-il toujours une k-mosaïque ?

6. Donner une condition nécessaire et suffisante portant sur a et b pour que $R(a\,;b)$ soit une 2-mosaïque.

7. Déterminer le nombre de couples $(a\,;b)$ tels que $R(a\,;b)$ soit une 2-mosaïque d'aire 2 020.

8. Déterminer le nombre de couples $(a\,;b)$ tels que $R(a\,;b)$ soit une 2-mosaïque de périmètre 2 020.

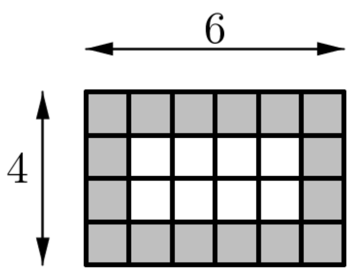
Dans la suite de l'exercice, a et b sont deux <u>nombres réels</u> avec $0 < a \leq b$.

9. Montrer que si $R(a\,;b)$ est une mosaïque, alors $\frac{b}{a}$ peut s'écrire sous la forme d'un quotient de deux entiers naturels non nuls. La réciproque est-elle vraie ?

10. Donner un couple $(a\,;b)$ tel que $R(a\,;b)$ ne soit pas une mosaïque.

Dans la suite, on considère un réel x strictement positif tel que $R(a\,;b)$ soit une x-mosaïque.
On note N le nombre total de x-carreaux et B le nombre de x-carreaux sur le contour du rectangle.
L'aire de $R(a\,;b)$ est notée A et son périmètre P.

<u>Dans l'exemple ci-dessous</u> :



Pour la 1-mosaïque $R(4\,;6)$, on obtient :
$N = 24$ et $B = 16$.

11. Prouver que dans le cas général, on a : $\frac{N}{(B+4)^2} = \frac{A}{P^2}$.

12. Montrer que : $\frac{ab}{4(a+b)^2} - \frac{1}{16} = \frac{-(a-b)^2}{16(a+b)^2}$.

13. En déduire l'inégalité $B \geq 4\left(\sqrt{N} - 1\right)$. Quels sont les cas d'égalité ?

14. On suppose qu'un rectangle est une mosaïque de périmètre $P = 2\,020$ avec $N = 1\,020\,100$ et $B = 4\,036$.
Quelles sont les dimensions a et b de ce rectangle ?

www.freemaths.fr

OLYMPIADES MATHÉMATIQUES
LYCÉE, PREMIÈRE

CORRECTION !

Épreuve ▪ 2020

CORRECTION OLYMPIADES

EXERCICES ACADÉMIQUES

Nantes 2020

Avertissement : *Ce sujet est réservé à des candidats déjà bien aguerris. Son esprit se rapproche davantage de l'esprit du Concours Général des classes de Terminale que de celui des Olympiades de la classe de Première. La situation étudiée dans l'exercice 1 est connue sous le nom de « problème de Josèphus ».*

Exercice 1 : Dernier à table

Remarque 1. Comparons ce qu'il se passe au premier tour suivant que N est un nombre pair, de la forme $N=2k$, ou bien un nombre impair, de la forme $N=2k+1$.

Dans les deux cas, il reste après ce tour les numéros $2, 4, ..., 2k$.

- Si $N=2k$, le dernier du premier tour à partir est le numéro $2k-1$, le numéro $2k$ reste et le premier à partir au deuxième tour est le numéro 2. Le premier à rester est le 4.
- Si $N=2k+1$, le dernier à partir au premier tour est le numéro $2k+1$. Au deuxième tour, le premier à rester est le numéro 2 et le premier à partir est le numéro 4.

Remarque 2. À la fin d'un tour donné, et au début du tour suivant, plusieurs cas de figure se présentent :

	Il reste un nombre pair de personnes $n_1, n_2, ..., n_{2k-1}, n_{2k}$	Il reste un nombre impair de personnes $n_1, n_2, ..., n_{2k}, n_{2k+1}$
Au tour précédent, la personne à gauche de n_1 était la dernière à rester	n_1 part, de même que les rangs impairs. Les rangs pairs restent, en particulier le dernier n_{2k} .Au tour suivant n_2 va partir. Le premier à rester sera n_4. **Scénario 1**	n_1 part, de même que les rangs impairs, en particulier le dernier n_{2k+1}. Les rangs pairs restent. Au tour suivant n_2 va rester. Le premier à partir sera n_4. **Scénario 2**
Au tour précédent, la personne à gauche de n_1 était la dernière à partir	n_1 reste, de même que les rangs impairs. Les rangs pairs partent, en particulier le dernier n_{2k}. Au tour suivant n_1 va rester. **Scénario 3**	n_1 reste, de même que les rangs impairs, en particulier le dernier n_{2k+1}. Au tour suivant n_1 va partir. Le premier à rester est n_3. **Scénario 4**

