SUJET + CORRIGÉ

OLYMPIADES DE MATHÉMATIQUES

ACADÉMIE DE NANTES

Classes de première S • 2014

OLYMPIADES ACADÉMIQUES DE MATHÉMATIQUES

NANTES – SESSION 2014

SUJET DESTINÉ AUX CANDIDATS DES SÉRIES SCIENTIFIQUES (S-SVT et S-SI)

L'épreuve est d'une durée de 4 heures.

Les calculatrices, ainsi que tous les instruments de géométrie et les crayons de couleur sont autorisés.

Lors de l'examen des copies, toute ébauche de démarche sera valorisée, même s'il s'agit d'une démarche ne pouvant aboutir.

Le palmarès académique sera établi en fonction de la prestation du candidat dans les quatre exercices.
Le palmarès national tiendra prioritairement compte (mais non exclusivement) de la prestation du candidat dans les deux premiers exercices (dits exercices nationaux).

EXERCICE 3 **Série S**

Nombres quadripartites, définition :

Soit A un entier positif non nul.
Le nombre A est dit quadripartite s'il existe 4 entiers positifs a, b, c, d et un entier positif non nul m tels que

- d'une part, le nombre A est égal à la somme des entiers a, b, c, d ;
- d'autre part, les quatre nombres suivants sont égaux : a augmenté de m, b diminué de m, c multiplié par m et d divisé par m.

Le nombre m est appelé opérateur du nombre quadripartite A.
Les quatre nombres a, b, c et d sont appelés éléments du nombre quadripartite A associés à l'opérateur m.

Exemple :
Le nombre $A = 8$ est un nombre quadripartite d'opérateur $m = 1$ et d'éléments associés $a = 1$, $b = 3$, $c = 2$ et $d = 2$.
En effet, on a :

- d'une part, $8 = a + b + c + d$;
- d'autre part, les nombres $a + 1$, $b - 1$, $c\times 1$, $\dfrac{d}{1}$ sont égaux.

Début du problème :

1. Vérifier que le nombre 500 est un nombre quadripartite d'opérateur $m = 4$ et d'éléments $a = 76$, $b = 84$, $c = 20$ et $d = 320$.
2. Vérifier que le nombre 288 est un nombre quadripartite d'opérateur 2 et d'opérateur 3.
3. a) Soit m et c deux entiers non nuls.
   On pose $A = c(m + 1)^2$. Montrer que A est un nombre quadripartite en déterminant les autres éléments a, b et d en fonction de A et m.
   b) Réciproquement, montrer que si A est un nombre quadripartite d'opérateur m alors $\dfrac{A}{(m+1)^2}$ est un entier.
4. a) Soit $A = 2\times 19^2\times 53^2$. Montrer que A est quadripartite et déterminer tous les opérateurs possibles m.
   b) 2014 est-il un nombre quadripartite ?
5. Donner le plus petit nombre quadripartite à 5 chiffres, d'opérateur 13, ainsi que le plus grand nombre quadripartite à 5 chiffres, d'opérateur 13. Préciser les éléments a, b, c et d associés dans chacun des cas.
6. Démontrer que 18 126 est quadripartite et qu'il n'a qu'un seul opérateur. Donner alors les quatre éléments associés.

EXERCICE 4 Série S ensembles bi-connexes

Un ensemble A d'entiers naturels distincts est dit bi-connexe lorsque pour tout élément x de A, au moins un des entiers $x - 1$ ou $x + 1$ appartient à A.

Ainsi l'ensemble A = {2013 ; 2014} est bi-connexe car $2013 \in A$, avec $(2013 + 1) \in A$

et $2014 \in A$, avec $(2014 - 1) \in A$.

Par contre B = {2 ; 3 ; 6 ; 8 ; 9} n'est pas bi-connexe car 6 est « isolé » dans B, c'est-à-dire $(6 + 1) \notin B$ et $(6 - 1) \notin B$.

Pour traiter l'une des questions suivantes, on pourra utiliser la propriété :
pour tout entier n non nul, la somme des n premiers entiers est :

