OLYMPIADES MATHÉMATIQUES
LYCÉE, PREMIÈRE

ACADÉMIE DE MONTPELLIER
2020

SUJET + CORRIGÉ

20e OLYMPIADES DE MATHÉMATIQUES

Mercredi 11 mars 2020[1], 2 énoncés (national et académique) en 4 heures, élèves de première générale et technologique[2] et de début de terminale[3], inscription auprès de votre professeur de mathématiques avant les vacances d'hiver selon académie.

Olympiades
de mathématiques 2020

Mercredi 11 mars 2020 de 10h10 à 12h10

Les calculatrices sont autorisées selon la législation en vigueur.
Il est conseillé aux candidats qui ne pourraient formuler une réponse complète à une question d'exposer le bilan des initiatives qu'ils ont pu prendre.

Les énoncés doivent être rendus au moment de quitter définitivement la salle de composition.

Exercices académiques

Les candidats traitent **deux exercices :**

Les candidats de voie générale ayant suivi l'enseignement de spécialité de mathématiques doivent traiter les exercices 1 et 2.
Les autres candidats doivent traiter les exercices 1 et 3.

Exercice académique numéro 1 (à traiter par tous les candidats)

Séquences de chiffres

Définitions : Pour tout nombre entier naturel on définit ses chiffres significatifs de la manière suivante :
- Le chiffre zéro n'est pas significatif s'il est placé à gauche du nombre.
- Tous les autres chiffres d'un nombre sont significatifs.
- Le nombre "0" admet zéro chiffre significatif.

On dit que le nombre 2 020 présente les séquences "0", "2", "20", "02", "020" et "202" et "2020", mais pas la séquence "22" ni "0202".
On considère la fonction f_a qui à un nombre entier naturel donné associe 1 si ce nombre comporte la séquence $"a"$ et 0 sinon.
Par exemple, $f_2(2020) = 1$, $f_{22}(2020) = 0$ et $f_{1983}(2020) = 0$.

Partie A : Quelques exemples

1. Déterminer les valeurs de $f_2(421)$, de $f_2(156)$ et de $f_2(2225)$.
2. Déterminer les valeurs de $f_{20}(102)$, $f_{20}(2020)$ et de $f_{2020}(20)$.
3. Proposer un entier naturel *k* tel que $f_{2020}(k) = 1$.
4. Proposer un entier naturel *k* tel que $f_{2020}(k) = 0$.

Partie B : Entiers naturels sans la séquence "2"

Pour tout entier naturel n, on désigne par $u(n)$ le nombre d'entiers à n chiffres significatifs qui ne possèdent pas la séquence "2" dans leur écriture.
On a $u(0) = 1$, car 0 est le seul nombre à zéro chiffre significatif sans la séquence "2".

1. Justifier que $u(1) = 8$.
2. Déterminer $u(2)$ et $u(3)$.
3. En utilisant la fonction f_2, recopier et compléter l'algorithme pour qu'à la fin de l'algorithme la variable *U* contienne la valeur de $u(n)$.

U ← 0
Pour *i* allant de 10^{n-1} à $10^n - 1$:
    Si ……………………………………….
        ……………………………………….
    FinSi
FinPou
r
U ← $10^n - 10^{n-1} - U$

Partie C : Entiers sans la séquence "20"

Pour tout entier naturel n, on désigne par $w(n)$ le nombre d'entiers à n chiffres significatifs qui ne possèdent pas la séquence "20" dans leur écriture. On peut noter que $w(1) = 9$.

1. Déterminer $w(3)$.
2. Proposer un algorithme ou un programme en Python qui, pour un nombre entier naturel k donné, détermine la valeur de $f_{20}(k)$.

Partie D : Autour du nombre 2 020

1. Combien existe-t-il de nombres à 6 chiffres significatifs sans la séquence "2 020" ? Justifier votre réponse par la méthode de votre choix.
2. Existe-t-il un nombre entier possédant exactement 2020 séquences différentes ? Expliquer votre choix.