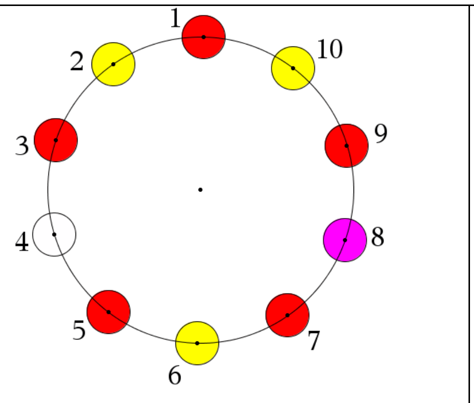
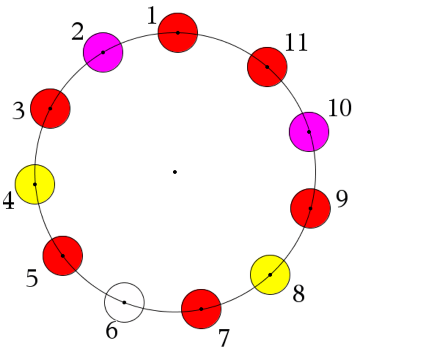
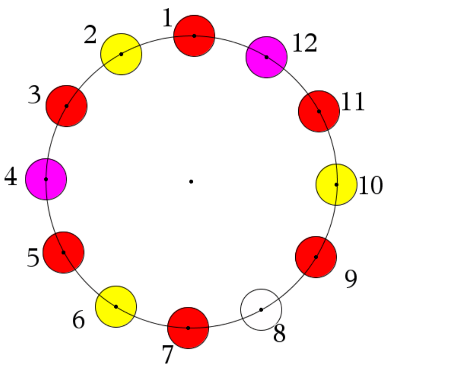
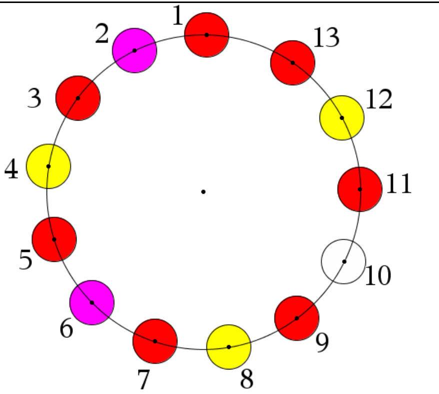
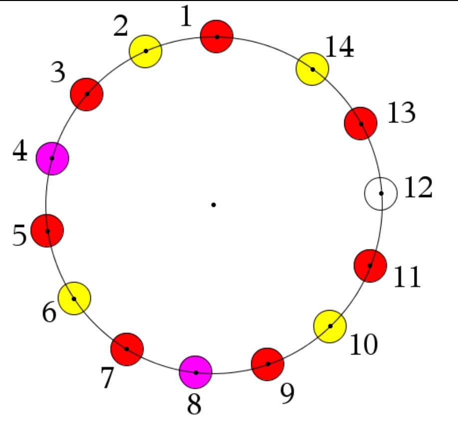
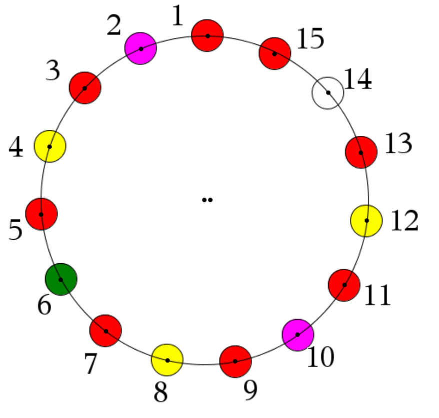
Le tour initial se comporte soit comme le **Scénario 1** soit comme le **Scénario 2**.

1. Si $N = 6$, le premier tour se déroule conformément au **Scénario 1**. Le numéro 6 est le dernier à rester au premier tour, puis le numéro 2 part et le numéro 4 reste.

2. Nous pouvons utiliser pour cette question la formule : $f\left(2^n + p\right) = 2p$, qui est gracieusement donnée dans la **question 7.** C'est sans conteste la meilleure stratégie.

N	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
$f(N)$	2	2	4	2	4	6	8	2	4	6	8	10	12	14	16

S'il avait fallu justifier les résultats, nous aurions pu nous aider d'un schéma. Voici quelques exemples : en rouge, les éliminés au premier tour, en jaune au deuxième, en magenta au troisième et en vert au quatrième. Le disque resté blanc est celui du « dernier à table ».

Les cas 10 et 11		
Les cas 12 et 13		
Les cas 14 et 15		

3. Le nombre 1024 est une puissance de 2, à savoir : $1024 = 2^{10}$. Plutôt que de raisonner sur le cas particulier 1024, nous proposons de raisonner sur le cas des puissances de 2 en général (ce qui nous servira ensuite).

Nous avons déjà vu que : $f(2) = 2$; $f(4) = 4 = 2^2$; $f(8) = 8 = 2^3$ et que $f(16) = 16 = 2^4$

La relation $f(2^n) = 2^n$ est d'ores et déjà vérifiée pour les exposants 1, 2, 3 et 4.

Supposons plus généralement que N soit une puissance de 2 d'exposant strictement positif.

3.a. Le premier tour se déroule conformément au **scénario 1** puisqu'il y a un nombre pair de numéros. À la fin de ce tour, il reste tous les numéros pairs de 2 à 2^n (donc 2^{n-1} numéros et en particulier le dernier 2^n) et au début du deuxième tour, la prochaine personne retirée porte le numéro 2.

C'est bien entendu le cas lorsque $N = 1024 = 2^{10}$.

3.b. Tous les numéros encore présents sont pairs, de 2 à $2^n = 2 \times 2^{n-1}$. Il est possible de procéder à une réindexation en divisant par 2 chacun des numéros. Si $2k$ est l'ancien numéro d'une personne (avec $k = 1, 2, ..., 2^{n-1}$), on attribue à cette personne le numéro k. Les conditions initiales relatives à une table de 2^{n-1} personnes sont exactement réunies (le nouveau numéro 1 quittera la table).

