SUJET + CORRIGÉ

OLYMPIADES DE MATHÉMATIQUES

ACADÉMIE DE NANTES

Classes de première S • 2012

OLYMPIADES ACADÉMIQUES DE MATHÉMATIQUES

NANTES – SESSION 2012

SUJET DESTINÉ AUX CANDIDATS DES SÉRIES SCIENTIFIQUES (S-SVT et S-SI)

L'épreuve est d'une durée de 4 heures.

Les calculatrices, ainsi que tous les instruments de géométrie et les crayons de couleur sont autorisés.

Lors de l'examen des copies, toute ébauche de démarche sera valorisée, même s'il s'agit d'une démarche ne pouvant aboutir.

Le palmarès académique sera établi en fonction de la prestation du candidat dans les quatre exercices.
Le palmarès national tiendra prioritairement compte (mais non exclusivement) de la prestation du candidat dans les deux premiers exercices (dits exercices nationaux).

EXERCICE 3

a et b sont deux réels strictement positifs.

On appelle : - moyenne arithmétique des nombres a et b, le nombre m défini par $m = \frac{a+b}{2}$;

- moyenne géométrique des nombres a et b , le nombre g défini par $g = \sqrt{ab}$;

- moyenne harmonique des nombres a et b, le nombre h défini par $\frac{2}{h} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$.

Ces notations seront conservées dans tout l'exercice.

1) Calculer chacune de ces trois moyennes lorsque $a = 50$, $b = 18$.

2) Sur la figure 1, le demi-cercle $\mathscr{C}$ a pour centre O,
A, B, C sont alignés avec O et sont tels que $AB = a$ et $BC = b$.

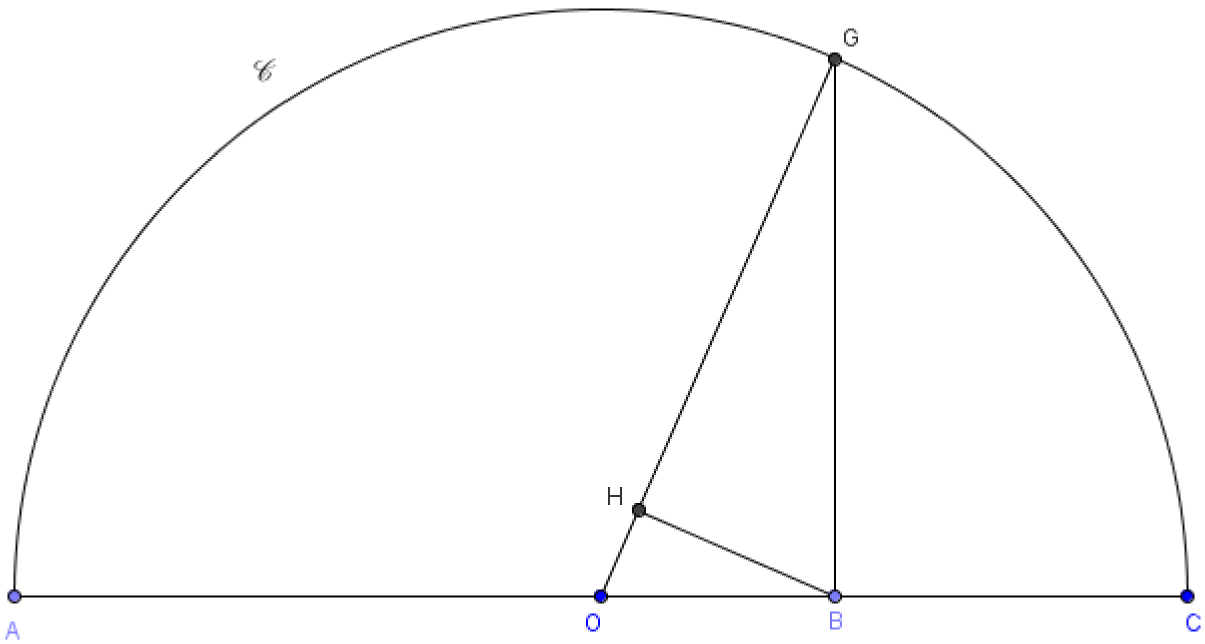

Figure 1

La perpendiculaire à (AC) en B coupe le demi-cercle $\mathscr{C}$ en G, et la perpendiculaire à (OG) passant par B coupe (OG) en H.

a) Montrer $BG = g$ et $GH = h$.

b) En déduire le classement des trois moyennes m, g et h dans l'ordre croissant.