Exercice académique numéro 2 (à traiter par les candidats de voie générale ayant choisi la spécialité mathématiques)

Régionnement du plan sur une position générale de droites, de cercles

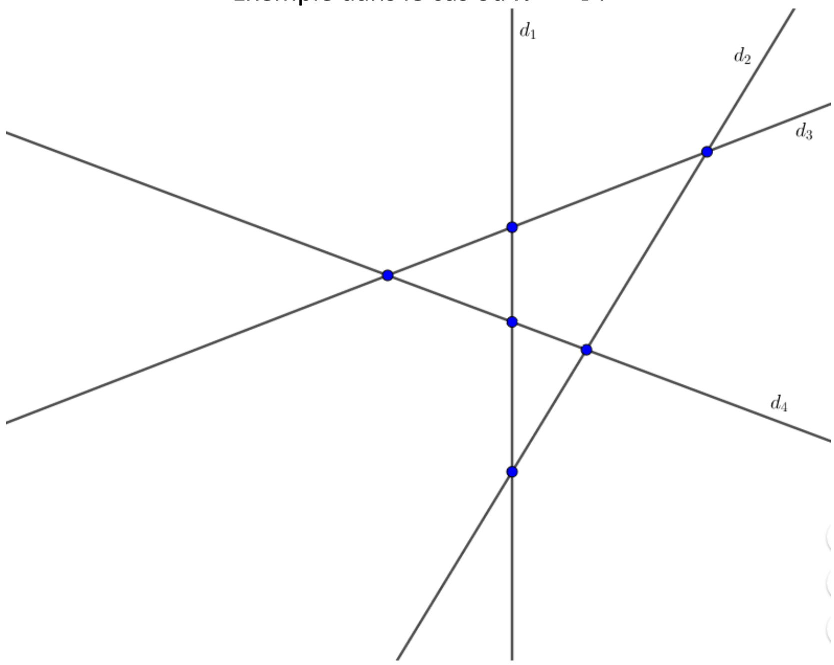
***Pour cet exercice, on rappelle que pour tout entier naturel** $n \geq 1$,*

$$1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

<u>Partie A</u> :

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 3. On dit que n droites du plan sont <u>en position générale</u> lorsque, parmi celles-ci, deux droites quelconques distinctes sont toujours sécantes et trois droites quelconques ne sont jamais concourantes.

Exemple dans le cas où $n = 4$:



I- On s'intéresse ici au nombre de régions du plan délimitées par n droites en position générale. On note ce nombre r_n. On admet que ce nombre ne dépend pas de la position générale des n droites. Par exemple pour 4 droites, on a $r_4 = 11$ puisqu'en tout il y a 11 régions comme le montre la figure ci-dessus.

1. Donner en justifiant la valeur de r_5. Puis donner sans justifier les valeurs de r_3 et r_6.
2. Expliquer de façon claire pourquoi on peut affirmer que, pour tout entier naturel $n \geq 3$,
$$r_{n+1} = r_n + n + 1$$
3. En déduire un algorithme (ou une programme écrit en langage Python) qui permet de donner la valeur de r_n lorsque la valeur de n est donnée. Puis donner la valeur de r_{2020}.
4. Exprimer r_n en fonction de n.

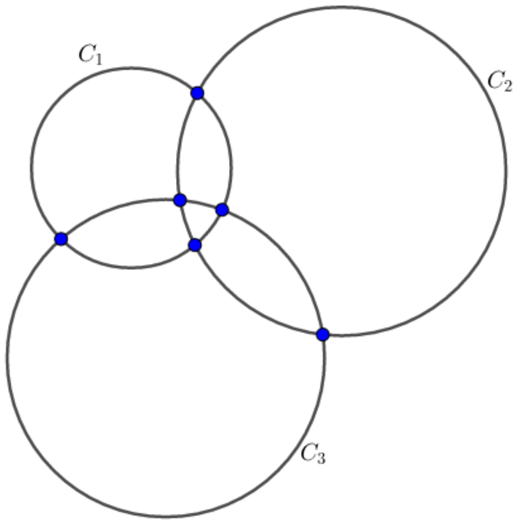
II- On note p_n le nombre de points d'intersection obtenus avec n droites en position générale. Chacune de ces droites est composée de plusieurs parties de droites qu'on appellera arêtes (des segments entre deux points d'intersection consécutifs et deux demi-droites). On note a_n le nombre total d'arêtes. On admet également que ces nombres p_n et a_n ne dépendent pas de la position générale des n droites. Par exemple pour 4 droites, on a $p_4 = 6$ et $a_4 = 16$ puisqu'en tout il y a 6 points d'intersection et 16 arêtes (4 arêtes sur chaque droite).