La dernière à partir est la même personne, son ancien numéro était $f(2^n)$ et son nouveau numéro est : $f(2^{n-1})$.

On en déduit la relation de récurrence : $f(2^n) = 2f(2^{n-1})$

Particulièrement : $f(1024) = 2f(512)$ en choisissant $n = 10$.

3.c. De proche en proche : $f(2^n) = 2^p f(2^{n-p})$ pour tout entier p tel que $1 \leq p \leq n-1$ d'où en fin de compte :

$f(2^n) = 2^{n-1} f(2) = 2^{n-1} \times 2 = 2^n$

Pour tout entier n strictement positif : $f(2^n) = 2^n$. Particulièrement : $f(1024) = 1024$.

4. On suppose que $N = 63$. Remarquons au passage que : $N = 63 = 2^6 - 1$.

4.a. Il y a un nombre impair de personnes et la première personne à partir est celle portant le numéro 1. Il s'agit du **scénario 2** : le numéro 63 part, le numéro 2 reste et le numéro 4 est le premier à partir.

4.b. Il reste les personnes portant les numéros $2, 4, ..., 62$ soit 31 personnes. Notons $2k$ $(k = 1, 2, ... 31)$ leurs différents index. On peut réindexer ces personnes, avec le changement d'index suivant : si $2k$ est l'ancien index,

avec $k = 1, 2..., 31$, le nouvel index est : $\begin{cases} j = \dfrac{2k-2}{2} \; si \; 2 \leq k \leq 31 \\ j = 31 \; si \; k = 1 \end{cases}$.

Les nouveaux numéros vont de 1 à 31 et le nouveau numéro 1 quitte la table (son ancien index était le 4).

Les conditions d'une expérience avec $31 = 2^5 - 1$ personnes sont réunies. La dernière personne à quitter la table est la même. Son ancien index était $f(63)$ et son nouvel index est $f(31) = \frac{f(63)-2}{2}$ d'où l'on déduit $f(63) = 2f(31) + 2 = 2(f(31)+1)$ ou peut-être mieux : $f\left(2^6 - 1\right) = 2\left(f\left(2^5 - 1\right)+1\right)$

4.c. En itérant ce même raisonnement : $f\left(2^5 - 1\right) = 2\left(f\left(2^4 - 1\right)+1\right) = 2\left(f(15)+1\right) = 30$.

Donc : $f(63) = 2\times 30 + 2 = 62$

5. Plutôt que de traiter le cas particulier $N = 65 = 2^6 + 1$, traitons un cas plus général. Supposons que l'entier N soit de la forme : $N = 2^n + 1$ où n est un entier strictement positif.

Nous avons déjà vu : $f(3) = f(5) = f(9) = 2$. Conjecturons que plus généralement : $f\left(2^n + 1\right) = 2$

Il y a 2^{n-1} numéros pairs et $2^{n-1} + 1$ numéros impairs.

- Le premier tour se déroule selon le **scénario 2**. À l'issue de ce tour, les numéros impairs sont éliminés. Il reste 2^{n-1} numéros (un nombre pair), et le premier numéro (c'est-à-dire le numéro 2) reste.
- Le second tour se déroule selon le **scénario 3.** Il reste 2^{n-2} numéros (un nombre pair) et le premier numéro (c'est-à-dire le numéro 2) reste.
- Désormais, les tours suivants se déroulent selon le même protocole, tous selon le **scénario 3**.

Il restera successivement 2^{n-3}, 2^{n-4},... numéros (un nombre pair) au troisième tour, quatrième tour,… Le numéro 2 est toujours présent.

Au bout du n^{e} tour, il ne reste que le numéro 2, c'est le « dernier à table » : Pour tout entier n strictement positif : $f\left(2^n + 1\right) = 2$. En particulier : $f(65) = 2$

*NB. Il paraît plus judicieux d'intervertir l'ordre des questions **6** et **7**.*

7. Soit n un entier strictement positif.

Dans cette question, il faut considérer que p est un nombre entier tel que $1 \le p \le 2^n$ (la formule ne fonctionne pas pour $p = 0$; en revanche : $f\left(2^{n+1}\right) = f\left(2^n + 2^n\right) = 2^{n+1} = 2^n + 2^n = f\left(2^n\right) + 2^n$, la formule fonctionne correctement pour $p = 2^n$, nous l'avons prouvé dans la **question 3**.

* Nous avons vu aussi dans la **question 5** que pour tout entier n strictement positif : $f\left(2^n + 1\right) = 2$. La formule fonctionne pour $p = 1$

** Supposons que l'entier N soit de la forme : $N = 2^n + 2$ avec n entier au moins égal à 2. Nous avons par exemple vu que : $f(4) = f(6) = f(10) = 4$

Il y a alors $2^{n-1}+1$ numéros pairs et $2^{n-1}+1$ numéros impairs.

Le premier tour se déroule selon le **scénario 1**. À l'issue de ce tour, les numéros impairs sont éliminés. Il reste $2^{n-1}+1$ numéros, le premier numéro (c'est-à-dire le numéro 2) part et le numéro 4 reste.

À cet instant, les conditions à la fin du premier tour du cas précédent (puissance de 2, plus 1) sont toutes réunies, à cela près que le premier numéro est le numéro 4. On peut s'y ramener exactement en retranchant 2 à tous les numéros. On en déduit : Pour tout entier $n \geq 2$: $f\left(2^n+2\right)-2=2$ et donc $f\left(2^n+2\right)=4$

Supposons enfin que l'entier N soit de la forme : $N=2^n+p$ où p est un entier tel que $3 \leq p < 2^n$. Examinons la situation lorsque le numéro 1 a quitté la table, le numéro 2 est resté et le numéro 3 va quitter la table.

