OLYMPIADES MATHÉMATIQUES
LYCÉE, PREMIÈRE

ACADÉMIE DE NANCY-METZ
2020

SUJET + CORRIGÉ

20e OLYMPIADES DE MATHÉMATIQUES

Mercredi 11 mars 2020[1], 2 énoncés (national et académique) en 4 heures, élèves de première générale et technologique[2] et de début de terminale[3], inscription auprès de votre professeur de mathématiques avant les vacances d'hiver selon académie.

Liberté • Égalité • Fraternité
RÉPUBLIQUE FRANÇAISE
MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE

MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE, DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE

Olympiades nationales de mathématiques 2020

Académie de Nancy-Metz

Mercredi 11 mars 2020

Seconde partie de 10 heures à 12 heures

Exercices académiques

Elèves suivant la spécialité mathématique

L'épreuve se déroule en deux parties indépendantes et indissociables de deux heures chacune, **les énoncés des deux parties sont donc séparés et distribués séparément à des moments différents**. Les copies rédigées sont ramassées à l'issue de la première partie (« exercices nationaux »). Une pause de cinq à quinze minutes est prévue, avant la seconde partie (« exercices académiques »). Des consignes de confinement peuvent être données selon la zone géographique de passation de l'épreuve.

Les calculatrices autonomes non communicantes par ondes radio sont autorisées.

Il est conseillé aux candidats qui ne pourraient formuler une réponse complète à une question d'exposer le bilan des initiatives qu'ils ont pu prendre.

Les énoncés doivent être rendus au moment de quitter définitivement la salle de composition.

Où est la balise ?

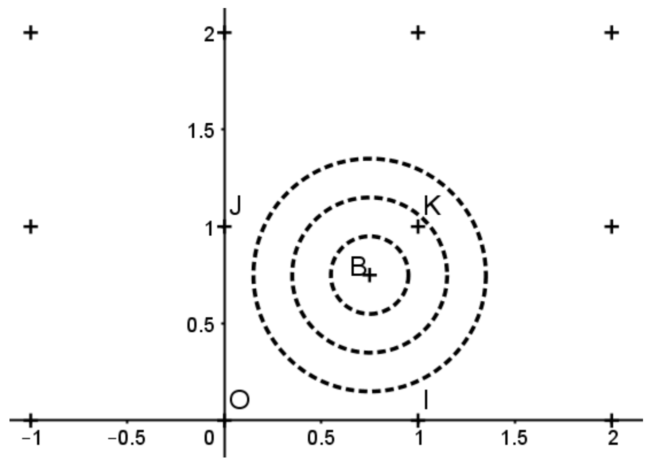
Nous considérons le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J) ainsi que l'ensemble de tous les points dont les coordonnées sont des entiers relatifs, dont une partie est représentée sur le schéma ci-dessous. On considèrera en particulier les points $O(0; 0)$, $I(1; 0)$, $J(0; 1)$ et $K(1; 1)$.

Une balise est placée en un point. Elle propage un signal circulaire. On note E_1 le(s) point(s), à coordonnées entières, atteint(s) (simultanément) par ce signal en premier, E_2 les point(s), à coordonnées entières, atteint(s) (simultanément) par ce signal en deuxième…et ainsi de suite. Pour tout entier $i \geq 1$, on définit ainsi des ensembles E_i .On notera R_i la distance parcourue par le signal entre la balise et le(s) point(s) de E_i.

Rappels :

Soient M, A et B trois points du plan et (D) la médiatrice de $[AB]$. On rappelle que :

a. La médiatrice d'un segment est la droite qui lui est perpendiculaire, passant par son milieu.
b. Si $MA = MB$ alors $M \in (D)$. Si $M \in (D)$ alors $MA = MB$.
c. Si $MA < MB$ alors M et A se trouvent du même côté par rapport à (D). Si M et A se trouvent du même côté par rapport à (D) alors $MA < MB$.



Partie A

Dans cette partie, nous plaçons la balise au point $B\left(\frac{3}{4}; \frac{3}{4}\right)$ comme sur le schéma ci-contre.

1. Calculer les longueurs BO, BI, BJ et BK, puis en déduire que $E_1 = \{K\}$ et que $E_2 = \{I, J\}$
2. Quelles sont alors les valeurs de R_1 et R_2 ?
3. Que valent alors E_3 et R_3 ?

Partie B

Dans cette partie, on ne connaît pas la position de la balise, représentée par un point B. Dans toutes les questions qui suivent on cherche, à l'aide des informations fournies, à retrouver les positions possibles pour la balise. Vous expliquerez avec clarté vos raisonnements et décrirez avec soin, l'ensemble des positions possibles pour B(si elles existent). Vous pourrez vous aider de schémas, que vous réaliserez sur votre copie (**et non sur le sujet**).

1. On suppose uniquement dans les trois questions suivantes, que $E_1 = \{K\}$.
   a. Montrer que B se situe dans un carré de centre K et de côté 1 que l'on dessinera.
   b. Supposons que $R_1 = \frac{1}{2}$, où peut se situer la balise ?
   c. Supposons que $R_2 = \frac{3}{4}$, sans rien savoir sur R_1, où peut se situer la balise ?
2. Peut-on avoir $E_1 = \{O; I; J; K\}$? Si oui, préciser le lieu où positionner B, sinon justifier pourquoi.
3. Peut-on avoir $E_1 = \{I, J\}$? Si oui, préciser le lieu où positionner B, sinon justifier pourquoi.
4. Le signal a atteint en premier le point K puis en deuxième le point J. Où peut se situer la balise ?
5. On ne sait pas quelle(s) balise est atteinte(s) en premier, mais ce sont les points J et O et seulement eux qui sont atteints en second. Où peut se situer la balise ?
6. On n'a qu'une seule information : $E_3 = \{O\}$. Faire un schéma précis qui représente les positions possibles pour B.

Autour des triangles de Kepler

On appelle **triangle de Kepler** tout triangle dont les côtés mesurent respectivement a, $a\sqrt{\varphi}$ et $a\varphi$, où a est un réel positif non nul et $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ est le nombre d'or.