Un vieil ami à vous, Leonhard, affirme que « pour tout entier naturel $n \geq 3$, $p_n - a_n + r_n = 1$ » ?
Qu'en pensez-vous ? Justifier soigneusement votre réponse.

<u>Partie B</u> :

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 3. On dit que n cercles du plan sont <u>en position générale</u> lorsque, parmi ceux-ci, deux cercles quelconques distincts sont toujours sécants en deux points distincts et trois cercles quelconques ne sont jamais concourants en un seul point.

Exemple dans le cas où $n = 3$:



On s'intéresse au nombre de régions du plan délimitées par n cercles en position générale. On note ce nombre c_n. On admet là aussi que ce nombre ne dépend pas de la position générale des n cercles. Par exemple pour 3 cercles, on a $c_3 = 8$ puisqu'en tout il y a 8 régions comme le montre la figure ci-dessus.

1. Donner en justifiant la valeur de c_4. Puis donner sans justifier la valeur de c_5.
2. Exprimer c_n en fonction de n.
3. Existe-t-il un entier n tel que $c_n = 380$?
4. Existe-t-il des entiers $n \geq 3$ tels que le nombre de régions délimitées par n cercles en position générale soit inférieur au nombre de régions délimitées par n droites en position générale ?
5. Est-il possible que c_n soit un nombre impair ?
6. Déterminer tous les entiers n tels que c_n soit un multiple de 6.

Exercice académique numéro 3 (à traiter par les candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité de mathématiques)

Quartier Latin

Partie A

Le plan d'un quartier est un carré 4×4 dans lequel figurent 16 immeubles de 10, 20, 30 et 40 étages respectivement. En référence à une certaine organisation romaine, on dit que le quartier est ***latin*** si chaque ligne et chaque colonne du plan comporte exactement un immeuble et un seul de chaque taille.

1. Recopier et compléter le plan du quartier latin ci-dessous en indiquant dans chaque case le nombre d'étages de l'immeuble qui s'y trouve.

10			
20			
	30		10
		40	

2. En permutant des colonnes sur le plan d'un quartier latin, obtient-on le plan d'un nouveau quartier latin ? Justifier.
3. On dispose du plan d'un quartier latin ; combien de plans de quartiers latins différents peut-on obtenir en permutant des colonnes ?
4. Justifier alors que, par permutation éventuelle de lignes et/ou de colonnes, on peut transformer tout plan de quartier latin en un plan de quartier latin du type suivant (les * désignant des hauteurs d'immeubles inconnues).

10	20	30	40
20	*	*	*
30	*	*	*
40	*	*	*

5. Combien de plans de quartiers latins différents existe-t-il ?

Partie B

Sur le plan d'un quartier latin, on s'intéresse au nombre d'immeubles visibles en bouts de lignes et en bouts de colonnes.

Par exemple, sur la ligne ci-dessous, on indique 2 du côté gauche : en effet, les seuls immeubles visibles de cette position sont celui de 20 étages et celui de 40 étages. L'immeuble de 40 étages cache ensuite les deux immeubles situés derrière. À droite de cette même ligne, on écrit 3 : les immeubles de 10 étages, de 30 étages puis de 40 étages sont visibles. L'immeuble de 20 étages est caché par celui de 40 étages.

2	20	40	30	10	3

On indique ces nombres d'immeubles visibles tout autour du plan d'un quartier latin et on nomme ce "tour de nombres" un ***tour latin***, qui est composé de quatre ***bords***.

1. Recopier et compléter le plan du quartier latin ci-dessous dont le tour latin est donné.

	2	3	2	1	
3					1
1					4
3					2
2					2
	2	1	2	3	

2. Justifier que sur un tour latin le nombre 1 est écrit une fois sur chaque bord mais ne fait jamais face au nombre 1 sur le bord opposé.
3. Sur un tour latin, est-il possible que tous les nombres de 1 à 4 apparaissent une fois exactement sur chaque bord ? Justifier.
4. Sur un tour latin, tous les nombres de 1 à 4 doivent-ils apparaître au moins une fois ? Justifier.