$$1 + 2 + \ldots + n = \sum_{k=1}^{k=n} k = \frac{n(n+1)}{2}.$$

1. Avec quel entier peut-on compléter l'ensemble B pour le rendre bi-connexe ?
2. Parmi les ensembles bi-connexes contenant tous les nombres premiers inférieurs ou égaux à 13, quel est celui qui a le moins d'éléments ?
3. On retire au hasard un élément de l'ensemble {1 ; 2 ; ... ; 10} formé des entiers de 1 à 10. Quelle est la probabilité que l'ensemble obtenu reste bi-connexe ?
4. Combien peut-on former de sous-ensembles bi-connexes à 3 éléments dans {1 ; 2 ; ... ; 2014} ?
5. a. Dresser la liste de tous les sous-ensembles bi-connexes à 4 éléments dans {1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6}.
   b. Combien peut-on former de sous-ensembles bi-connexes à 4 éléments dans {1 ; 2 ; ... ; n} où n est un entier supérieur ou égal à *4* ?
   c. Déterminer la plus petite valeur de n telle que le nombre de tels sous-ensembles dépasse 2014.
6. On note u_n le nombre de sous-ensembles bi-connexes de {1 ; 2 ; ... ; n} où n est un entier supérieur ou égal à 2.
   On a donc $u_2 = 1$ car seul {1 ; 2} est bi-connexe.
   De même $u_3 = 3$ car seuls {1 ; 2}, {2 ; 3} et {1 ; 2 ; 3} sont bi-connexes.
   a. Justifier que $u_4 = 6$.
   b. On admet que pour tout $n > 4$, $u_n = 2u_{n-1} - u_{n-2} + u_{n-3} + 1$ et on donne l'algorithme suivant :

Traitement :	*1*	a prend la valeur 1
	2	b prend la valeur 3
	3	c prend la valeur 6
	4	Pour k allant de 1 jusqu'à 10 faire
	5	u prend la valeur $2c - b + a + 1$
	6	a prend la valeur b
	7	b prend la valeur c
	8	c prend la valeur u
	9	Fin Pour
Sortie :	*10*	Afficher u

   On exécute l'algorithme. Quelle valeur s'affiche en sortie ? Que représente-t-elle ?
   c. Recopier en le modifiant l'algorithme précédent pour qu'il affiche en sortie le plus petit entier naturel n_0 tel que $u_{n_0} \geqslant 2014$. Que vaut alors n_0 ?

Corrigé exercice 3 : Nombres quadripartites (version pour les séries S)

1) Vérifier que le nombre 500 est un nombre quadripartite d'opérateur 4 et d'éléments $a = 76$, $b = 84$, $c = 20$ et $d = 320$.

$76 + 84 + 20 + 320 = 500$ et $76 + 4 = 84 - 4 = 20\times4 = \dfrac{320}{4} = 80$.

2) 288 quadripartite d'opérateur 2 :

$a = 62$, $b = 66$, $c = 32$, $d = 128$.

On a bien : $62 + 66 + 32 + 128 = 288$ et $a + 2 = b - 2 = c\times2 = \dfrac{d}{2} = 64$.

288 quadripartite d'opérateur 3 :

$a = 51$, $b = 57$, $c = 18$, $d = 162$.

On a bien : $51 + 57 + 18 + 162 = 288$ et $a + 3 = b - 3 = c\times3 = \dfrac{d}{3} = 54$.

3) a) m et c sont deux entiers non nuls et $A = c(m + 1)^2$.
On pose $a = cm - m$, $b = cm + m$ et $d = cm^2$
d'où, $a + m = b - m = \mathrm{c}m = \dfrac{d}{m}$
et $a + b + c + d = (cm - m) + (cm + m) + c + m^2c = (m + 1)^2c = A$.
A est donc un nombre quadripartite d'opérateur m
et d éléments $a = cm - m = m(c - 1) = m\left[\dfrac{A}{(m+1)^2}-1\right]$.
De même, on obtient : $b=m\left[\dfrac{A}{(m+1)^2}+1\right]$, $d=\left(\dfrac{m}{m+1}\right)^2 A$.
b) ***Réciproquement*** :
Soit A un nombre quadripartite d'opérateur m.
a, b, c, d sont des entiers tels que $a + m = b - m = \dfrac{d}{m} = cm$,
et $a + b + c + d = mc + m + mc - m + c + cm^2 = (m+1)^2c = A$.
On a donc $\dfrac{A}{(m+1)^2} = c$, d'où, $\dfrac{A}{(m+1)^2}$ est un entier.

4) a) D'après la question précédente, A doit être divisible par $(m + 1)^2$, d'où,
$A = 2\times19^2\times53^2$ est un nombre quadripartite d'opérateur18, d'opérateur 52 et d'opérateur $19\times53 - 1 = 1\,006$.
Si $m = 18$, $a = 101106$, $b = 101142$, $c = 5618$, $d = 1820232$.
Si $m = 52$, $a = 37492$, $b = 37596$, $c = 722$, $d = 1952288$.
Si $m = 1006$,$a = 1006$, $b = 3018$, $c = 2$, $d = 2024072$.
b) $2\,014 =2\times19\times53$.
Ce nombre n'est pas un nombre quadripartite d'après la question 3 puisque, 2, 19 et 53 étant des nombres premiers, on ne peut pas trouver un entier m tel que $\dfrac{2014}{(m+1)^2}$ est un entier.

5) Si m=13 on a : A=196c.
Le plus petit multiple de 196 à 5 chiffres est 10192 et le plus grand 99960.
On en déduit les éléments et opérateurs correspondants :

$c_1=52$ puis $a_1=663$, $b_1=689$, $d_1=8788$ pour A_1=10192.
$c_2=510$ puis $a_2=6617$, $b_2=6643$, $d_2=86190$ pour A_2=99960.