Effectuons la réindexation : $j=k-2$ pour $3 \leq k \leq 2^n+p$ de sorte que la nouvelle indexation décrit l'ensemble $\{1, 2,...,2^n+p-2\}$, identiquement au cas où $N=2^n+(p-2)$

Le dernier à rester est le même numéro, c'est-à-dire que : $f\left(2^n+p\right)=f\left(2^n+(p-2)\right)+2$

De proche en proche, on se ramène à l'une ou l'autre des situations * ou ** :

- Si p est impair ($p=2q+1$) : $f\left(2^n+p\right)=f\left(2^n+2q+1\right)=f\left(2^n+1\right)+2\times 2q=4q+2=2p$
- Si p est pair ($p=2q$) : $f\left(2^n+p\right)=f\left(2^n+2q\right)=f\left(2^n+2\right)+2\times 2(q-2)=4+2(q-2)=4q=2p$

Quelle que soit la parité de p et pour $1 \leq p \leq 2^n$: $f\left(2^n+p\right)=2p$

6.a. Du fait que $2020=1024+996=2^{10}+996$, on déduit de la **question 7** que $f(2020)=1992$.

6.b. Si on « tourne dans l'autre sens » en commençant par le numéro 1, le numéro 1 quitte la table, le numéro 2020 reste, et le numéro 2019 quitte la table.

Effectuons la réindexation : $j=2020-k$ pour $1 \leq k \leq 2018$ et en affectant le nouvel index 2019 au numéro 2020. Les conditions initiales d'une table de 2019 personnes sont réunies. Il y a 1010 index impairs et 1009 index pairs. Le nouvel index du numéro 1992 est l'index 28.

- Premier tour : L'ancien numéro 1 et les 1010 nouveaux index impairs quittent la table (donc 1011 partants).
- Deuxième tour : les nouveaux index 4, 8, 12, 16 20, 24, 28, 32, … quittent la table. Il y a 6 partants avant l'index 28.

Il semble bien que, avant la « personne qui compte vite », il y ait 1017 partants.

8. Vu la formule universelle de la **question 7**, les entiers tels que $f(N)=100$ sont ceux, et seulement ceux, de la forme 2^n+50 où la puissance de 2 est plus grande que 50 (donc $n \geq 6$). Il s'agit des entiers 114, 178, 306, 562, 1074 (le prochain étant 2098, plus grand que 2020).

9. Toutes les puissances de 2 vérifient la relation $f(N)=N$.

Réciproquement, soit N un entier au moins égal à 3. Il existe un entier strictement positif n et un entier p vérifiant $0 \leq p < 2^n$ (inégalité large à gauche, stricte à droite, définition de p un peu différente de celle de la question **7**) tels que : $N=2^n+p$

- Si $p=0$, alors $N=2^n$ et $f(N)=N$.
- Sinon, $f(N)=2p$ et la relation $f(N)=N$ impliquerait : $2^n+p=2p$ soit $2^n=p$, égalité exclue par la définition de p dans cette question.

Par conséquent, les puissances de 2 sont les seuls entiers qui vérifient $f(N)=N$.

Exercice 2 : Chaîne-produit

Partie A : Un autre exemple

1. Soit la liste commençant par $(2\ ;5\ ;...)$. On cherche s'il est possible de la compléter en une chaîne-produit.

- Si x_3 est le troisième terme : $5 = 2 \times x_3$ et donc : $x_3 = \frac{5}{2}$.
- Si x_4 est le quatrième terme : $\frac{5}{2} = 5 \times x_4$ et donc : $x_4 = \frac{1}{2}$.
- Si x_5 est le cinquième terme : $\frac{1}{2} = \frac{5}{2} \times x_5$ et donc : $x_5 = \frac{1}{5}$.
- Si x_6 est le sixième terme : $\frac{1}{5} = \frac{1}{2} \times x_6$ et donc : $x_6 = \frac{2}{5} = \frac{1}{5} \times 2$. Ce sixième terme est le produit de son précédent et du premier terme : la chaîne-produit est bouclée.

Il s'agit de la chaîne-produit : $\left\{2\ ;5\ ;\frac{5}{2}\ ;\frac{1}{2}\ ;\frac{1}{5}\ ;\frac{2}{5}\right\}$ dont la longueur est égale à 6 et la somme à $\frac{53}{5}$

2. Supposons que le nombre 1 figure dans une chaîne-produit. En raison de l'invariance par permutation circulaire, on peut le choisir pour premier terme de la chaîne-produit. Si a est le deuxième terme, le troisième devrait d'après la **règle 2** être égal à a ce qui contredirait la **règle 1** (« nombres différents deux à deux »). Le nombre 1 ne peut pas figurer dans une chaîne-produit d'au moins trois nombres.