3) Construire à la règle et au compas un carré de même aire que le rectangle donné en annexe (figure 2 à rendre avec la copie) en expliquant votre construction.

4) Sur la figure 3 ci-dessous, on a complété la figure 1 par le rectangle $OBGD$ et le demi-cercle de diamètre [AE] passant par D. .

Montrer que $OE = h$.

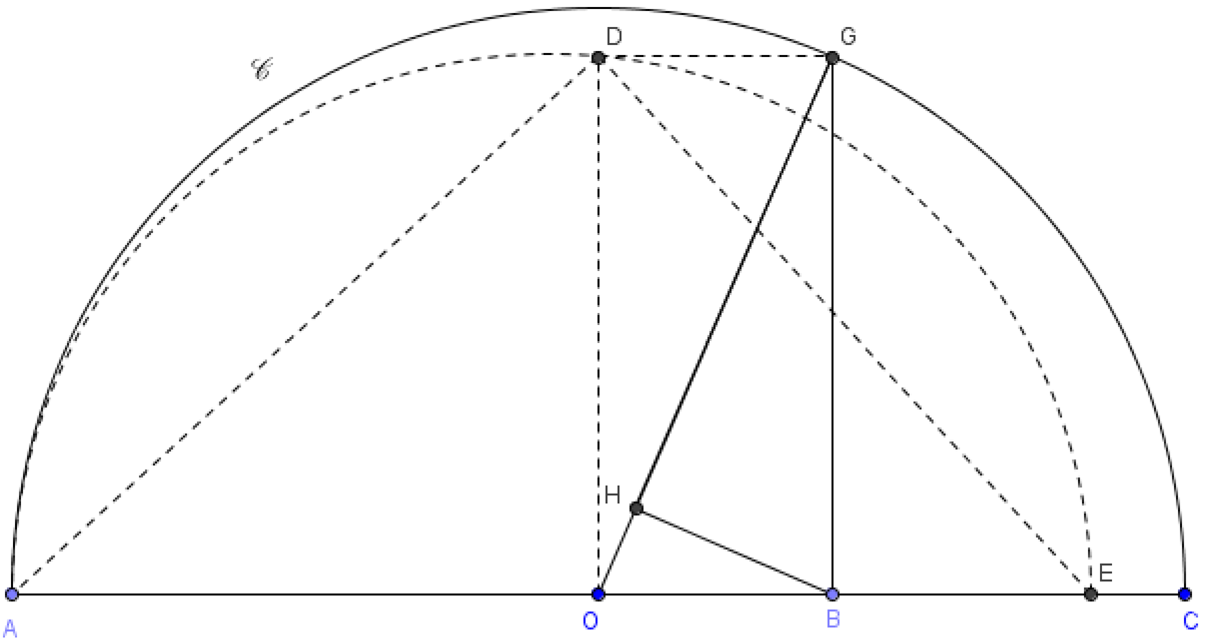

Figure 3

Annexe de l'exercice 3 à rendre avec la copie

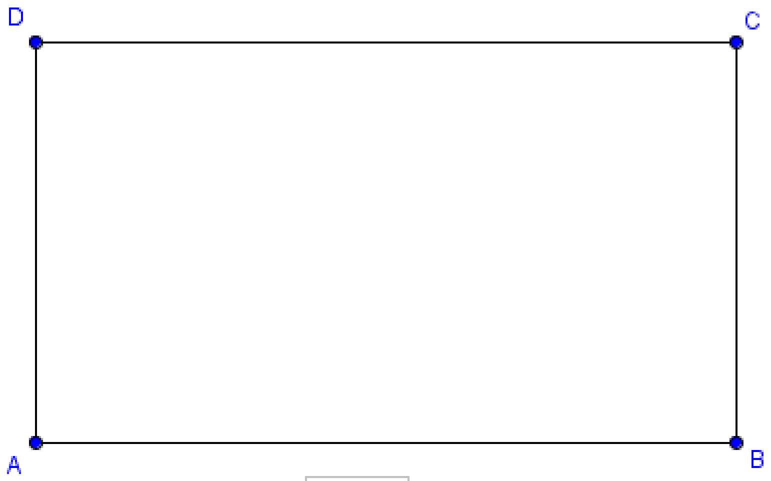

Figure 2

EXERCICE 4

Nous sommes le 21-03-2012.
Le but de l'exercice est de trouver un entier naturel M dont la racine carrée ait pour premières décimales exactement dans l'ordre les chiffres 21032012.
Cet entier M sera déterminé à la dernière question.