I – Premières remarques

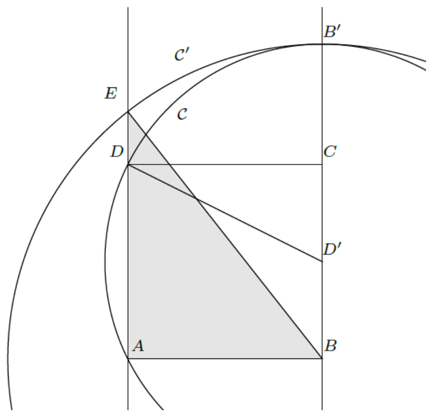
1. Vérifier que $\varphi^2 = \varphi + 1$. On admettra que φ est l'unique solution positive de l'équation $x^2 - x - 1 = 0$.
2. En déduire que les triangles de Kepler sont rectangles.
3. Montrer que l'aire d'un triangle de Kepler dont l'hypoténuse mesure 6 est $18\frac{\sqrt{\varphi}}{\varphi^2}$.

II – Construction à la règle et au compas

L'objectif de cette partie est de décrire une construction d'un triangle de Kepler uniquement réalisée avec une règle **non graduée** et un compas.

1. Tracer un segment [AB], puis construire son milieu. On laissera les traits de construction apparents.
2. Tracer une droite Δ et placer un point C tel que $C \notin \Delta$. Construire ensuite la droite perpendiculaire à Δ passant par C. On laissera les traits de construction apparents.
3. La figure ci-contre correspond au programme de construction ci-dessous (elle n'est pas à réaliser) :

- on trace un carré $ABCD$;
- on considère le milieu D' du segment $[BC]$;
- on trace le cercle $\mathcal{C}$ de centre D' et de rayon $[D'D]$;
- on note B' l'intersection de $\mathcal{C}$ avec (BC), de sorte que B, C et B' soient alignés dans cet ordre ;
- on trace le cercle $\mathcal{C}'$ de centre B et de rayon $[BB']$, et on note E une intersection entre (AD) et $\mathcal{C}'$.



On suppose que $AB = 1$.

a) Calculer la longueur DD', puis en déduire BB'.
b) Justifier que ABE est un triangle de Kepler.

III – Moyennes arithmétique, géométrique et harmonique

Pour tous nombres réels strictement positifs α et β, on définit les trois moyennes suivantes :

- la **moyenne arithmétique** de α et β est $A(\alpha\,;\,\beta) = \frac{\alpha+\beta}{2}$;
- la **moyenne géométrique** de α et β est $G(\alpha\,;\,\beta) = \sqrt{\alpha\beta}$;
- la **moyenne harmonique** de α et β est $H(\alpha\,;\,\beta) = \frac{2\alpha\beta}{\alpha+\beta}$.

1. a) Calculer $A(2\,;8)$, $G(2\,;8)$ et $H(2\,;8)$.
b) Exprimer $G\left(\frac{1}{2}\,;\frac{1}{8}\right)$ en fonction de $G(2;8)$, puis exprimer $A\left(\frac{1}{2}\,;\frac{1}{8}\right)$ en fonction de $H(2;\,8)$.

Dans la suite, on considère deux nombres réels α et β strictement positifs.

2. Exprimer $A(\alpha\,;\,\beta) \times H(\alpha\,;\,\beta)$ en fonction de $G(\alpha;\,\beta)$.
3. Montrer que $G(\alpha\,;\,\beta) \leq A(\alpha\,;\,\beta)$.
4. a) Exprimer $G(\frac{1}{\alpha}\,;\,\frac{1}{\beta})$ en fonction de $G(\alpha\,;\,\beta)$, puis exprimer $A(\frac{1}{\alpha}\,;\,\frac{1}{\beta})$ en fonction de $H(\alpha\,;\,\beta)$.
b) Déduire des questions précédentes le signe de $G(\alpha;\,\beta) - H(\alpha;\,\beta)$.

5. Dans cette question, on souhaite montrer que, pour tout couple de nombres strictement positifs, si leurs moyennes arithmétique, géométrique et harmonique sont les longueurs des côtés d'un triangle rectangle, alors ce triangle est un triangle de Kepler.
On considère donc un triangle rectangle T dont les côtés mesurent $A(\alpha\,;\,\beta)$, $G(\alpha\,;\,\beta)$ et $H(\alpha\,;\,\beta)$.

a) Justifier que l'hypoténuse du triangle rectangle T mesure $A(\alpha\ ;\ \beta)$.
b) Justifier que : $A(\alpha\ ;\ \beta)^2 - A(\alpha\ ;\ \beta) \times H(\alpha\ ;\ \beta) - H(\alpha\ ;\ \beta)^2 = 0$.
c) Conclure.

6. Le triangle dont les côtés mesurent $A\left(\sqrt{5}-1;\ \sqrt{5}+3\right)$, $G(\sqrt{5}-1;\ \sqrt{5}+3)$ et $H(\sqrt{5}-1;\ \sqrt{5}+3)$ est-il un triangle de Kepler ?
7. La réciproque du résultat de la question III-5 est-elle vraie ? Autrement-dit : si T est un triangle de Kepler, existe-t-il deux nombres positifs non nuls α et β tels que les côtés de T mesurent $A(\alpha\ ;\ \beta)$, $G(\alpha\ ;\ \beta)$, $H(\alpha\ ;\ \beta)$?

MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE, DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE

Olympiades nationales de mathématiques 2020

Académie de Nancy-Metz

Mercredi 11 mars 2020

Seconde partie de 10 heures à 12 heures

Exercices académiques

Elèves ne suivant pas la spécialité mathématique

L'épreuve se déroule en deux parties indépendantes et indissociables de deux heures chacune, **les énoncés des deux parties sont donc séparés et distribués séparément à des moments différents**. Les copies rédigées sont ramassées à l'issue de la première partie (« exercices nationaux »). Une pause de cinq à quinze minutes est prévue, avant la seconde partie (« exercices académiques »). Des consignes de confinement peuvent être données selon la zone géographique de passation de l'épreuve.

Les calculatrices autonomes non communicantes par ondes radio sont autorisées.

Il est conseillé aux candidats qui ne pourraient formuler une réponse complète à une question d'exposer le bilan des initiatives qu'ils ont pu prendre.

Les énoncés doivent être rendus au moment de quitter définitivement la salle de composition.

Où est la balise ?

