SUJET + CORRIGÉ

OLYMPIADES DE MATHÉMATIQUES

ACADÉMIE DE NANTES

Classes de première S • 2013

OLYMPIADES ACADÉMIQUES DE MATHÉMATIQUES

NANTES – SESSION 2013

SUJET DESTINÉ AUX CANDIDATS DES SÉRIES SCIENTIFIQUES (S-SVT et S-SI)

L'épreuve est d'une durée de 4 heures.

Les calculatrices, ainsi que tous les instruments de géométrie et les crayons de couleur sont autorisés.

Lors de l'examen des copies, toute ébauche de démarche sera valorisée, même s'il s'agit d'une démarche ne pouvant aboutir.

Le palmarès académique sera établi en fonction de la prestation du candidat dans les quatre exercices.
Le palmarès national tiendra prioritairement compte (mais non exclusivement) de la prestation du candidat dans les deux premiers exercices (dits exercices nationaux).

A la recherche d'une Dame

Voici quelques connaissances sur le Bridge pour traiter les exercices ci-dessous :

Au Bridge, deux équipes composées chacune de deux partenaires Nord/Sud(Equipe1) et Est/Ouest (Équipe2) s'affrontent.

- On distribue la totalité d'un jeu de 52 cartes. Chacun des quatre joueurs dispose donc de 13 cartes.
- L'ordre des cartes est le suivant : As, Roi, Dame, Valet, 10, 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2.
- La seule obligation à ce jeu est de fournir quand on le peut une carte de la couleur (Pique, cœur, Carreau ou Trèfle) demandée par celui qui joue le premier. Quand ce n'est pas possible, on doit fournir une carte quelconque (dans ce cas on dit qu'on défausse).
- On joue dans le sens des aiguilles d'une montre. Si Ouest joue en premier, Nord, Est et Sud déposeront leur carte dans cet ordre.
- Celui des quatre joueurs qui a la plus grosse des cartes de la couleur demandée remporte la levée et doit rejouer.
- Le jeu se termine lorsque les 52 cartes ont été jouées. Chaque joueur disposant de treize cartes, il y a donc treize tours donc treize levées possibles.
- Avant de jouer, les enchères ont permis de déterminer le camp du déclarant qui, par convenance, est Sud dans chacun des exercices. De ce fait, Ouest est le premier à jouer une carte, on dit qu'il entame. Nord étale alors son jeu (on dit que c'est le « mort ») qui devient visible des trois autres joueurs. Chaque joueur voit donc deux jeux, le sien et celui du mort. Sud joue ses cartes et celles de son partenaire Nord.

Partie A : Un petit exemple

Voici les cartes possédées par chacun des joueurs. Il est rappelé que chaque joueur voit ses cartes et celles de nord.

	♠ 10 5 3	
	♥ A D 10	
	♦ R 9 7 5 2	
	♣ 10 8 2	
♠ R D 9 8 2	Nord	♠ V
♥ 4 3	Ouest Est	♥ V 8 7 6 5 2
♦ D 8 3		♦ 6 4
♣ D 9 7	Sud	♣ R 5 4
	♠ A 7 6 4	
	♥ R 9	
	♦ A V 10	
	♣ A V 6 3	

Ouest entame du Roi de Pique, voici les quatre premières levées :

	Ouest	Nord	Est	Sud
Tour 1	♠ R	♠ 3	♠ V	♠ A
Tour 2	♦ 3	♦ 2	♦ 4	♦ A
Tour 3	♦ D	♦ R	♦ 6	♦ V
Tour 4	♣	♣ 2	♣ 4	♣ V
Tour 5	♠ D	♠		♠

Sachant qu'Ouest a remporté la quatrième levée, quelle carte a-t-il fournie ? Complétez la levée 5. A cet instant, quelle est l'équipe qui a remporté le plus de levées ?