OLYMPIADES MATHÉMATIQUES
LYCÉE, PREMIÈRE

CORRECTION !

Épreuve ▪ 2020

CORRECTION OLYMPIADES DE MATHEMATIQUES SUJET ACADEMIQUE 2020

Exercice académique numéro 1 (à traiter par tous les candidats)

Séquences de chiffres

Partie A : Quelques exemples

1.
- Le nombre 421 comporte la séquence "2" ,f_2(421)=1 ;
- Le nombre 156 ne comporte pas la séquence "2", f_2(156)=0 ;
- Le nombre 2 225 comporte la séquence "2", f_2(2 225)=1.

2.
- Le nombre 102 ne comporte pas la séquence "20", f_{20}(102)=0 ;
- Le nombre 2 020 comporte la séquence "20",f_{20}(2 020)=1 ;
- Le nombre 20 ne comporte pas la séquence "2 020",f_{2020}(20)=0.

3. Pour avoir $f_{2\,020}(k)=1$, le nombre k doit comporter la séquence "2 020". Il suffit de choisir

k=2 020.

4. Pour avoir $f_{2\,020}(k)=0$, le nombre k ne doit pas comporter la séquence "2 020". Il suffit de choisir k=2 021.

Partie B: Entiers sans la séquence "2"

1. $u(1)$ correspond au nombre d'entiers ayant 1 chiffre significatif qui ne possède pas la séquence 2. Les seuls nombres à 1 chiffe significatif qui ne comportent pas la séquence "2" sont : 1 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 ; 7 ; 8 ; 9.

$$\boxed{u(1) = 8}$$

2.
- $u(2)$ correspond au nombre d'entiers ayant 2 chiffres significatifs qui ne possèdent pas la séquence "2". Les seuls nombres à 2 chiffres significatifs qui ne comportent pas la séquence "2" sont tous les entiers compris entre 10 et 99, soit 90 nombres, à l'exception de tous ceux qui finissent par un 2 (soit 12, 22, 32, 42, 52, 62, 72, 82, et 92) et qui ont 2 comme chiffre des dizaines (20, 21, 23, 24, 25, 26, 27, 28 et 29). Il y en a 90−9−9 = 72.

$$\boxed{u(2) = 72}$$

- Il faut compter le nombre de nombres à 3 chiffres qui n'ont pas de 2 dans leur écriture.
  - ✓ Il y a 900 nombres à 3 chiffres compris entre 100 et 999.

  - ✓ Il faut retirer les nombres qui ont 2 comme chiffre des unités uniquement.
    Pour les nombres compris entre 100 et 200, il faut retirer 102, 112, 122, 132, 142, 152, 162, 172, 182 et 192, soit 10 nombres. Il y a donc 10×9 =90 nombres à 3 chiffres qui possèdent un 2 comme chiffre des unités.

  - ✓ Il faut retirer les nombres qui ont 2 uniquement comme chiffre des dizaines.
    Pour les nombres compris entre 100 et 199, il faut retirer 120, 121, 123, 124, 125, 126, 127, 128 et 129, soit 9 nombres.
    Il y a donc 9×9 = 81 nombres à 3 chiffres qui possèdent uniquement un 2 comme chiffre des dizaines.

  - ✓ Il reste à retirer les nombres qui ont uniquement 2 comme chiffre des centaines, soit tous les nombres compris entre 200 et 299 (100 nombres), à l'exception de 202, 212, 220, 221, 222, 223, 224, 225, 226, 227, 228, 229, 232, 242, 252, 262, 272, 282, 292.