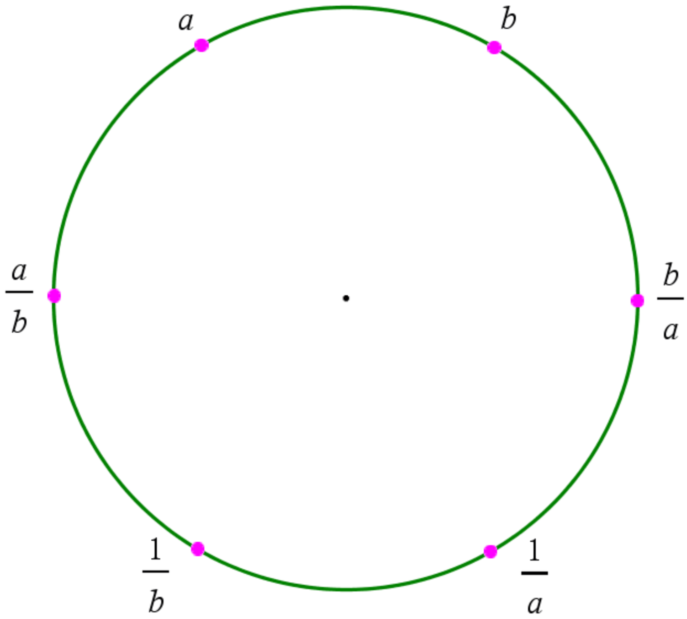
Partie B : Chaîne-produit contenant deux réels donnés

Soit a et b deux réels donnés, et la liste à compléter $(a\ ;b\ ;...)$

3. Les nombres a et b sont tous deux différents de 1 en application de la question **A.2**, ils sont distincts compte tenu de la **règle 1**.

- $b \neq a^2$ car en cas d'égalité, le troisième terme serait égal à a (contraire à la **règle 1**).
- $b \neq \sqrt{a}$ car en cas d'égalité, le troisième terme serait égal à $\frac{1}{\sqrt{a}}$, le quatrième à $\frac{1}{a}$, et le cinquième terme serait égal au troisième $\frac{1}{\sqrt{a}}$, (contraire à la **règle 1**).
- $b \neq \frac{1}{a}$ car en cas d'égalité, le troisième terme serait égal à $\frac{1}{a^2}$, le quatrième égal au deuxième $\frac{1}{a}$, (contraire à la **règle 1**).

4. Voici la figure attendue. Le calcul des termes successifs, comme nous l'avons fait en **A.1,** tient lieu de justification. Il est détaillé dans la question suivante.



On remarque que les éléments d'une telle chaîne-produit sont deux à deux inverses et que deux éléments inverses sont diamétralement opposés sur le cercle.

5. Calcul des termes successifs :

- Si x_3 est le troisième terme : $b = a \times x_3$ et donc : $x_3 = \dfrac{b}{a}$.
- Si x_4 est le quatrième terme : $\dfrac{b}{a} = b \times x_4$ et donc : $x_4 = \dfrac{1}{a}$.
- Si x_5 est le cinquième terme : $\dfrac{1}{a} = \dfrac{b}{a} \times x_5$ et donc : $x_5 = \dfrac{1}{b}$.
- Si x_6 est le sixième terme : $\dfrac{1}{b} = \dfrac{1}{a} \times x_6$ et donc : $x_6 = \dfrac{a}{b} = x_5 \times x_1$. Ce sixième terme est le produit de son précédent et du premier terme : la chaîne-produit est bouclée.

Il s'agit de la chaîne-produit : $\left\{a\,;b\,;\dfrac{b}{a}\,;\dfrac{1}{a}\,;\dfrac{1}{b}\,;\dfrac{a}{b}\right\}$ dont la longueur est égale à 6 et dont la somme est

$S(a, b) = a + b + \dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} + \dfrac{a}{b} + \dfrac{b}{a}$, expression que l'on peut écrire : $S(a, b) = a + b + \dfrac{a+b}{ab} + \dfrac{a^2+b^2}{ab}$.

Partie C : Chaîne-produit contenant plusieurs nombres entiers et à somme entière

6.a. La partie précédente a montré qu'une chaîne-produit était nécessairement constituée de six réels strictement positifs distincts qui sont inverses deux à deux et que ces réels ne pouvaient pas être égaux à 1. Les inverses des entiers susceptibles de figurer dans une telle chaîne ne sont pas des entiers : il ne peut pas y avoir plus de trois entiers dans une chaîne produit.

6.b. Vu que deux éléments inverses sont diamétralement opposés sur le cercle, si une chaîne-produit contient trois entiers, ces entiers se succèdent sur le cercle, et le deuxième entier est le produit des deux qui l'encadrent. Soit la chaîne produit : $\left\{a\,;ac\,;c\,;\frac{1}{a}\,;\frac{1}{ac}\,;\frac{1}{c}\right\}$ où a et c sont deux entiers, encadrant leur produit. Sans diminuer la généralité, nous pouvons supposer que $a<c$, de sorte que les trois entiers sont rangés ainsi : $a<c<ac$, et leurs inverses ainsi : $\frac{1}{a}>\frac{1}{c}>\frac{1}{ac}$. La somme de cette chaîne, qui contient trois entiers, est entière si et seulement si la somme de leurs trois inverses $\frac{1}{a}+\frac{1}{c}+\frac{1}{ac}$ est elle-même un nombre entier.

Compte tenu du rangement de ces inverses, $\frac{1}{a}+\frac{1}{c}+\frac{1}{ac}<\frac{3}{a}$. Pour que $\frac{1}{a}+\frac{1}{c}+\frac{1}{ac}$ puisse être un entier, il est nécessaire que $\frac{3}{a}>1$, c'est-à-dire que $3>a$. Nécessairement : $a=2$ et dans ce cas, la somme des trois inverses est : $\frac{1}{2}+\frac{1}{c}+\frac{1}{2c}=\frac{1}{2}+\frac{3}{2c}$. Cette somme est strictement plus petite que $\frac{1}{2}+\frac{3}{2\times 2}=\frac{5}{4}$

Si elle est entière, elle ne peut prendre que la valeur entière 1, ce qui a lieu lorsque $c=3$.