Partie B : Prendre la Dame

La partie précédente étant terminée, les cartes ont été redistribuées. Nous voici donc dans une nouvelle situation. Alors que dix levées ont déjà été faites, voici les cartes restantes pour le camp Nord/Sud en Pique. Est/ Ouest ayant fourni trois Piques en cours de partie, Nord/Sud sait qu'il reste en Est-Ouest :

– en Pique : La Dame, le 7, Le 6 Le 5 .
– en Coeur : le 8 et le 4

	♠ R 10 8	
	Nord	
	Ouest Est	
	Sud	
	♠ A V 9	

Question 1 : Sachant que c'est à Sud de jouer, voici ce que Sud se propose de jouer pour gagner les trois dernières levées :

	Sud	**Ouest**	**Nord**	**Est**
Tour 1	♠ A		♠ 8	
Tour 2	♠ 9		♠ R	
Tour 3	♠ V		♠ 10	

a) Si les trois cartes possédées par Est sont la Dame de Pique et les deux Coeurs, Sud gagnera-t-il les trois dernières levées ? Pourquoi ?

b) Proposez une autre répartition des six cartes restantes permettant à Sud de gagner les trois dernières levées.

c) Proposez une répartition des six cartes restantes ne permettant pas à Sud de gagner les trois dernières levées. Expliquer votre démarche.

Question 2 : Sud est persuadé que la Dame de Pique est en Ouest. Afin de gagner quoi qu'il arrive les trois dernières levées, voici son raisonnement :

Je vais jouer l'as.

Si la Dame est seule en Ouest avec les deux Coeurs :

alors je jouerai . . ... et j'ai gagné mes trois levées.

Si la Dame ne tombe pas

alors je jouerai le Valet :

si Ouest met la Dame :

alors je mettrai le ..... puis je jouerai . . . . et j'ai gagné mes trois levées.

sinon je mettrai le ..... puis je jouerai . . . . et j'ai gagné mes trois levées.

Question 3 : Si Sud est persuadé que la Dame de Pique est en Est, proposez sur le modèle précédent un raisonnement qui lui permette de gagner les trois dernières levées quoi qu'il arrive.

Partie C : Dame où es-tu ?

Voici les jeux possédés par le camp N/S.

	♠ R 10 8	
	♥ 4 3 2	
	♦ 4 3 2	
	♣ 5 4 3 2	
♠	Nord	♠
♥	Ouest Est	♥
♦		♦
♣	Sud	♣
	♠ A V 9	
	♥ A R D	
	♦ A R D	
	♣ A R D V	

Ouest entame et dépose sur la table le V de cœur. Sud s'étant promis de faire les treize levées, voici ce qu'il joue et ce qu'il voit :

	Sud	**Ouest**	**Nord**	**Est**
Tour 1	♥ A	♥ V	♥ 2	♥ 7
Tour 2	♥ R	♥ 5	♥ 3	♠ 2
Tour 3	♥ D	♥ 6	♥ 4	♠ 3
Tour 4	♦ A	♦ 5	♦ 2	♦ 8
Tour 5	♦ R	♦ 6	♦ 3	♦ 9
Tour 6	♦ D	♦ 7	♦ 4	♦ 10
Tour 7	♣ A	♣ 10	♣ 2	♣ 9
Tour 8	♣ R	♣ 8	♣ 3	♣ 7
Tour 9	♣ D	♣ 6	♣ 4	♠ 4

Cas 1 :

Voici le tour 10

	Sud	**Ouest**	**Nord**	**Est**
Tour 10	♣ V	♥ 8	♣ 5	♦ V

a) A cet instant, il réfléchit et affirme : Je connais déjà douze des cartes d'Ouest et la couleur de la treizième. Pouvez-vous indiquer lesquelles et la nature de la dernière carte ?

b) Pour gagner les trois dernières levées, il doit trouver la Dame de Pique. Complétez le raisonnement suivant :

Si la Dame de Pique est en Ouest
alors les trois dernières cartes d'Ouest sont . . ..
sinon Ouest possède un Pique parmi les cartes suivantes . ..... et . . . . . .

c) Sud imagine deux stratégies pour terminer la partie et remplir son contrat.