Pour tout entier naturel m, on note $D(m)$ le nombre d'entiers strictement compris entre m^2 et $(m+1)^2$.

1. Montrer que $D(3) = 6$ puis calculer $D(m)$ pour tout entier naturel m.

1. Une première décimale.

Pour tout entier naturel n, on note $L_1(n)$ la liste formée dans l'ordre par la première décimale de chacun des dix nombres $\sqrt{n}, \sqrt{n+1}, ..., \sqrt{n+9}$. On reproduit ici les quatre premières décimales affichées par une calculatrice pour les nombres suivants:

$\sqrt{3} \approx 1{,}\mathbf{7}32\,0$ $\quad$ $\sqrt{4} = 2{,}\mathbf{0}$ $\quad$ $\sqrt{5} \approx 2{,}\mathbf{2}36\,0$ $\quad$ $\sqrt{6} \approx 2{,}\mathbf{4}49\,4$

$\sqrt{7} \approx 2{,}\ \mathbf{6}45\,7$ $\quad$ $\sqrt{8} \approx 2{,}\mathbf{8}28\,4$ $\quad$ $\sqrt{9} = 3{,}\mathbf{0}$ $\quad$ $\sqrt{10} \approx 3{,}\mathbf{1}62\,2$

$\sqrt{11} \approx 3{,}\mathbf{3}16\,6$ $\quad$ $\sqrt{12} \approx 3{,}\mathbf{4}64\,0$ ... $\quad$ $\sqrt{101} \approx 10{,}\mathbf{0}49\,8$ $\quad$ $\sqrt{102} \approx 10{,}\mathbf{0}99\,5$

on a $L_1(3) = (7 ; 0 ; 2 ; 4 ; 6 ; 8 ; 0 ; 1 ; 3 ; 4)$.

a) Donner $L_1(7)$.
b) Soit m_1 l'entier tel que $D(m_1) = 10$.
On pose $n = m_1^2 + 1$.
Vérifier que $L_1(n) = (0 ; 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 ; 7 ; 8 ; 9)$.

2. Avec deux décimales.

Pour tout entier naturel n, on note $L_2(n)$ la liste ordonnée des entiers que forment les deux premières décimales de chacun des cent nombres $\sqrt{n}, \sqrt{n+1}, ..., \sqrt{n+99}$.
Ainsi on a $L_2(3) = (73; 00; 23; 44; 64; \ldots; 04; 09)$.
On cherche un entier naturel n tel que $L_2(n) = (00; 01; 02; 03; 04; 05; \ldots; 98; 99)$.

a) Montrer qu'un tel entier n s'il existe ne peut pas appartenir à l'un des intervalles :
$[1 ; 2^2]$; $[2^2 ; 3^2]$; $[3^2 ; 4^2]$; ... ; $[49^2 ; 50^2]$.

b) Montrer que si $0 \leq N < 10^2$ alors $\left(\dfrac{10^2}{2} + \dfrac{N}{10^2}\right)^2 < \left(\dfrac{10^2}{2}\right)^2 + N + 1 < \left(\dfrac{10^2}{2} + \dfrac{N+1}{10^2}\right)^2$.

c) Soit m_2 l'entier tel que $D(m_2) = 100$.
Calculer $n = m_2^2 + 1$ et montrer que $L_2(n) = (00; 01; 02; 03; 04; 05; \ldots; 98; 99)$.

3. Donner un nombre entier naturel M tel que le nombre formé par les quatre premières décimales de $\sqrt{M}$ soit 2012, celui formé par les quatre premières décimales de $\sqrt{M+1}$ soit 2013 et celui formé par les quatre premières décimales de $\sqrt{M+2}$ soit 2014.

4. Donner un nombre entier naturel M tel que le nombre formé par les huit premières décimales de $\sqrt{M}$ soit 21032012.