La seule chaîne-produit possible est la chaîne $\left\{2\,;6\,;3\,;\frac{1}{2}\,;\frac{1}{6}\,;\frac{1}{3}\right\}$, chaîne qui effectivement vérifie les conditions requises.

7. *Une chaîne contenant* 6 *et de somme* 23.

On peut supposer que 6 est le premier nombre de la chaîne, et alors soit x le troisième nombre.

La chaîne en question est : $\left\{6\,;6x\,;x\,;\frac{1}{6}\,;\frac{1}{6x}\,;\frac{1}{x}\right\}$.

La somme de cette chaîne-produit est : $S(6,\ 6x)=6+6x+x+\frac{1}{6}+\frac{1}{6x}+\frac{1}{x}=\frac{42x^2+37x+7}{6x}$.

Cette somme est égale à 23 si et seulement si : $42x^2+37x+7=23\times(6x)=138x$ c'est-à-dire si et seulement si x est solution de l'équation au second degré : $42x^2-101x+7=0$.

Cette équation (résolution laissée au lecteur) admet deux solutions : $x_1=\dfrac{1}{14}$ et $x_2=\dfrac{7}{3}$.

Cependant, ces deux solutions ne fournissent qu'une seule chaîne-produit vérifiant les conditions requises.

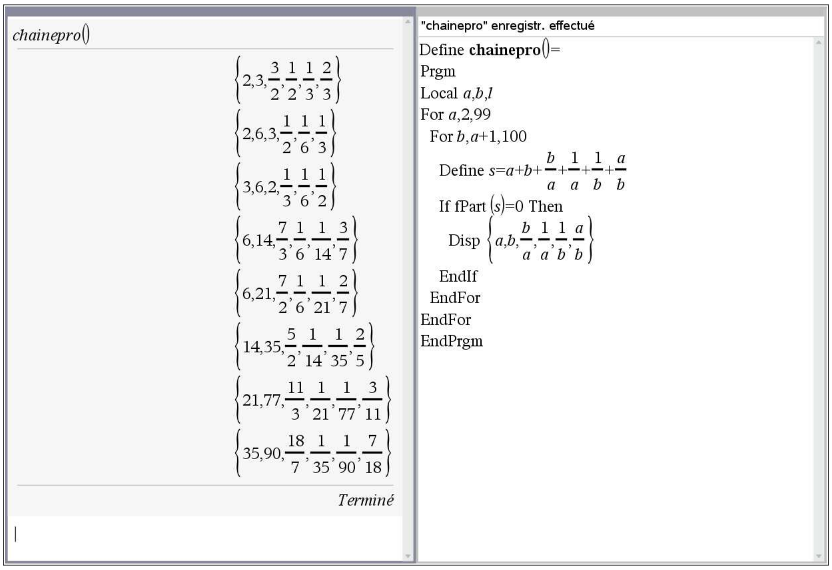
En effet, la première solution génère la chaîne : $\left\{6\ ;\ \dfrac{3}{7}\ ;\ \dfrac{1}{14}\ ;\ \dfrac{1}{6}\ ;\ \dfrac{7}{3}\ ;\ 14\right\}$

Et la deuxième solution génère la chaîne : $\left\{6\ ;\ 14\ ;\ \dfrac{7}{3}\ ;\ \dfrac{1}{6}\ ;\ \dfrac{1}{14}\ ;\ \dfrac{3}{7}\right\}$, identique à la précédente. Il y a une seule chaîne-produit qui vérifie les conditions requises.

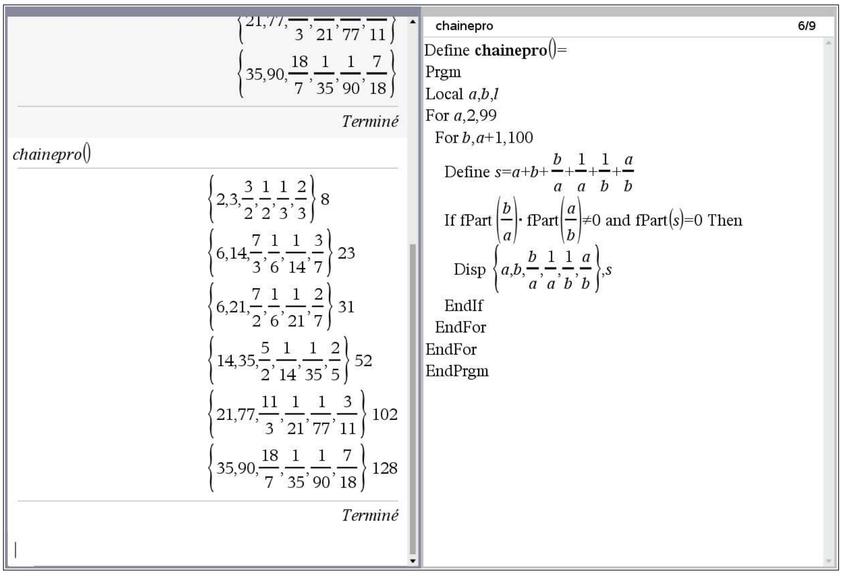
8.a. Soit une chaîne produit contenant deux entiers exactement a et b. Ils ne peuvent être diamétralement opposés sur le cercle (voir remarque de la **question 4**) et si un terme les séparait, ce terme serait égal à leur produit, il s'agirait d'un troisième entier. Nécessairement, si une chaîne-produit contient exactement deux entiers, ces deux entiers sont côte à côte.