Stratégie 1 :

	Sud	**Ouest**	**Nord**	**Est**
Tour 11	♠ A		♠ 8	
Tour 12	♠ 9		♠ R	
Tour 13	♠		♠ 10	

Stratégie 2 :

	Sud	**Ouest**	**Nord**	**Est**
Tour 11	♠ 9		♠ R	
Tour 12	♠ A		♠ 8	
Tour 13	♠ V		♠	

- Existe-t-il, pour chacune des deux hypothèses une répartition des cartes entre Est et Ouest qui permette à Sud de remporter la dernière levée ?
  Si oui, proposez en une.
- Existe-t-il, pour chacune des deux hypothèses une répartition des cartes entre Est et Ouest qui ne permette pas à Sud de remporter la dernière levée ?
  Si oui, proposez en une.
- Trouvez sous forme d'algorithme un moyen de gagner les trois dernières levées dans tous les cas.

Cas 2 :

Quelles conclusions doit tirer Sud si, au tour 10, il voit :

	Sud	**Ouest**	**Nord**	**Est**
Tour 10	♣ V	♦ V	♣ 5	♠ 5

Quelle stratégie doit-il appliquer dans ce cas pour gagner les trois dernières levées ?

CARRES ET PARABOLE

Soit k un nombre réel strictement positif fixé et f la fonction définie sur l'ensemble $\mathbf{R}$ des nombres réels par $f(x) = kx^2$. On note C_f la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthonormé d'origine le point noté O_1. On inscrit dans la courbe C_f un carré $O_1A_1O_2B_1$, noté C_1, tel que les points A_1 (d'abscisse positive) et B_1 appartiennent à la courbe C_f et le point O_2 à l'axe des ordonnées (voir figure 1).

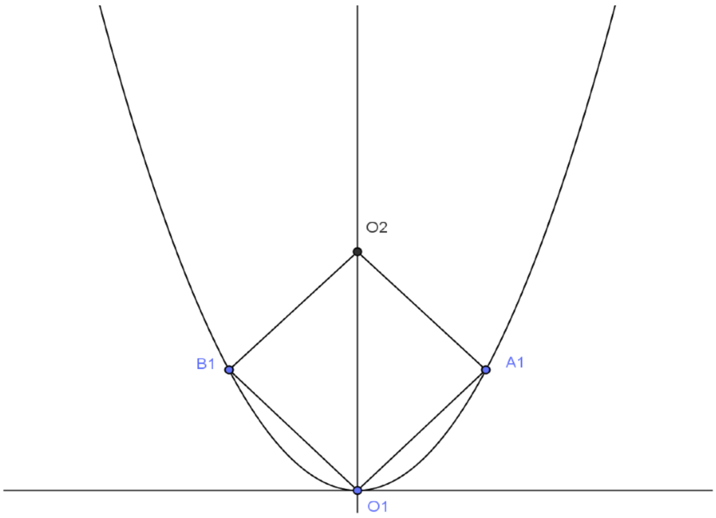


Figure 1

Partie A

1. Construction du carré C_1
   (a) Reproduire la figure 1 sur le document réponse 1, en justifiant la construction des points A_1, O_2 et B_1.
   (b) Déterminer en fonction de du nombre réel k les coordonnées des points A_1, B_1 et O_2 .
2. Montrer que le périmètre du carré C_1 est égal à $4\frac{\sqrt{2}}{k}$
3. On inscrit par récurrence une suite de carrés dans la courbe C_f , comme indiqué sur la figure 2. On note O_n , A_n ,O_{n+1} et B_n les sommets respectifs du carré noté C_n. Construire sur la copie le carré $O_2A_2O_3B_2$ puis déterminer les coordonnées des points A_2 et O_3

Partie B

Pour tout entier naturel n non nul, on note $(x_n;y_n)$ les coordonnées du point A_n et $(0;z_n)$ les coordonnées du point O_n.