Nous considérons le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J) ainsi que l'ensemble de tous les points dont les coordonnées sont des entiers relatifs, dont une partie est représentée sur le schéma ci-dessous. On considèrera en particulier les points $O(0; 0)$, $I(1; 0)$, $J(0; 1)$ et $K(1; 1)$.

Une balise est placée en un point. Elle propage un signal circulaire. On note E_1 le(s) point(s), à coordonnées entières, atteint(s) (simultanément) par ce signal en premier, E_2 les point(s), à coordonnées entières, atteint(s) (simultanément) par ce signal en deuxième…et ainsi de suite. Pour tout entier $i \geq 1$, on définit ainsi des ensembles E_i .On notera R_i la distance parcourue par le signal entre la balise et le(s) point(s) de E_i.

Rappels :

Soient M, A et B trois points du plan et (D) la médiatrice de $[AB]$. On rappelle que :

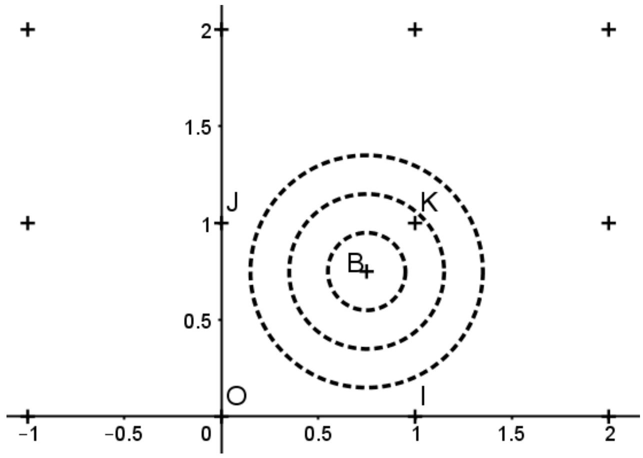
a. La médiatrice d'un segment est la droite qui lui est perpendiculaire, passant par son milieu.

b. Si $MA = MB$ alors $M \in (D)$. Si $M \in (D)$ alors $MA = MB$.

c. Si $MA < MB$ alors M et A se trouvent du même côté par rapport à (D). Si M et A se trouvent du même côté par rapport à (D) alors $MA < MB$.

Partie A

Dans cette partie, nous plaçons la balise au point $B\left(\frac{3}{4}; \frac{3}{4}\right)$ comme sur le schéma ci-contre.



1. Calculer les longueurs BO, BI, BJ et BK, puis en déduire que $E_1 = \{K\}$ et que $E_2 = \{I, J\}$
2. Quelles sont alors les valeurs de R_1 et R_2 ?
3. Que valent alors E_3 et R_3 ?

Partie B

Dans cette partie, on ne connaît pas la position de la balise, représentée par un point B. Dans toutes les questions qui suivent on cherche, à l'aide des informations fournies, à retrouver les positions possibles pour la balise. Vous expliquerez avec clarté vos raisonnements et décrirez avec soin, l'ensemble des positions possibles pour B(si elles existent). Vous pourrez vous aider de schémas, que vous réaliserez sur votre copie (**et non sur le sujet**).

1. On suppose uniquement dans les trois questions suivantes, que $E_1 = \{K\}$.
   a. Montrer que B se situe dans un carré de centre K et de côté 1 que l'on dessinera.
   b. Supposons que $R_1 = \frac{1}{2}$, où peut se situer la balise ?
   c. Supposons que $R_2 = \frac{3}{4}$, sans rien savoir sur R_1, où peut se situer la balise ?
2. Peut-on avoir $E_1 = \{O; I; J; K\}$? Si oui, préciser le lieu où positionner B, sinon justifier pourquoi.
3. Peut-on avoir $E_1 = \{I, J\}$? Si oui, préciser le lieu où positionner B, sinon justifier pourquoi.
4. Le signal a atteint en premier le point K puis en deuxième le point J. Où peut se situer la balise ?
5. On ne sait pas quelle(s) balise est atteinte(s) en premier, mais ce sont les points J et O et seulement eux qui sont atteints en second. Où peut se situer la balise ?
6. On n'a qu'une seule information : $E_3 = \{O\}$. Faire un schéma précis qui représente les positions possibles pour B.

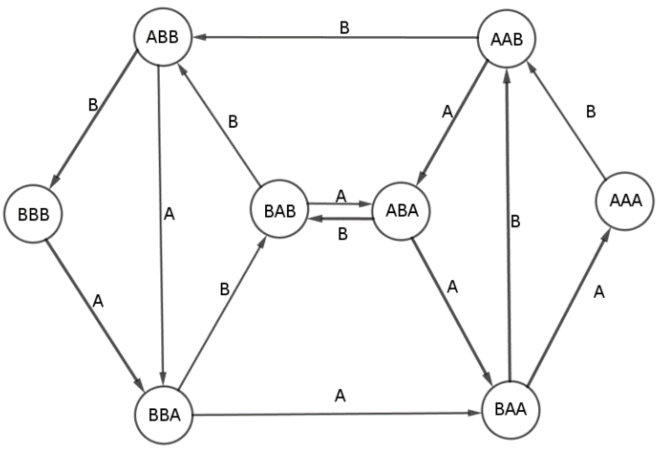
Le code oublié…

Pour rentrer dans un immeuble, il faut rentrer un bon ***code*** à l'aide d'un clavier composés de ***symboles***, par exemple les symboles A et B. Un code est une suite de symboles ordonnés, par exemple BA qui est différent du code AB.
Une personne a oublié son code et cherche à rentrer dans l'immeuble et tapant des symboles les uns après les autres, par exemple $A\ A\ B\ B\ A$. Une telle suite de symboles s'appelle une ***séquence***. La ***longueur*** d'une séquence est le nombre de symboles qu'elle contient. Dans l'exemple précédent, la séquence est de longueur 5.
Une séquence permet d'ouvrir la porte si le code figure dans cette séquence à n'importe quelle position. Par exemple, la séquence $A\ A\ B\ B\ A$ permet d'ouvrir la porte si le bon code est un des codes suivants : AAB, ABB et BBA. En effet : $\underline{\boldsymbol{A\ A\ B}}\ B\ A$, $A\ \underline{\boldsymbol{A\ B\ B}}\ A$ et $A\ A\ \underline{\boldsymbol{B\ B\ A}}$**.** Par contre, elle n'ouvrira pas la porte si le bon code est ABA.
On cherche à déterminer une séquence qui permette à coup sûr, d'ouvrir la porte. Une telle séquence s'appelle une ***séquence totale***. Les parties suivantes ne sont pas indépendantes.