8.b. L'algorithme ci-contre a été rédigé avec la syntaxe du logiciel N-Spire. Selon l'exécution de l'algorithme, il y a huit chaines distinctes ou non contenant au moins deux entiers et dont la somme est un entier. Il reste à améliorer l'algorithme de façon à ne sélectionner que les chaînes où figurent exactement deux entiers.

On note au passage que l'on retrouve la solution de la question **7**.



Voici l'algorithme amélioré, avec les six chaînes répondant à la question.



Un algorithme Python. On ne fait afficher que les trois premiers termes de la chaîne.

```
for a in range(2,101):
    for b in range(a+1,100):
        if (a**2+b**2+a+b)%(a*b)==0:
            print([a,b,b/a],a+b+b/a+1/a+1/b+a/b)
```

L'affichage obtenu concorde avec celui de l'algorithme **chainepro** initial.

```
[2, 3, 1.5] 8.0
[2, 6, 3.0] 12.0
[3, 6, 2.0] 12.0
[6, 14, 2.3333333333333335] 23.0
[6, 21, 3.5] 31.0
[14, 35, 2.5] 52.0
[21, 77, 3.6666666666666665] 102.0
[35, 90, 2.5714285714285716] 127.99999999999999
```

8.c. Soit x le deuxième entier. La chaîne-produit, si elle existe est : $\left\{611\ ;\ x\ ;\ \dfrac{x}{611}\ ;\ \dfrac{1}{611}\ ;\ \dfrac{1}{x}\ ;\ \dfrac{611}{x}\right\}$.

La somme des quatre autres nombres (non entiers) est égale à : $f(x)=\dfrac{x+1}{611}+\dfrac{612}{x}=\dfrac{x^2+x+373932}{611x}$.

La somme des six nombres est un nombre entier si et seulement si la somme des quatre nombres non entiers de la chaîne est elle-même un nombre entier, c'est-à-dire si et seulement si il existe un entier k tel que : $\dfrac{x^2+x+373932}{611x}=k$ ou aussi bien tel que : $x^2+x(1-611k)+373932=0$. Il s'agit d'une équation au second degré, mais nous en cherchons une solution entière, ce qui nous permet une résolution non conventionnelle :

L'équation en question s'écrit : $x\times(611k-1-x)=373932$

L'entier x, s'il existe, est donc un diviseur du nombre 373932.

Nous proposons trois variantes, toutes basées sur l'exploitation d'un algorithme. Les deux premiers algorithmes sont rédigés avec la syntaxe TI-Nspire et le troisième avec la syntaxe Python.

Dans cette option, on effectue un test systématique, pour tous les entiers entre 2 et 373932. On retient les valeurs de x pour lesquelles le nombre $f(x)$ est un nombre entier.	Define $f(x)=\frac{x+1}{611}+\frac{612}{x}$ *Terminé*
	invest()
	234 $\left\{611,234,\frac{18}{47},\frac{1}{611},\frac{1}{234},\frac{47}{18}\right\}$ 848
	1598 $\left\{611,1598,\frac{34}{13},\frac{1}{611},\frac{1}{1598},\frac{13}{34}\right\}$ 2212
	2212
	Terminé
	©NB : f(x) exprime en fonction de x la somme des quatre nombres non entiers de la chaîne
	
	invest 4/10
	Define **invest**()=
	Prgm
	Local *x*,*l*
	For *x*,2,373932
	©Test systématique pour tous les entiers de 2 à 373932
	©Si la partie décimale de f(*x*) *est nulle* …
	If fPart(*f*(*x*))=0 Then
	©Alors on obtient une solution que l'on affiche
	$\left\{611,x,\frac{x}{611},\frac{1}{611},\frac{1}{x},\frac{611}{x}\right\}\to l$
	Disp *x*,*l*,sum(*l*)
	EndIf
	EndFor
	EndPrgm

Dans cette option, on décompose l'entier 373932 en produit de facteurs premiers : $373932=2^2\times3^2\times13\times17\times47$.
 	
On ne teste que les entiers x qui sont diviseurs de 373932 (il y en a quand même 72 …).
	Define $f(x)=\frac{x+1}{611}+\frac{612}{x}$ *Terminé*
	$f(x)$ $\frac{x^2+x+373932}{611\cdot x}$
	factor(373932) $2^2\cdot3^2\cdot13\cdot17\cdot47$
	invest()
	1598 $\left\{611,1598,\frac{34}{13},\frac{1}{611},\frac{1}{1598},\frac{13}{34}\right\}$ 2212
	234 $\left\{611,234,\frac{18}{47},\frac{1}{611},\frac{1}{234},\frac{47}{18}\right\}$ 848
	Terminé
	
	"invest" enregistr. effectué
	Define **invest**()=
	Prgm
	Local *a*,*b*,*c*,*d*,*e*,*x*,*l*
	©a,b,c,d,e sont les exposants affectés aux facteurs premiers de 2, 3, 13, 17 et 47. On décrit ainsi l'ensemble des diviseurs de 373932
	For *a*,0,2
	For *b*,0,2
	For *c*,0,1
	For *d*,0,1
	For *e*,0,1
	$2^a\cdot3^b\cdot13^c\cdot17^d\cdot47^e\to x$
	If fPart$\left(\frac{x+1}{611}+\frac{612}{x}\right)$=0 Then
	$\left\{611,x,\frac{x}{611},\frac{1}{611},\frac{1}{x},\frac{611}{x}\right\}\to l$
	Disp *x*,*l*,sum(*l*)
	EndIf
	EndFor
	EndFor
	EndFor
	EndFor
	EndFor
	EndPrgm