1. Justifier que, pour tout entier naturel n non nul, $y_n = x_n + z_n$
2. Justifier que, pour tout entier naturel n non nul, $z_{n+1} = z_n + 2x_n$.
3. En déduire que pour tout entier naturel n non nul $y_{n+1} - y_n = x_{n+1} + x_n$.
4. Justifier alors que la suite (x_n) est une suite arithmétique de raison $\frac{1}{k}$.
5. Déduire de ce qui précède la nature de la suite (ln) où, pour tout entier naturel n non nul, ln désigne la longueur du carré C_n.

Partie C

1. Sachant que la longueur d'un côté du carré C_1 a pour longueur π, déterminer la valeur du nombre réel k.
   Pour ces deux dernières questions, on suppose que k a pour valeur le réel trouvé à la question précédente.
2. n étant un entier naturel non nul, écrire un algorithme qui calcule et affiche (en sortie) la somme des aires des n premiers carrés .
3. À l'aide de cet algorithme, ou de la méthode de votre choix que vous expliciterez, déterminer le plus petit entier naturel N_0 pour lequel la somme des aires des N_0 premiers carrés soit supérieure ou égale à $20\,132\,013$ unités d'aire.

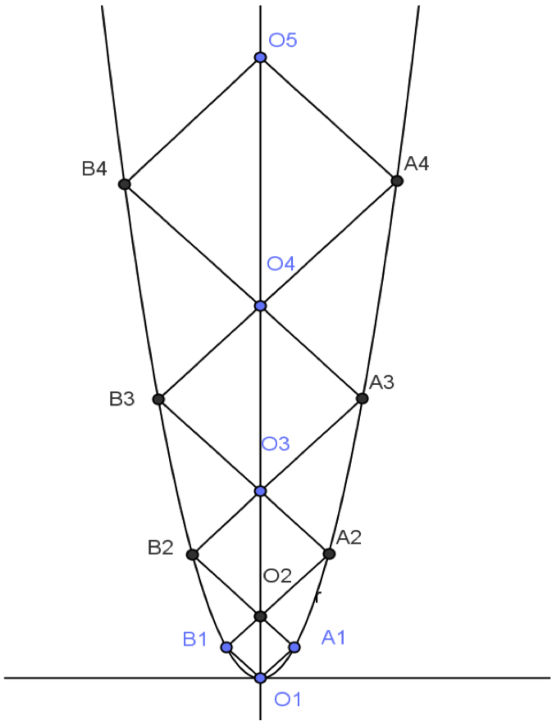
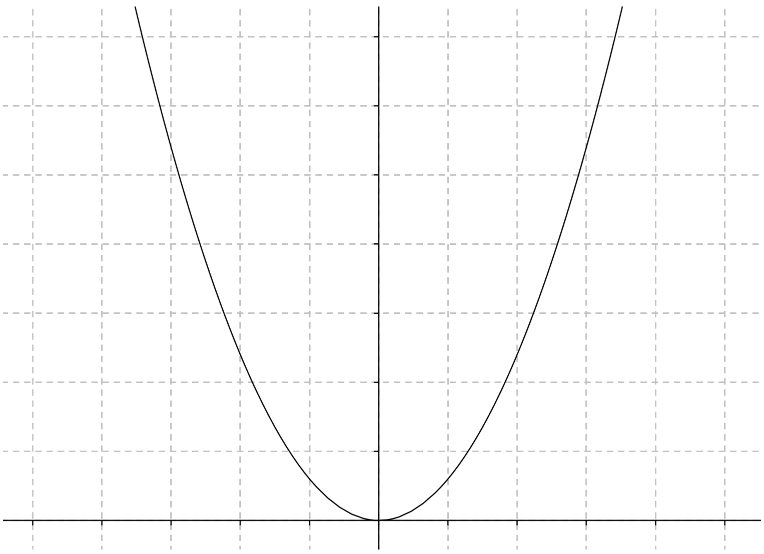


Figure 2

Document réponse



CORRECTION, NANTES 2013

Premier exercice Académique (exo 3)

Olympiades mathématiques, S

Partie A : Un petit exemple

Sachant qu'Ouest a remporté la quatrième levée, quelle carte a-t-il fournie ? Complétez la levée 5. A cet instant, quelle est l'équipe qui a remporté le plus de levées ?