CORRECTION, NANTES 2012

Premier exercice Académique (exo 3)

Olympiades mathématiques, S

1. $a = 50, b = 18$.
   $m = 34; g = 30; h = \dfrac{450}{17}$.
2. a) ***En utilisant uniquement le théorème de Pythagore***
   Dans le triangle ABC rectangle en B
   $AB^2 + BG^2 = AG^2 \quad (1)$

   Dans le rectangle BCG rectangle en B
   $BG^2 + BC^2 = CG^2 \quad (2)$

   Dans le triangle AGC rectangle en G (inscrit dans un demi-cercle)
   $AC^2 = AG^2 + CG^2$.
   En utilisant (1) et (2), on a :
   $AC^2 = AB^2 + 2BG^2 + BC^2$.
   Mais $AC^2 = (AB + BC)^2 = AB^2 + 2AB.BC + BC^2$.
   D'où $BG^2 = AB.AC = ab = g^2$.
   Conclusion : $BG = g$.

   Avec la trigonométrie
   Dans le triangle ACG rectangle en G, $\widehat{A}$ et $\widehat{C}$ sont complémentaires .
   Dans le triangle ABG rectangle en B, $\widehat{A}$ et $\widehat{AGB}$ sont complémentaires.
   $\widehat{AGB}$ et $\widehat{C}$ sont égaux, $\tan \widehat{C} = \dfrac{BG}{BC}$ et $\tan \widehat{AGB} = \dfrac{AB}{BG}$.

   $\dfrac{BG}{BC} = \dfrac{AB}{BG}$, d'où $BG^2 = AB.BC = ab$ d'où $BG = g$

   $\widehat{BOG}$ et $\widehat{GBH}$ ont le même complémentaire $\widehat{OGB}$.

   $\sin \widehat{GBH} = \dfrac{GH}{BG}$ et $\sin \widehat{BOG} = \dfrac{BG}{OG}$.

   $GH = \dfrac{BG^2}{OG} = \dfrac{2ab}{a+b} = h$.

   Avec le produit scalaire
   $0 = \overrightarrow{GA}.\overrightarrow{GC} = \left(\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{BA}\right).\left(\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{BC}\right) = \overrightarrow{GB}^2 + \overrightarrow{GB}.\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BA}.\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}$
   $= GB^2 + 0 + 0 - BA.BC$, d'où $GB^2 = ab = g^2$.

   b) Le rayon OG vaut m.
   L'hypoténuse d'un triangle rectangle est le côté le plus long.
   On a $GH \leqslant GB \leqslant OG$.
3. On construit le demi-cercle de diamètre $AB + BC$, puis le point G, puis un carré de côté BG.
4.
   Méthode 1 :
   Dans le triangle rectangle, $OD^2 = OE \times OA$

   Comme $OD^2 = BG^2$, $OE = \dfrac{g^2}{m} = h$.

   Méthode 2 :
   D'une part, $OD = BG = g$.
   D'autre part, en considérant le cercle de diamètre [AE] et en posant $a' = AO$ et $b' = OE$, on retrouve une configuration de la question 2, puisque la perpendiculaire à (AE) coupe ce nouveau cercle en D.
   On en déduit $OD = \sqrt{a'b'}$.

   D'après ce qui précède, on a l'égalité $a'b' = ab$, ce qui revient à $m \times OE = g^2$. On obtient finalement : $OE = \dfrac{g^2}{m}h$.

source : apmep

CORRECTION, NANTES 2012

Second exercice Académique (exo 4)

Olympiades mathématiques, S

1. $D(3) = 4^2 - 3^2 - 1 = 6$ (ou la liste des entiers compris strictement entre 9 et 16 est (19 ; 11 ; 12 ; 13 ; 14 ; 15) qui contient 6 éléments).
   $D(m) = (m+1)^2 - m^2 - 1 = 2m$.
2. a) $L_1(7) = (6; 8; 0; 1; 3; 4; 5; 7; 8; 0)$
   b) $D(m_1) = 10$ d'où $m_1 = 5, n = 5^2 + 1 = 26, \sqrt{26} \approx 5,09\ldots$ etc., $\sqrt{35} \approx 5,91\ldots$
3. a) Soit $1 \leqslant m \leqslant 49$, d'où $2 \leqslant D(m) \leqslant 98$.
   Les intervalles $[m^2; (m+1)^2]$ avec m entier strictement inférieur à 50 contiennent moins de 100 entiers.
   Si n est un entier d'un de ces intervalles et $n \neq 50^2$, il existe au moins un entier i avec i allant de 1 à 99 tel que $n + i = (m+1)^2$ et les deux premières décimales de $\sqrt{n+i}$ sont nulles.
   $n = 50^2$ ne convient pas car $\sqrt{n} = \sqrt{50^2} = 50,00$ et $\sqrt{n+1} = \sqrt{50^2+1} \approx 50,00\ldots$