Partie A :

On suppose dans cette partie que le bon code est de longueur 3, et que les symboles à disposition sont A et B.
On peut obtenir par exemple les codes ABB ou BAB.

1. Montrer qu'il existe 8 codes différents.
2. Déterminer une séquence totale de longueur 24.
3. On considère la séquence S suivante : $A\ B\ A\ B\ A\ B\ B\ A\ A\ A\ A\ A$. Ecrire les 6 codes de longueur 3 contenus dans cette séquence.
4. Le concierge de l'immeuble a choisi un code au hasard (tous les codes ont la même probabilité d'être choisis). En tapant la série suivante : $A\ A\ A\ A\ B\ A\ B\ B$, quelle est la probabilité que la porte s'ouvre ?
5. On considère le graphique suivant qui représente l'ensemble des situations.
   Les cercles contiennent les codes, les flèches contiennent les symboles tapés sur le clavier.
   Par exemple, si on commence par rentrer le code BAA puis que l'on appuie sur A, alors on teste le code AAA. En revanche, si on appuie sur B, on teste le code AAB.
   a. En partant du cercle AAA, tracer sur l'annexe A (à rendre avec la copie) un chemin qui passe par tous les cercles une unique fois, en suivant les flèches.
   b. En déduire une séquence totale de longueur 10.
   c. Peut-on avoir une séquence totale de longueur strictement inférieure à 10 ? Justifier.
   d. Combien existe-t-il de séquences totales qui commencent par AAA ? par BAB ? en tout ?
   e. Si on tape 10 symboles au hasard, quelle est la probabilité d'avoir composé une séquence totale ?



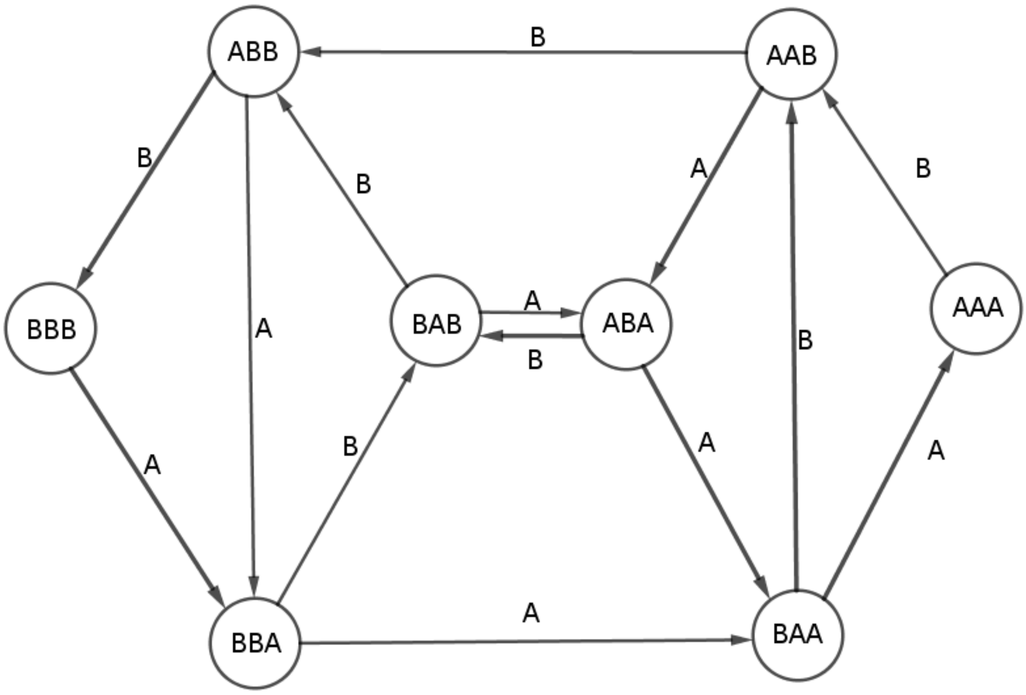
Partie B :

On suppose dans cette partie que le code est de longueur 2, et que les symboles à disposition : A, B et C.

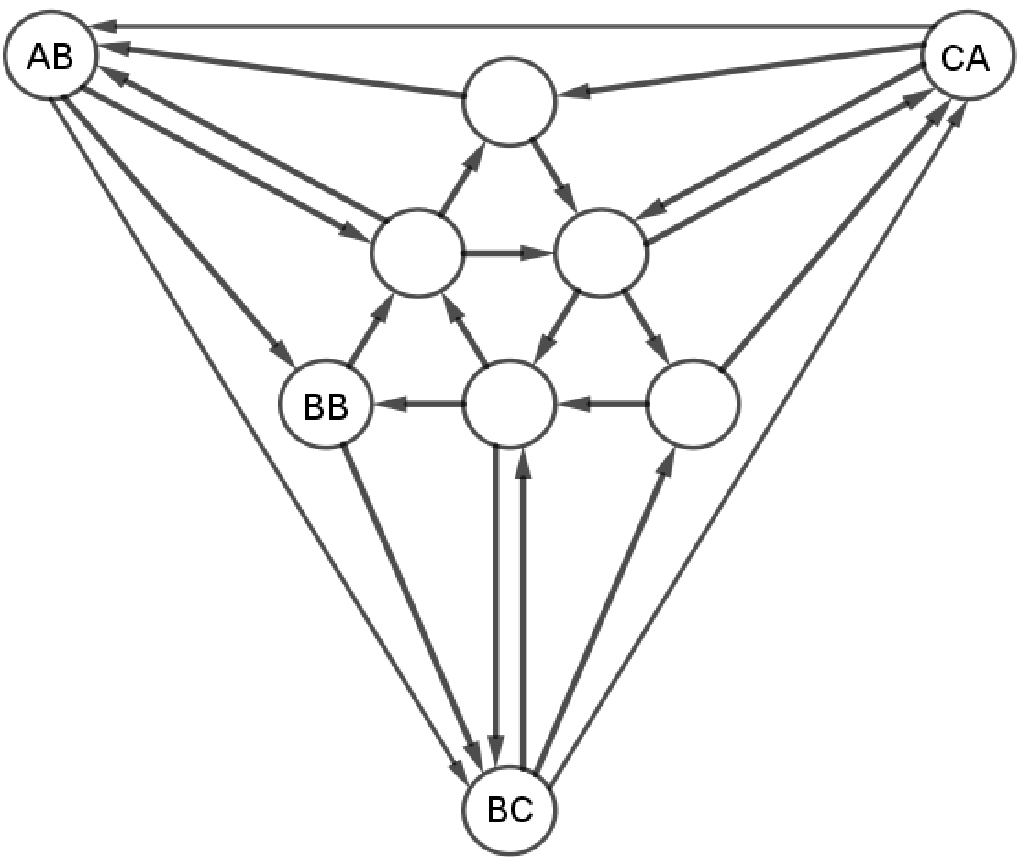
1. Combien de codes différents existe-t-il ? Justifier.
2. Compléter le graphique donné en annexe B (à rendre avec la copie).
3. En déduire une séquence totale qui commence par AC.