	Ouest	Nord	Est	Sud
Tour 1	♠ R	♠ 3	♠ V	♠ A
Tour 2	♦ 3	♦ 2	♦ 4	♦ A
Tour 3	♦ D	♦ R	♦ 6	♦ V
Tour 4	**♣ D**	**♣ 2**	**♣ 4**	**♣ V**
Tour 5	**♠ D**	**♠ 5**	**Il défausse**	**♠ 3**

Nord/Sud a remporté trois levées, Est/Ouest deux levées.

Partie B : Prendre la dame

La partie précédente étant terminée, les cartes ont été redistribuées. Nous voici donc dans une nouvelle situation.
Alors que dix levées ont déjà été faites, voici les cartes restantes pour le camp Nord/Sud en Pique.
Est/ Ouest ayant fourni trois Piques en cours de partie, Nord/Sud sait qu'il reste en Est-Ouest :
- en Pique : La Dame, le 7, Le 6 Le 5 .
- en Cœur : le 8 et le 4

♠ R 10 8

Nord

Ouest Est

Sud

♠ A V 9

Question 1 : Sachant que c'est à Sud de jouer, voici ce que Sud se propose de jouer pour gagner les trois dernières levées :

	Sud	Ouest	Nord	Est
Tour 1	♠ A		♠ 8	
Tour 2	♠ A 9		♠ R	
Tour 3	♠ V		♠ 10	

a) Si les trois cartes possédées par Est sont la Dame de Pique et les deux Cœurs, Sud gagnera-t-il les trois dernières levées ? Pourquoi ?
Oui car la dame tombera au premier tour, le Valet remportera donc la troisième levée.

b) Proposez une autre répartition des six cartes restantes permettant à Sud de gagner les trois dernières levées.
Par exemple, la Dame de Pique, un Pique et un Cœur. Dans ce cas, la Dame tombera au second tour donc le Valet sera maître au troisième.

c) Proposez une répartition des six cartes restantes ne permettant pas à Sud de gagner les trois dernières levées. Expliquer votre démarche.
Il faut et il suffit que la Dame ne tombe pas lors des deux premiers tours. Il faut donc que Est ou Ouest possède trois Piques dont la Dame.

Question 2 : Sud est persuadé que la Dame de Pique est en Ouest. Afin de gagner quoi qu'il arrive les trois dernières levées, voici son raisonnement :
Je vais jouer l'As.
Si la Dame est seule en Ouest avec les deux Cœurs :
    alors je jouerai **le Valet puis le 10** et j'ai gagné avec mes trois levées.
Si la Dame ne tombe pas
    alors je jouerai le Valet :
        si Ouest met la Dame
            alors je mettrai le **Roi** puis je jouerai le **10** et j'ai gagné mes trois levées.
            sinon je mettrai le **10** puis je jouerai **9** et j'ai gagné mes trois levées.

Question 3 : Si Sud est persuadé que la Dame de Pique est en Est, proposez sur le modèle précédent un raisonnement qui lui permette de gagner les trois dernières levées quoi qu'il arrive.
Il suffit d'appliquer un raisonnement symétrique :

Partie C : Dame où es-tu ?