   b) Si $0 \leqslant N < 10^2$ alors $0 \leqslant \left(\dfrac{N}{10^2}\right)^2 < 1$

   Or $\left(\dfrac{10^2}{2} + \dfrac{N}{10^2}\right)^2 = \left(\dfrac{10^2}{2}\right)^2 + N + \left(\dfrac{N}{10^2}\right)^2$, d'où $\left(\dfrac{10^2}{2} + \dfrac{N}{10^2}\right)^2 < \left(\dfrac{10^2}{2}\right)^2 + N + 1$

   $\left(\dfrac{10^2}{2} + \dfrac{N+1}{10^2}\right)^2 = \left(\dfrac{10^2}{2}\right)^2 + N + 1 + \left(\dfrac{N+1}{10^2}\right)^2$, d'où $\left(\dfrac{10^2}{2}\right)^2 + N + 1 < \left(\dfrac{10^2}{2} + \dfrac{N+1}{10^2}\right)^2$

   c) Soit $n = \left(\dfrac{10^2}{2}\right)^2 + N + 1, \left(n + 1 = \left(\dfrac{10^2}{2}\right)^2 + (N+1) + 1, \ldots\right)$.

   On vient de montrer que $\sqrt{n}$ vérifie $\dfrac{10^2}{2} + \dfrac{N}{10^2} < \sqrt{n} < \dfrac{10^2}{2} + \dfrac{N+1}{10^2}$.

   On a ainsi : $\dfrac{10^2}{2} + \dfrac{N}{10^2} < \sqrt{n} < \dfrac{10^2}{2} + \dfrac{N+1}{10^2} < \sqrt{n+1} < \dfrac{10^2}{2} + \dfrac{N+2}{10^2} < \cdots$

   $D(m_2) = 100$ lorsque $m_1 = 50 = \dfrac{10^2}{2}$ et $n = 2501 = \left(\dfrac{10^2}{2}\right)^2 + 0 + 1$.

   d'où $n = \left(\dfrac{10^2}{2}\right)^2 + 0 + 1$ vérifie :

   $$\frac{10^2}{2} < \sqrt{n} < \frac{10^2}{2} + \frac{1}{10^2} < \sqrt{n+1} < \frac{10^2}{2} + \frac{2}{10^2} < \cdots$$
4. Des démarches analogues donnent pour les quatre premières décimales :

   $$\left(\frac{10^4}{2} + \frac{N}{10^4}\right)^2 < \left(\frac{10^4}{2}\right)^2 + N + 1 < \left(\frac{10^4}{2} + \frac{N+1}{10^4}\right]^4 < \cdots$$

   On veut $N = 2012$.

   Le nombre $\left(\dfrac{10^4}{2}\right)^2 + 2012 + 1 = 25\,002\,013$ est donc solution.
   $\sqrt{25002013} \approx 5000,\mathbf{2012}\,96\ldots$
   $\sqrt{25002014} \approx 5000,\mathbf{2013}\,96\ldots$
   $\sqrt{25002015} \approx 5000,\mathbf{2014}\,96\ldots$
5. Pour avoir les huit premières décimales égales à 21032012.
   Des démarches analogues donnent, pour les huit premières décimales :

   $$\left(\frac{10^8}{2} + \frac{N}{10^8}\right)^2 < \left(\frac{10^8}{2}\right)^2 + N + 1 < \left(\frac{10^8}{2} + \frac{N+1}{10^8}\right)^2 < \cdots$$

   On veut $N = 21\,032\,012$.

   Le nombre $\left(\dfrac{10^8}{2}\right)^2 + 21\,032\,012 + 1 = 2\,500\,000\,021\,032\,013$ convient.