Annexes

Annexe A



Annexe B



www.freemaths.fr

OLYMPIADES MATHÉMATIQUES
LYCÉE, PREMIÈRE

CORRECTION !

Épreuve ▪ 2020

Triangles de Kepler - corrigé

I - Premières remarques

1. On a $\varphi^2 = \left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 = \dfrac{1+2\sqrt{5}+5}{4} = 1 + \dfrac{2+2\sqrt{5}}{4}$ donc $\varphi^2 = 1+\varphi$.
2. On a $a^2 + (a\sqrt{\varphi})^2 = a^2(1+\varphi) = a^2\varphi^2$ d'après la question précédente. Le théorème de Pythagore assure donc qu'un triangle de Kepler est nécessairement rectangle.
3. Il existe $a \in \mathbf{R}^{+\star}$ tel que l'hypoténuse du triangle recherché mesure $a\varphi$. L'égalité $a\varphi = 6$ entraîne que $a = \dfrac{6}{\varphi}$. Ainsi les deux autres côtés du triangle mesurent $\dfrac{6}{\varphi}$ et $\dfrac{6}{\varphi}\sqrt{\varphi}$. On en déduit que l'aire du triangle est $\dfrac{1}{2} \times \dfrac{6}{\varphi} \times \dfrac{6}{\sqrt{\varphi}} = \dfrac{36}{2\varphi\sqrt{\varphi}} = \dfrac{18\sqrt{\varphi}}{\varphi^2}$.

II - Construction à la règle et au compas

3. (a) Comme $ABCD$ est un carré de côté 1, on a $DC = 1$ et $BC = 1$, d'où $D'C = \frac{1}{2}$ puisque D' est le milieu de $[BC]$. Par ailleurs, puisque $ABCD$ est un carré, $DD'C$ est un triangle rectangle. Le théorème de Pythagore assure alors que $DD' = \sqrt{1^2 + (\frac{1}{2})^2} = \frac{\sqrt{5}}{2}$.
   Par ailleurs, D' et B' appartiennent tous deux au cercle $\mathcal{C}$ de centre D', d'où $DD' = D'B'$. Ainsi, puisque B, D' et B' sont alignés dans cet ordre, $BB' = BD' + D'B' = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2} = \varphi$.

   (b) Puisque E et B' appartiennent au cercle $\mathcal{C}'$ de centre B, on a $BE = BB' = \varphi$. Par ailleurs $E \in (AD)$ et $(AD)\perp(AB)$, donc ABE est rectangle en A. Le théorème de Pythagore assure alors que $AE = \sqrt{\varphi^2 - 1} = \sqrt{\varphi}$ d'après la question I-1. Finalement, les côtés de ABE mesurent 1, $\sqrt{\varphi}$ et φ, donc ABE est un triangle de Kepler.

III - Moyennes arithmétique, géométrique et harmonique

1. (a)
   - $A(2;8) = \dfrac{2+8}{2} = 5$.
   - $G(2;8) = \sqrt{2\times 8} = 4$.
   - $H(2;8) = \dfrac{2\times 2\times 8}{2+8} = \dfrac{16}{5}$.

   (b)
   - $G\left(\dfrac{1}{2};\dfrac{1}{8}\right) = \sqrt{\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{8}} = \dfrac{1}{\sqrt{2\times 8}} = \dfrac{1}{G(2;8)}$;
   - $A\left(\dfrac{1}{2};\dfrac{1}{8}\right) = \dfrac{\frac{1}{2}+\frac{1}{8}}{2} = \dfrac{\frac{8+2}{2\times 8}}{2} = \dfrac{8+2}{2\times 2\times 8} = \dfrac{1}{H(2;8)}$.
2. On a $A(\alpha;\beta)\times H(\alpha;\beta) = \dfrac{\alpha+\beta}{2}\times\dfrac{2\alpha\beta}{\alpha+\beta} = \alpha\beta = G(\alpha;\beta)^2$.
3. On a :

$$\begin{aligned} G(\alpha;\beta) \leqslant A(\alpha;\beta) &\iff G(\alpha;\beta)^2 \leqslant A(\alpha;\beta)^2 \\ &\iff \alpha\beta \leqslant \frac{(\alpha+\beta)^2}{4} \\ &\iff 0 \leqslant \alpha^2+\beta^2-2\alpha\beta \\ &\iff 0 \leqslant (\alpha-\beta)^2. \end{aligned}$$

   Ainsi l'inégalité est vraie.
4. (a) $G\left(\dfrac{1}{\alpha};\dfrac{1}{\beta}\right) = \sqrt{\dfrac{1}{\alpha}\times\dfrac{1}{\beta}} = \dfrac{1}{\sqrt{\alpha\beta}} = \dfrac{1}{G(\alpha;\beta)}$ et $A\left(\dfrac{1}{\alpha};\dfrac{1}{\beta}\right) = \dfrac{\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}}{2} = \dfrac{\alpha+\beta}{2\alpha\beta} = \dfrac{1}{H(\alpha;\beta)}$.