  Il y a donc 100−19 = 81 nombres à 3 chiffres qui possèdent uniquement un 2 comme chiffre des centaines.

$$\boxed{u(3) = 900-90-81-81 = 648}$$

3. L'algorithme suivant convient :

U←0	*Compteur*
pour *i* variant de 10^{n-1} à 10^n-1 :	*on considère tous les nombres à n chiffres*
si $\boldsymbol{f_2}(i) = 1$:	*détermine si le nombre présente le chiffre 2*
U←U+1	*ajoute 1 au compteur*
FinSi	
FinPour	
$U \leftarrow 10^n - 10^{n-1} - U$	*donne le nombre de nombres sans la séquence"2"*

Partie C : Entiers sans la séquence "20"

1. w(3) correspond au nombre d'entiers ayant 3 chiffres significatifs qui ne possèdent pas la séquence "20".

   Afin de simplifier la rédaction, nous allons écrire les nombres à 3 chiffres sous la forme *abc*, où *a* est unentier naturel compris entre 1 et 9 et *b* et *c*sont des entiers compris entre 0 et 9.

   - ✓ Il y a 1 000−100 = 900 nombres à 3 chiffres compris entre 100 et 999.
   - ✓ Il faut retirer les nombres qui se terminent par la séquence "20", c'est à dire les nombres sous la forme *a*20.
     Il y a 9 possibilités pour le chiffre *a* soit 9 nombres sous la forme *a*20.
   - ✓ Il faut ensuite retirer les nombres sous la forme 20*c*.
     Il y a 10 possibilités pour le chiffre*c*, soit 10 nombres sous la forme 20*c*.

$$\boxed{w(6) = 900 - 9 - 10 = 881}$$

2. Un algorithme possible est le suivant(Ent désigne la partie entière) :

$s \leftarrow 0$	*Initialisation*
tant que $k > 0$ et $s = 0$:	*on continue tant qu'on n'a pas trouvé la séquence* "20"
$u \leftarrow k - 10\times\text{Ent}(k/10)$	*on cherche le chiffre des unités*
$d \leftarrow (k-u)/10 - 10\times\text{Ent}((k-u)/100)$	*on cherche le chiffre des dizaines*
si $10\times d + u = 20$:	*on regarde si les deux derniers chiffres du nombre sont*
$s \leftarrow 1$	2 et 0
FinSi	
$k \leftarrow (k-u)/10$	*On considère le nombre sans le chiffre des unités*
FinTantque	

Programme en langage Python :

```
k= int(input("k= "))
s=0
while k>0 and s==0:
u=k– 10*floor(k/10)
d=(k–u)/10 – 10*floor((k–u)/100)
```

```
if 10*d+u==20:
s=1
else:
k=(k−u)/10
print(s)
```

Partie D : Autour du nombre"2 020"

1. Il faut déterminer le nombre d’entiers ayant 6 chiffres significatifs qui ne possèdent pas la séquence "2020". Écrivons les nombres à 6 chiffres sous la forme *abc def*.
   - Il y a 1000000−100000 = 900000 nombres à 6 chiffres compris entre 100000 et 999999.

   - Il faut retirer les nombres qui se terminent par la séquence "2020", c’est à dire sous la forme *ab*2 020.
     Il y a 9 possibilités pour le chiffre *a* et 10 pour le *b*, soit 9×10 =90 nombres sous la forme *ab*2 020.

   - Il faut ensuite retirer les nombres sous la forme *a*20 20*f*.
     Il y a 9possibilités pour le chiffre *a* et 10 pour le chiffre *f*, soit9×10 = 90 nombres sous la forme *a*20 20*f*.

   - Il reste ensuite retirer les nombres qui commencent par la séquence "2020", c’est à dire sous la forme 202 0*ef*.

     - ✓ Il y a 10 possibilités pour les chiffres *e* et *f*, soit 10 × 10 = 100 nombres sous la forme 202 0*ef*.
     - ✓ Le nombre 202 020 a déjà été compté, il y a donc 100−1 =99 nombres sous la forme 202 0*ef*.

   900000−90−90−99 = 899721 nombres à 6 chiffres ne présentent pas la séquence "2020".

2. Le plus simple est de chercher les nombres avec un même chiffre.
   - On constate que le nombre 1 présente une fois la séquence 1 ;
   - 11 présente 2 séquences : 1 et 11 ;
   - 111 présente 3 séquences : 1 ; 11 et 111 ;
   - On en déduit que le nombre constitué de 2020 un (111 … 111 avec 2020 chiffres) présente exactement 2020 séquences.