Un algorithme en Python (même rôle que le premier algorithme)	`for n in range(2,373932):`
	`    if (n**2+n+373932)%(611*n)==0 :`
	`        print(n,n+611+n/611+1/611+1/n+611/n)`

Les trois algorithmes délivrent un verdict concordant. Il y a deux solutions :

- Première solution : $x=234$; la chaîne produit est la chaîne $\left\{611\ ;\ 234\ ;\ \frac{18}{47}\ ;\ \frac{1}{611}\ ;\ \frac{1}{234}\ ;\ \frac{47}{18}\right\}$ et sa somme est égale à 848.

- Deuxième solution : $x=1598$; la chaîne produit est la chaîne $\left\{611\ ;\ 1598\ ;\ \frac{34}{13}\ ;\ \frac{1}{611}\ ;\ \frac{1}{1598}\ ;\ \frac{13}{34}\right\}$ et sa somme est égale à 2212.

Partie D : Chaîne-produit contenant deux réels x et $x+1$

9. Supposons que x et $(x+1)$ soient côte à côte dans la chaîne. Le calcul de la somme des six nombres donne le résultat suivant : $S(x, x+1) = \dfrac{2x^2+3x+1}{x} = 2x+3+\dfrac{1}{x}$

Il s'agit d'une fonction de x, que l'on va étudier sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$

La dérivée de cette fonction est la fonction : $x \mapsto= 2-\dfrac{1}{x^2}$.

La fonction étudiée est minimale lorsque : $x=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ et son minimum est égal à $3\sqrt{2}+3$, nombre qui est strictement supérieur à 7.

10. Il semble que la formulation de la question posée soit plutôt celle-ci : « Montrer qu'il existe une chaîne-produit contenant deux réels x et $x+1$ et dont la somme est inférieure à 6,5 ». C'est-à-dire qu'il nous appartient de proposer un tel nombre réel x, peu importe par quel moyen.

Nous proposons deux méthodes qui paraissent, l'une comme l'autre, répondre à la question. Remarquons préalablement que la somme $x+\dfrac{1}{x}$ d'un nombre strictement positif et de son inverse est minimale lorsque $x=1$ et que ce minimum est égal à 2. Si une solution existe, les éléments de la chaîne ne sont probablement « pas trop éloignés » du nombre 1.

Méthode 1.

Cherchons s'il existe une valeur de x pour laquelle les nombres x et $x+1$ sont diamétralement opposés. Un tel nombre réel est solution de l'équation : $x+1=\dfrac{1}{x}$ ou encore de l'équation $x^2+x-1=0$. Cette équation admet deux solutions réelles dont une seule est strictement positive, il s'agit du nombre réel : $x_1=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$.

Choisissons, « a visto de nas », comme deuxième nombre le milieu du segment $[x_1\,;\,1]$, à savoir le nombre réel : $y_1=\dfrac{1+\sqrt{5}}{4}$. (La moyenne entre 1 et x_1 semble être un candidat « intéressant », ménageant à la fois la chèvre et le chou). Nous obtenons la chaîne-produit $\left\{\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}\,;\dfrac{1+\sqrt{5}}{4}\,;\dfrac{3+\sqrt{5}}{4}\,;\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\,;-1+\sqrt{5}\,;3-\sqrt{5}\right\}$

Un calcul, que nous laissons au lecteur le soin de détailler, montre que la somme est $3+\dfrac{3\sqrt{5}}{2}$, et une calculatrice montre que l'arrondi au centième de ce nombre est 6,35. Le contrat est rempli !

Méthode 2.

Cherchons s'il existe une valeur de x pour laquelle les nombres x et $x+1$ sont premier et troisième.

Le nombre intermédiaire est $b = x(x+1)$, la chaîne-produit est : $\left\{ x \,;\, x(x+1) \,;\, x+1 \,;\, \frac{1}{x} \,;\, \frac{1}{x(x+1)} \,;\, \frac{1}{x+1} \right\}$ et sa somme est : $s(x) = x^2 + 3x + 1 + \frac{2}{x}$

Une tabulation de cette fonction s (inutile d'en étudier les variations) sur l'intervalle $[0,5 \,;\, 1,5]$ avec le pas 0,1 (rappelons que l'on cherche des nombres « pas trop éloignés de 1 ») montre que les deux nombres $s(0.6)$; $s(0,7)$ sont tous deux plus petits que 6,5.

Nous pouvons proposer l'une ou l'autre valeur de x, ou aussi une valeur intermédiaire. Le contrat est rempli !

Par exemple, la valeur intermédiaire $x = \frac{2}{3}$ fait très bien l'affaire, avec la chaîne-produit $\left\{ \frac{2}{3} \,;\, \frac{10}{9} \,;\, \frac{5}{3} \,;\, \frac{3}{2} \,;\, \frac{9}{10} \,;\, \frac{3}{5} \right\}$ dont la somme est $\frac{58}{9}$ (un peu moins performante que la somme de la **méthode 1** mais néanmoins satisfaisante). De tous les lauréats, c'est celui-ci que nous retiendrions, tant il nous paraît sympathique.