Voici les jeux possédés par le camp N/S :

	♠ R 10 8	
	♥ 4 3 2	
	♦ 4 3 2	
	♣ 5 4 3 2	
♠	Nord	♠
♥	Ouest Est	♥
♦		♦
♣	Sud	♣
	♠ A V 9	
	♥ A R D	
	♦ A R D	
	♣ A R D V	

Ouest entame et dépose sur la table le Valet de Cœur. Sud s'étant promis de faire les treize levées, voici ce qu'il joue et ce qu'il voit :

	Sud	Ouest	Nord	Est
Tour 1	♥ A	♥ V	♥ 2	♥ 7
Tour 2	♥ R	♥ 5	♥ 3	♠ 2
Tour 3	♥ D	♥ 6	♥ 4	♠ 3
Tour 4	♦ A	♦ 5	♦ 2	♦ 8
Tour 5	♦ R	♦ 6	♦ 3	♦ 9
Tour 6	♦ D	♦ 7	♦ 4	♦ 10
Tour 7	♣ A	♣ 10	♣ 2	♣ 9
Tour 8	♣ R	♣ 8	♣ 3	♣ 7
Tour 9	♣ D	♣ 6	♣ 4	♠ 4

Cas 1 Voici le tour 10 :

	Sud	Ouest	Nord	Est
Tour 10	♣ V	♥ 8	♣ 5	♦ V

a) A cet instant, il réfléchit et affirme : Je connais déjà douze des cartes d'Ouest et la couleur de la treizième. Pouvez-vous indiquer lesquelles et la nature de la dernière carte ?

b) Pour gagner les trois dernières levées, il doit trouver la Dame de Pique. Complétez le raisonnement suivant :

Si la Dame de Pique est en Ouest   alors les trois dernières cartes d'Ouest sont Dame de Pique et le 8 et 9 de Cœur ... sinon Ouest possède un Pique parmi les cartes suivantes 7, 6 et 5 . Fin du Si

c) Sud imagine deux stratégies pour terminer la partie et remplir son contrat.

Stratégie 1 :

	Sud	Ouest	Nord	Est
Tour 11	♠ A		♠ 8	
Tour 12	♠ 9		♠ R	
Tour 13	♠		♠ 10	

Stratégie 2 :

	Sud	Ouest	Nord	Est
Tour 11	♠ 9		♠ R	
Tour 12	♠ A		♠ 8	
Tour 13	♠ V		♠	

- Existe-t-il, pour chacune des deux hypothèses une répartition des cartes entre Est et Ouest qui permette à Sud de remporter la dernière levée ?
  Si oui, proposez en une.
  Oui : Ouest possède la Dame de Pique
- Existe-t-il, pour chacune des deux hypothèses une répartition des cartes entre Est et Ouest qui ne permette pas à Sud de remporter la dernière levée ?
  Si oui, proposez en une.
  Oui, Ouest possède le dernier Carreau. Donc Est possède les trois derniers Piques.
- Trouvez sous forme d'algorithme un moyen de gagner les trois dernières levées dans tous les cas.
  Je vais jouer le 9 de Pique.
  Si la Dame est en Ouest alors elle est seule donc je la prends avec le Roi et c'est fini
  sinon
  Si Est fournit un petit Pique alors C'est Est qui a la Dame donc
  je mets le Roi puis je joue le 10 qui permettra de prendre la dame avec l'As au douzième tour et c'est fini
  Sinon Est a les trois Piques donc je mets le Roi puis je joue le 10 qui permettra de prendre la Dame avec l'As au douzième ou treizième tour et c'est fini

Cas 2 :
Quelles conclusions doit tirer Sud si, au tour 10, il voit :

	Sud	Ouest	Nord	Est
Tour 10	♣ V	♦ V	♣ 5	♠ 5

Quelle stratégie doit-il appliquer dans ce cas pour gagner les trois dernières levées ?
Dans ce cas, le problème est simple, ouest a encore trois cIJurs, donc la Dame est en Est. On peut alors appliquer ce qui a été vu Partie B.