   (b) On a $G(\alpha;\beta) - H(\alpha;\beta) = \dfrac{1}{G(\frac{1}{\alpha};\frac{1}{\beta})} - \dfrac{1}{A(\frac{1}{\alpha};\frac{1}{\beta})}$. Or, d'après la question III-3. appliquée au couple $\left(\dfrac{1}{\alpha};\dfrac{1}{\beta}\right)$, on a : $G\left(\dfrac{1}{\alpha};\dfrac{1}{\beta}\right) \leqslant A\left(\dfrac{1}{\alpha};\dfrac{1}{\beta}\right)$. Comme la fonction inverse est décroissante sur $\mathbf{R}^{+\star}$, on en déduit que $\dfrac{1}{G(\frac{1}{\alpha};\frac{1}{\beta})} \geqslant \dfrac{1}{A(\frac{1}{\alpha};\frac{1}{\beta})}$, puis $G(\alpha;\beta) - H(\alpha;\beta) \geqslant 0$.

5. (a) D'après les question III-3. et III-4.b), on a $H(\alpha;\beta) \leqslant G(\alpha;\beta) \leqslant A(\alpha;\beta)$, donc l'hypoténuse de T mesure $A(\alpha;\beta)$.

   (b) En utilisant successivement la question III-2. et le théorème de Pythagore, on obtient : $A(\alpha;\beta)^2 - A(\alpha;\beta) \times H(\alpha;\beta) - H(\alpha;\beta)^2 = A(\alpha;\beta)^2 - G(\alpha;\beta)^2 - H(\alpha;\beta)^2 = 0$.

   (c) D'après la question précédente, puisque $H(\alpha;\beta) \neq 0$,
$$\left(\frac{A(\alpha;\beta)}{H(\alpha;\beta)}\right)^2 - \frac{A(\alpha;\beta)}{H(\alpha;\beta)} - 1 = 0.$$
   Or $\frac{A(\alpha;\beta)}{H(\alpha;\beta)} > 0$, donc, d'après la question I-1., $\frac{A(\alpha;\beta)}{H(\alpha;\beta)} = \varphi$, puis $A(\alpha;\beta) = H(\alpha;\beta)\varphi$. Par ailleurs, la question III-2. donne $G(\alpha;\beta) = \sqrt{H(\alpha;\beta)^2\varphi} = H(\alpha;\beta)\sqrt{\varphi}$ (car $H(\alpha,\beta) \geqslant 0$). Finalement, T est un triangle de Kepler.

6. • *Méthode 1* : On peut procéder sans utiliser aucun des résultats démontrés avant :
$$A(\sqrt{5}-1;\sqrt{5}+3) = \frac{\sqrt{5}-1+\sqrt{5}+3}{2} = \sqrt{5}+1 = 2\varphi,$$
$$H(\sqrt{5}-1;\sqrt{5}+3) = \frac{2(\sqrt{5}-1)(\sqrt{5}+3)}{\sqrt{5}-1+\sqrt{5}+3} = \frac{2(2+2\sqrt{5})}{2(\sqrt{5}+1)} = 2,$$
   et
$$G(\sqrt{5}-1;\sqrt{5}+3) = \sqrt{(\sqrt{5}-1)(\sqrt{5}+3)} = 2\sqrt{\varphi}.$$
   Ainsi le triangle est de Kepler.

   • *Méthode 2 (la plus rapide)* : On peut s'inspirer du raisonnement fait à la question III-5.-c), et simplement vérifier que le quotient de la moyenne arithmétique par la moyenne harmonique est φ. On a $\frac{A(\sqrt{5}-1;\sqrt{5}+3)}{H(\sqrt{5}-1;\sqrt{5}+3)} = \varphi$ (on économise le calcul de la moyenne géométrique). Avec la question III-2, on a $G(\sqrt{5}-1;\sqrt{5}+3) = 2\sqrt{\varphi}$ et donc le triangle est de Kepler.

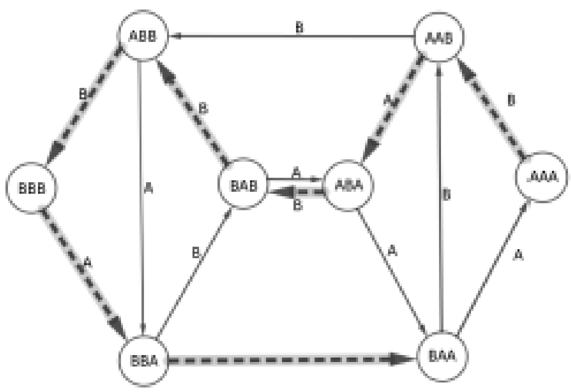
   • *Méthode 3* : Si on n'arrive pas à factoriser par φ et $\sqrt{\varphi}$ dans la moyenne arithmétique et la moyenne géométrique (comme dans la méthode 1), on peut vérifier l'égalité de Pythagore et conclure avec le résultat de la question précédente (c'est la méthode qui nécessite le plus de calculs).

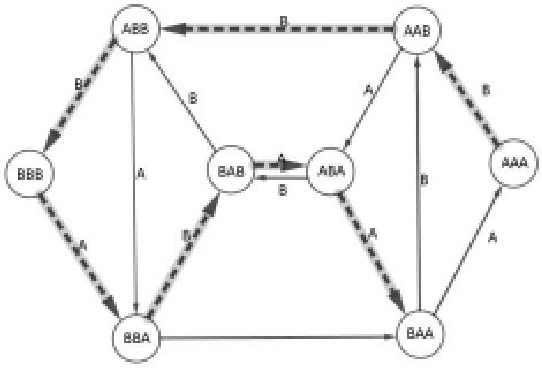
7. Si T est un triangle de Kepler, il existe $a > 0$ tel que ses côtés mesurent a, $a\sqrt{\varphi}$ et $a\varphi$. D'après les calculs de la question précédente, pour $\alpha = a\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ et $\beta = a\frac{\sqrt{5}+3}{2}$, on a $H(\alpha;\beta) = a$, $G(\alpha;\beta) = a\sqrt{\varphi}$ et $A(\alpha;\beta) = a\varphi$.