6) Démontrer que 18 126 est quadripartite et qu'il n'a qu'un seul opérateur.
Donner alors les quatre éléments associés.
18 126 = 9×2014 = 9×(2×19×53).
S'il existe un opérateur m, $(m+1)^2$ doit diviser 18 126. Or m étant un naturel strictement positif, $(m+1)$ est strictement supérieur à 1.
Les entiers 2, 19 et 53 étant premiers, on a nécessairement , $(m+1)^2=9$, soit : $m+1=3$ i.e. $m=2$.
On a alors : a = 4026, b = 4030, c = 2 014, d = 8056.

Exercice 4 ensembles bi-connexes

Éléments de correction.

1) En ajoutant l'entier 5 ou l'entier 7, l'ensemble B est bi-connexe.

2) Le plus petit ensemble bi-connexe contenant tous les nombres premiers inférieurs ou égaux à 13 est : {2 ; 3 ; 5 ; 6 ; 7 ; 11 ; 12 ; 13}.

3) L'ensemble {1 ; 2 ; ... ; 10} ne reste pas bi-connexe en enlevant 2 ou 9.

Dans tous les autres cas, l'ensemble reste bi-connexe : Probabilité vaut $\frac{8}{10} = \frac{4}{5} = 0{,}8$.

4) Pour obtenir un sous-ensemble bi-connexe à 3 éléments, les trois entiers doivent être consécutifs :

{1 ; 2 ; 3} ; {2 ; 3 ; 4} ; …. ; {2012 ; 2013 ; 2014}.

On a donc : 2012 sous-ensembles bi-connexes à 3 éléments dans {1 ; 2 ; ... ; 2014}.

5) a) Les sous-ensembles bi-connexes à 4 éléments dans {1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6} :

{1 ; 2 ; 3 ; 4} ; {1 ; 2 ; 4 ; 5} ; {1 ; 2 ; 5 ; 6}

{2 ; 3 ; 4 ; 5} ; {2 ; 3 ; 5 ; 6}

{3 ; 4 ; 5 ; 6} .

b) Pour former les sous-ensembles bi-connexes à 4 éléments dans $\{1 ; 2 ; ... ; n\}$, on peut : former tous les sous-ensembles de la forme par $\{1 ; 2 ; k-1 ; k\}$ avec $4 \leqslant k \leqslant n$, soit : $n-3$ sous-ensembles commençant par {1 ; 2 ; ….}

puis tous les sous-ensembles de la forme par $\{2 ; 3 ; k-1 ; k\}$ avec $5 \leqslant k \leqslant n$,soit : $n-4$ sous-ensembles commençant par {2 ; 3 ; ….}

jusqu'à $\{n-3; n-2 ; n-1 ; n\}$.

On a donc : $1 + 2 + \ldots + (n-3) = \sum_{i=1}^{i=n-3} i = \frac{(n-2)(n-3)}{2}$

c) $\frac{(n-2)(n-3)}{2} \geqslant 2014$ si et seulement si $n^2 - 5n - 4022 \geqslant 0$

$n \geqslant 66$.

6) a) Soit {1 ; 2 ; 3 ; 4}.

On peut former les sous-ensembles bi-connexes :

{1 ; 2} ; {2 ; 3} ; {3 ; 4} ; {1 ; 2 ; 3} ; {2 ; 3 ; 4} ; {1 ; 2 ; 3 ; 4}.

On a bien 6 sous-ensembles bi-connexes dans {1 ; 2 ; 3 ; 4}. Soit : $u_4 = 6$.

b) À la première boucle, on a : $u_5 = 2\times6 - 3 + 1 + 1 = 11$

à la deuxième boucle, on a : $u_6 = 2\times11 - 6 + 3 + 1 = 20$

$u_7 = 2\times20 - 11 + 6 + 1 = 36$

$u_8 = 2\times36 - 20 + 11 + 1 = 64$

$u_9 = 113$

$u_{10} = 199$

$u_{11} = 350$

$u_{12} = 615$

$u_{13} = 1080$

$u_{14} = 1896$

L'algorithme affiche 1 896 = u_{14} qui représente le nombre de sous-ensembles bi-connexes de {1 ; 2 ; ... ; 14}.

c) On modifie la ligne 4 en faisant :

Tant que $u \leqslant 2014$ faire

et la ligne 9 : FinTantQue

et on ajoute un compteur dans la boucle

on affiche le compteur pour afficher n_0 .

$n_0 = 15$

Traitement :	a prend la valeur 1
	b prend la valeur 3
	c prend la valeur 6
	k prend la valeur 4
	Tant que $u \leqslant 2014$ faire
	u prend la valeur $2c - b + a + 1$
	a prend la valeur b
	b prend la valeur c
	c prend la valeur u
	k prend la valeur $k + 1$
	FinTantQue.
Sortie :	Afficher u, afficher k.