PROLONGEMENT :

1) On peut trouver des nombres qui ont exactement 2020 séquences différentes. Combien de nombres différents présentent exactement 2020 séquences différentes ?

2) On peut trouver des nombres qui ont exactement 2020 séquences différentes. Mais en existe-t-il qui présentent une et une seule fois chaque séquence ? Si oui, combien ?

3) On définit la longueur d'une séquence comme le nombre de chiffres d'une séquence. Existe-il un nombre qui admet exactement 2020 séquences différentesde longueur n ?

Exercice académique numéro2 (à traiter par les candidats de voie générale ayant choisi la spécialité mathématiques)

Partie A :

I)

1. On peut s'appuyer sur la figure réalisée avec quatre droites en position générale en rajoutant une cinquième droite ne passant par aucun point d'intersection. Cela donne clairement 5 droites en position générale. Cette 5$^{\text{ème}}$ droite va couper les 4 autres droites en 4 points ce qui va partager cette droite en 5 parties (appelées arêtes). Chacune de ces 5 arêtes va rajouter 1 région, on va donc avoir 5 régions supplémentaires d'où $r_5 = r_4 + 5 = 11 + 5 = 16$. On a $r_3 = 7$et $r_6 = 22$.

2. On raisonne comme au 1) en partant de n droites en position générale où l'on rajoute une droite ne passant par aucun point d'intersection. Cette nouvelle droite va couper les n droites précédentes en n nouveaux points d'intersection qui vont partager cette droite en $n + 1$ arêtes. Chacune de ces arêtes va rajouter une région d'où $r_{n+1} = r_n + n + 1$.

3. Voici un algorithme possible ainsi qu'une fonction écrite en Python. Etant donné un entier naturel $n \geq 3$:

$r \leftarrow 7$
Pour i allant de 3 à $n - 1$ faire
$\quad r \leftarrow r + i + 1$

```
defnb_de_regions(n):
 r = 7
 for i in range(3,n):
    r = r + i + 1
 return r
```

On trouve $r_{2020} = 2\,041\,211$.

4. Il suffit par exemple d'ajouter les égalités ci-dessous

$$r_n = r_{n-1} + n$$
$$r_{n-1} = r_{n-2} + n - 1$$
$$\dots$$
$$r_5 = r_4 + 5$$
$$r_4 = r_3 + 4$$

Ce qui donne après simplification

$$r_n = r_3 + 4 + 5 + \dots + (n-1) + n = 7 + \frac{n(n+1)}{2} - (1+2+3) = 1 + \frac{n(n+1)}{2}$$

II- L'affirmation est vraie !

$1^{\text{ère}}$ méthode (plus longue) : On obtient facilement $p_{n+1} = p_n + n$ (si on rajoute une $n+1$ ème droite, elle va couper chacune des n droites en n points supplémentaires). On a également $a_{n+1} = a_n + 2n + 1$ (la $n+1$ ème droite va rajouter 1 arête sur chacune des n droites précédentes et rajouter également $n+1$ arêtes sur cette nouvelle droite puisqu'elle sera délimitée par n points d'intersection). On peut exprimer p_n et a_n en fonction de n en utilisant la même méthode qu'au I. On obtient alors $p_n = \frac{n^2-n}{2}$et $a_n = n^2$. Il suffira alors de calculer $p_n - a_n + r_n$ qui vaudra bien 1.

2^{nde} méthode : on appelle $u_n = p_n - a_n + r_n$. On vérifie que $u_3 = 3 - 9 + 7 = 1$ et on justifie que pour tout entier naturel non nul n, $u_{n+1} = u_n$. En effet, si on rajoute une droite (ne passant par aucun point d'intersection) à n droites en position générale alors on aura comme on l'a vu n points supplémentaires, $n+1$ régions supplémentaires et on aura $2n+1$ arêtes supplémentaires (voir explication dans la $1^{\text{ère}}$ méthode) d'où

$$u_{n+1} = u_n + n - (2n+1) + (n+1) = u_n$$

Partie B :