Correction Olympiades : Le code oublié

Partie A

1. Chaque symbole peut prendre 2 valeurs, donc $2^3 = 8$ possibilités. (ou lire les 8 codes sur le graphique).
2. On met bout à bout les 8 codes de longueur 3, soit une séquence de longueur 24.
   Exemple : $AAA\ AAB\ ABA\ BAB\ ABB\ BBB\ BBA\ BAA$
3. Les 6 codes contenus sont : ABA, BAB, ABB, BBA, BAA et AAA.
4. La séquence contient les codes : AAA, AAB, ABA, BAB et ABB soit 5 codes sur les 8 possibles, donc une probabilité de $5/8$.
5. En considérant le graphique :
   a. Deux chemins possibles :





   b. Deux séquences possibles (si on commence par AAA) :
   $AAABBBABAA$ ou $AAABABBBAA$
   c. On ne peut avoir une séquence totale de longueur strictement inférieure à 10, car, il faut rentrer 8 codes différentes au minimum : 3 symboles pour le premier code, et au moins 1 symbole par code restant, soit $3 + 7 \times 1 = 10$.
   d. Si on considère seulement les séquences totales de longueur 10 :
   - Il y en a 2 qui commencent par AAA (voir question a.) : faire un arbre qui énumère les chemins possibles.
   - Même situation en commençant par BAB (les mêmes chemins qu'en a., à un déplacement du point de départ, près) : refaire un arbre pour la démonstration.
   - Sans préciser le point de départ : les 8 codes possibles peuvent être choisis comme point de départ et à chaque fois, on a deux chemins possibles à

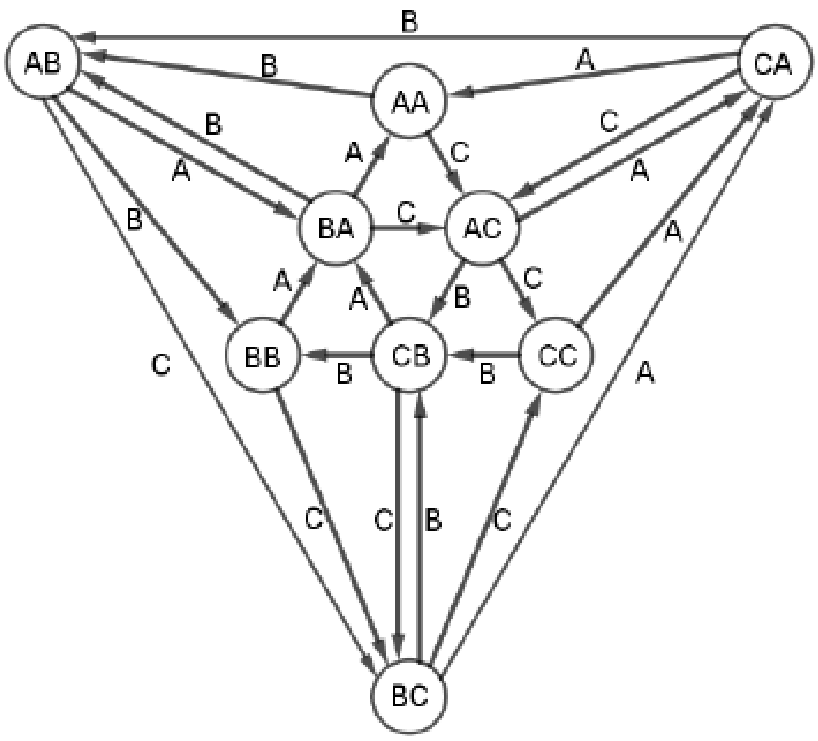
suivre (toujours les 2 mêmes !). Donc 16 séquences totales de longueur 10 en tout.

Si on ne considère pas les séquences totales les plus courtes, il y en a une infinité (on rajoute autant de symboles que l'on veut dans l'une des 16 séquences préalablement citées).

e. Si on tape 10 symboles au hasard, il y a 2 possibilités pour chaque symbole, donc $2^{10} = 1024$ combinaisons possibles. Il y en a 16 qui soient totales, donc la probabilité est de $\frac{16}{1024} = \frac{1}{64} = 0{,}015625$.

Partie B

1. Pour chaque symbole, il y a 3 choix possibles, donc $3^2 = 9$ codes possibles.
2.



3. Les 24 séquences totales commençant par AC possibles, sont :

ACAABBCCBA	ACAABCCBBA	ACABBCCBAA	ACABCCBBAA
ACBAABBCCA	ACBABBCCAA	ACBBAABCCA	ACBBABCCAA
ACBBCCAABA	ACBBCCABAA	ACBCCAABBA	ACBCCABBAA
ACCAABBCBA	ACCAABCBBA	ACCABBCBAA	ACCABCBBAA
ACCBAABBCA	ACCBABBCAA	ACCBBAABCA	ACCBBABCAA
ACCBBCAABA	ACCBBCABAA	ACCBCAABBA	ACCBCABBAA

Pour simplifier la correction, il suffit de rentrer la séquence de l'élève dans l'algo suivant :

```python
# algo qui renvoie True, si la séquence est totale, et False sinon:
def SequenceTotale( sequence ):
    listeCodes = [ "AA", "AB", "AC", "BA", "BB", "BC", "CA", "CB", "CC"]
    listeCodesDansSequence = []
    # 1. on crée la liste de tous les codes contenus dans la séquence
    for i in range(len(sequence) - 1):
        # on récupère le code en cour
        code = sequence[i:i+2]
        # on complète la liste des codes inclus dans la séquence
        listeCodesDansSequence.append(code)

    # la séquence est totale, si on ne trouve aucun code qu'elle ne contienne pas.
    Totale = True
    # 2. on vérifie que chaque code est présent dans cette liste
    for code in listeCodes:
        if (listeCodesDansSequence.count(code) == 0):
            Totale = False

    return (Totale)

print(SequenceTotale("ACABCCBBA"))

#en prime, algo qui liste toutes les séquences totales commençant par AC
def SequencesTotalesAC():
    # les symboles possibles sont
    listeSymboles = ["A", "B", "C"]

    # on crée toutes les séquences de 10 symboles, commençant par AC
    SequencesPossibles = []
    for l3 in listeSymboles:
        for l4 in listeSymboles:
            for l5 in listeSymboles:
                for l6 in listeSymboles:
                    for l7 in listeSymboles:
                        for l8 in listeSymboles:
                            for l9 in listeSymboles:
                                for l10 in listeSymboles:
                                    sequence = "AC" + l3 + l4 + l5 + l6 + l7 + l8 + l9 + l10
                                    SequencesPossibles.append(sequence)

    # on affiche les séquences totales:
    count = 0
    for seq in SequencesPossibles:
        if (SequenceTotale(seq)):
            print(seq)
            count = count + 1
    return (count)

print(SequencesTotalesAC())
```