CORRECTION, NANTES 2013

Second exercice Académique (exo 4)

Olympiades mathématiques, S

Partie A

1. Construction du carré C_1.

   a) Reproduire la figure 1 sur le document réponse 1, en justifiant la construction des points A_1, O_2 et B_1.
   Aucun commentaire.

   b) Déterminer en fonction du nombre réel k les coordonnées des points A_1, B_1 et O_2.
   Le point A-1 est à l'intersection de la droite D d' équation $y = x$ et de la parabole d'où :
   $x = kx^2$ **soit** $x = 1/k$ **d'où** $\mathbf{A}_1(1/k; 1/k)$**,** $\mathbf{B}_1(-1/k; 1/k)$ **et** $\mathbf{O}_2(0; 2/k)$**.**

2. Montrer que le périmètre du carré C_1 est égal à $4\frac{\sqrt{2}}{k}$.

   Le côté a pour longueur $\frac{\sqrt{2}}{k}$ **donc le périmètre du carré C1 est égal à** $4\frac{\sqrt{2}}{k}$**.**

3. On inscrit par récurrence une suite de carrés dans la courbe C_f , comme indiqué sur la figure 2. On note O_n , A_n ,O_{n+1} et B_n les sommets respectifs du carré noté C_n. Construire sur la copie le carré $O_2A_2O_3B_2$ puis déterminer les coordonnées des points A_2 et O_3.
   Dessin puis $\mathbf{A}_2(2/k; 4/k)$ **et** $\mathbf{O}_3(0; 6/k)$**.**

Partie B

Pour tout entier naturel n non nul, on note $(x_n; y_n)$ les coordonnées du point A_n et $(0; z_n)$ les coordonnées du point O_n.

1. Justifier que, pour tout entier naturel n non nul, $y_n = x_n + z_n$.
   On peut, par exemple, considérer le triangle rectangle isocèle en $\mathbf{A}_n$ $\mathbf{O}_n\mathbf{A}_n\mathbf{O}_{n+1}$**. La relation s'en déduit immédiatement.**

2. Justifier que, pour tout entier naturel n non nul, $z_{n+1} = z_n + 2x_n$. **Le même triangle permet de conclure**

3. En déduire que pour tout entier naturel n non nul $y_{n+1} - y_n = x_{n+1} + x_n$.
   On a $y_{n+1} - y_n = x_{n+1} + z_{n+1} - (x_n + z_n) = x_{n+1} + z_n + 2x_n - (x_n + z_n) = x_{n+1} + x_n$**.**

4. Justifier alors que la suite (x_n) est une suite arithmétique de raison $\frac{1}{k}$.
   En remplaçant y_n **par** kx_n^2**, puis en simplifiant, on trouve la réponse demandée.**

5. Déduire de ce qui précède la nature de la suite (ℓ_n) où, pour tout entier naturel n non nul, ℓ_n désigne la longueur du carré C_n.

   Pour tout entier n**,** $\mathrm{l}_n = 4\sqrt{2}x_n$ **donc** (l_n) **est une suite arithmétique de raison** $4\frac{\sqrt{2}}{k}$

Partie C

1. Sachant qu'un côté du carré C_1 a pour longueur π, déterminer la valeur du nombre réel k.
   On a : $= \frac{\sqrt{2}}{\pi}k$**, donc** $\mathbf{C}_1$ **a pour côté** π**, de ce fait** $\mathbf{C}_n$ **a pour côté** $n\pi$
   Pour ces deux dernières questions, on suppose que k a pour valeur le réel trouvé à la question précédente.

2. n étant un entier naturel non nul, écrire un algorithme qui calcule et affiche (en sortie) la somme des aires des n premiers carrés.
   Mettre 0 dans S
   Mettre 0 dans I
   Tant que Sπ^2 <20132013
       Mettre I+1 dans I
       Mettre S+ I² dans S
       Mettre I+1 dans I
   Fin du Tant que
   Afficher I

3. À l'aide de cet algorithme, ou de la méthode de votre choix que vous expliciterez, déterminer le plus petit entier naturel N_0 pour lequel la somme des aires des N_0 premiers carrés soit supérieure ou égale à 20 132 013 unités d'aire.
   On trouve I = 183