1. Si on rajoute un cercle à la figure ci-dessus de façon à ce qu'on obtienne 4 cercles en position générale, on va rajouter 2 points d'intersection à chacun de ces trois cercles. Comme chaque arc du cercle rajouté, délimité par deux points d'intersection consécutifs, va rajouter une région, le nombre de régions rajoutées sera égal au nombre de points d'intersection rajoutés donc $c_4 = c_3 + 2 \times 3 = 8 + 6 = 14$.
   On a $c_5 = 22$.
2. Si on rajoute un cercle à n cercles en position générale, on va rajouter 2 points d'intersection à chacun de ces n cercles donc $2n$ régions (autant que de points d'intersection d'après l'explication donnée à la question précédente) d'où $c_{n+1} = c_n + 2n$.
   Il suffit par exemple d'ajouter les égalités ci-dessous
   $$\begin{gathered} c_n = c_{n-1} + 2(n-1) \\ c_{n-1} = c_{n-2} + 2(n-2) \\ \dots \\ c_5 = c_4 + 2 \times 4 \\ c_4 = c_3 + 2 \times 3 \end{gathered}$$
   Ce qui donne après simplification
   $$c_n = c_3 + 2 \times \big(3 + 4 + \cdots + (n-1)\big) = 8 + 2 \times \left(\frac{(n-1)n}{2} - 1 - 2\right) = n^2 - n + 2$$
3. Il n'existe aucun entier n vérifiant $n^2 - n + 2 = 380$, c'est-à-dire $n^2 - n - 378 = 0$. Le discriminant est $\Delta = 1513$ et les solutions réelles sont $\frac{1-\sqrt{1513}}{2} \approx -18{,}9$ et $\frac{1+\sqrt{1513}}{2} \approx 19{,}9$.
   On pouvait aussi calculer $c_{19} = 344$ et $c_{20} = 382$ et justifier que la suite (c_n) est croissante.
4. On peut soit résoudre l'inéquation
   $$\begin{aligned} c_n < r_n &\Leftrightarrow n^2 - n + 2 < 1 + \frac{n(n+1)}{2} \Leftrightarrow 2n^2 - 2n + 4 < 2 + n(n+1) \\ &\Leftrightarrow n^2 - 3n + 2 < 0 \end{aligned}$$

x	$-\infty$		1		2		$+\infty$
$x^2 - 3x + 2$		$+$	0	$-$	0	$+$	

D'après le tableau de signes précédent, si $n \geq 3$ alors $n^2 - 3n + 2 > 0$ et donc $c_n > r_n$. Conclusion : aucun entier $n \geq 3$ est tel que le nombre de régions délimitées par n cercles en position générale soit inférieur au nombre de régions délimitées par n droites en position générale.
On pouvait aussi vérifier que $c_3 > r_3$ et remarquer que pour passer d'un terme au suivant on ajoute $2n$ à c_n et on ajoute $n + 1$ à r_n or pour $n \geq 3$, on a bien sûr $2n > n + 1$.

5. Non, en effet $n(n-1)$ qui est le produit de deux entiers consécutifs donc l'un de ces facteurs sera pair et donc le produit également. Ainsi, $c_n = n(n-1) + 2$ sera toujours pair.
6. On cherche donc n pour que $n(n-1) + 2$ soit divisible par 6. Comme on a vu dans la question précédente que c_n est un multiple de 2, cela revient à demander à ce que $n(n-1) + 2$ soit divisible par 3.
   - Si n est un multiple de 3, c'est-à-dire si $n = 3k$ avec k un entier, alors
   $$c_n = n(n-1) + 2 = \underbrace{3k(3k-1)}_{\text{multiple de 3}} + 2$$
   qui n'est pas un multiple de 3.
   - Si n est le successeur d'un multiple de 3, c'est-à-dire si $n = 3k + 1$ avec k un entier, alors
   $$c_n = n(n-1) + 2 = \underbrace{(3k+1) \times 3k}_{\text{multiple de 3}} + 2$$
   qui n'est pas un multiple de 3.
   - Enfin, il reste le cas où n est prédécesseur d'un multiple de 3, c'est-à-dire si $n = 3k - 1$ avec k un entier, alors
   $$c_n = n(n-1) + 2 = (3k-1)(3k-2) + 2 = 9k^2 - 9k + 4 = \underbrace{3(3k^2 - 3k + 1)}_{\text{multiple de 3}} + 1$$

   Conclusion : aucun entier n n'est tel que c_n soit divisible par 6 (car c_n n'est jamais divisible par 3).