Correction Olympiades : Les balises

Partie A

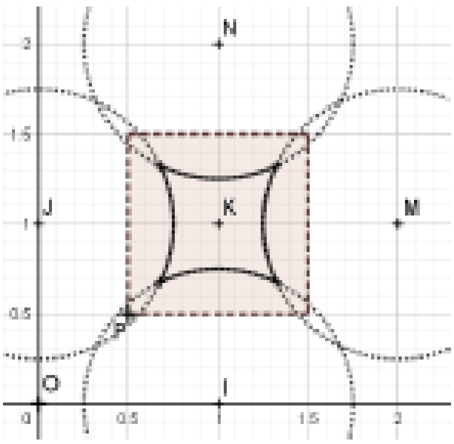
1. $BO = \sqrt{\left(\frac{3}{4}\right)^2 + \left(\frac{3}{4}\right)^2} = \sqrt{\frac{18}{16}} = \frac{3\sqrt{2}}{4}$ $\quad BI = BJ = \frac{\sqrt{10}}{4}$ $\quad BK = \frac{\sqrt{2}}{4}$

   Le disque de centre B et de rayon BK ne contient aucun point à coordonnées entières, à part K donc $E_1 = \{K\}$.

   Le disque de centre B et de rayon $BI = BJ$ ne contient que K, I et J, les points I et J étant atteints en même temps donc $E_2 = \{I, J\}$.
2. $R_1 = BK = \frac{\sqrt{2}}{4}$ et $R_2 = BI = BJ = \frac{\sqrt{10}}{4}$.
3. Le disque de centre B passant par O ne contient que O et les points des ensembles E_1 et E_2. Donc $E_3 = \{O\}$ et $R_3 = BO = \frac{3\sqrt{2}}{4}$

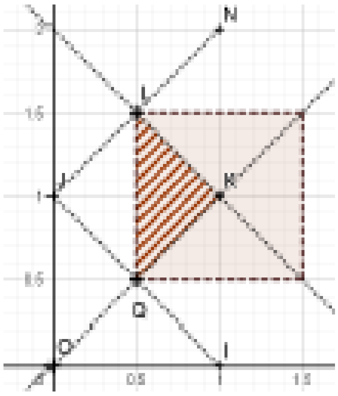
Partie B

1. Avec $E_1 = \{K\}$
   a. Comme K est atteint en premier par la balise, $BK < BJ$ donc B se trouve dans le demi-plan défini par la médiatrice de $[JK]$, contenant K. On peut tenir le même raisonnement en considérant les points I et $M(2; 1)$ et $N(1; 2)$.
   Le points B doit se trouver à l'intérieur de carré de centre K (bords exclus), dont les côtés sont parallèles aux axes.
   b. Si $R_1 = \frac{1}{2}$, cela signifie que $BK = \frac{1}{2}$ et que B doit se trouver sur le cercle de centre K et de rayon $\frac{1}{2}$ (excepté les points de contact avec le carré (question a.).
   c. Si $R_2 = \frac{3}{4}$, sans connaître la valeur de R_1, alors les points atteints en second sont I, J, M ou N. On considère alors les arcs de cercle de centre ces points, et de rayon $\frac{3}{4}$. On obtient la figure :

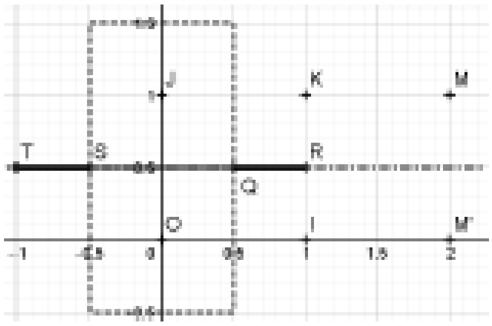


2. Si $E_1 = \{O, I, J, K\}$ alors le point B est équidistant de ces 4 points, donc sur les médiatrices de $[IK]$, $[KJ]$, $[IO]$ et $[JO]$ qui sont concourantes en le point $P\left(\frac{1}{2}\,;\frac{1}{2}\right)$. Donc B doit se trouver en P.

3. Si $E_1 = \{I, J\}$ alors en reprenant la condition nécessaire de la question 1., B doit être dans le carré de côté 1 et centré sur J mais aussi dans celui centré sur I. Le seul point commun à ces deux ensembles étant P (question 2), or la question 2. Nous indique que dans ce cas, $E_1 = \{O, I, J, K\}$, contradiction! Donc E_1 ne peut pas être égal à $\{I, J\}$.



4. Dans ce cas $E_1 = \{K\}$ et $E_2 = \{J\}$. $E_1 = \{K\}$ impose à B d'être dans le même carré que dans la question 1. $E_2 = \{J\}$ impose à B d'être plus proche de J que de I et N. Donc en traçant les bissectrices de $[JN]$ et $[JI]$ on restreint les positions possibles à l'intérieur du triangle LKQ.
5. On sait donc que $E_2 = \{J, O\}$. B est alors équidistant de J et de O, donc sur la médiatrice de $[JO]$. Pour ne pas que le signal atteigne ces points en premier, on doit exclure les points se trouvant dans les carrés de côté 1, centrés sur J et O (cf question1).



   - Si B est en Q, $E_1 = \{O, I, J, K\}$: impossible !
   - Si B est en R, $E_2 = \{O, J, M, M'\}$: impossible !
   - Si $B \in [QR]$, Q et R exclus, noté $]QR[$, en considérant la médiatrice de $[JK]$, on aura $E_1 = \{K; I\}$ et $E_2 = \{J; O\}$. En considérant le point M et donc la médiatrice de $[JM]$, B ne peut pas appartenir au reste de la demi-droite $[QR)$.

   Donc les positions possibles pour B, sont : le segment $]QR[$ et par symétrie, $]TS[$.
6. La partie hachurée sans les bords, est l'ensemble des points solution.