Exercice académique numéro 3 (à traiter par les candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité de mathématiques)

Partie A :

1. Un seul quartier latin est possible avec les cellules déjà connues.

10	20	30	40
20	40	10	30
40	30	20	10
30	10	40	20

2. En permutant des colonnes sur le plan d'un quartier latin :

- chaque colonne conserve un immeuble et un seul de chaque taille : toute colonne du nouveau quartier est une colonne de l'ancien quartier latin.

- chaque ligne conserve également un immeuble et un seul de chaque taille : toute ligne du nouveau quartier est obtenue à partir de la même ligne de l'ancien quartier latin dans laquelle on a simplement permuté les immeubles.

Par permutation de colonnes, un quartier latin reste donc un quartier latin.

3. En appliquant deux permutations de colonnes différentes à un même quartier latin, les deux quartiers latins obtenus sont différents. En effet, si les deux quartiers obtenus étaient identiques, les deux permutations de colonnes déplaceraient de façon identique chacune des 4 colonnes initiales, ce qui décrit deux permutations identiques.

On peut donc obtenir, en permutant des colonnes d'un quartier latin initial, autant de quartiers latins différents qu'il existe de permutations différentes des quatre colonnes.

On désigne par (a b c d) une permutation de colonnes : la 1ère colonne en partant de la gauche devient la a_ième colonne, la 2nde devient la b_ième colonne et ainsi de suite.

Il existe donc autant de permutations de colonnes que de quadruplets ordonnés des quatre entiers 1, 2, 3 et 4.

On en dénombre donc 4 × 3 × 2 × 1, soit 24. Le nombre de quartiers latins que l'on peut obtenir à partir d'un quartier latin initial est donc 24.

4. On considère un quartier latin initial.

On nomme a la colonne débutant de haut en bas par 10 (respectivement b par 20, c par 30 et d par 40).

La permutation inverse de (a b c d) envoie la colonne a sur la première colonne et ainsi de suite.

On obtient donc un quartier latin débutant par une ligne du haut 10 / 20 / 30 / 40.

On procède de même avec les lignes (avec une lecture de gauche à droite).

La permutation inverse de (1 b c d) laisse la première ligne stable et permet d'obtenir un quartier latin du type

10	20	30	40
20			
30			
40			

5. Il existe quatre quartiers latins du type précédent (en raisonnant de façon exhaustive sur une des cellules à remplir).

10	20	30	40

10	20	30	40

10	20	30	40

10	20	30	40

20	10	40	30
30	40	10	20
40	30	20	10

20	10	40	30
30	40	20	10
40	30	10	20

20	30	40	10
30	40	10	20
40	10	20	30

20	40	10	30
30	10	40	20
40	30	20	10

Tout quartier latin peut être ramené à l'un des quatre quartiers latins "normalisés" ci-dessus et à un seul car la seule composition de permutation sur les colonnes puis sur les lignes qui permet de le faire est entièrement déterminée par les bords initiaux. L'ensemble des quartiers latins est donc composé de quatre classes disjointes, dont chacune contient exactement un des quatre carrés latins normalisés ci-dessus.

De plus, il y a autant de quartiers latins dans chaque classe que de permutations de colonnes fois le nombre de permutations de lignes conservant la première ligne.

Le nombre de plans de quartiers latins est donc donné par le produit :

Nombre de classes avec un quartier latin normalisé × Nombre de permutations de lignes laissant la première invariante × Nombre de permutations de colonnes = 4 × 6 × 24 = 576.

Partie B

1. Quartier latin dont le tour latin est donné.

	2	3	2	1	
3	20	10	30	40	1
1	40	30	20	10	4
3	10	20	40	30	2
2	30	40	10	20	2
	2	1	2	3	

2. Tout quartier latin présente sur chaque ligne et colonne (et donc sur chaque bord du quartier latin en particulier) un unique immeuble de 40 étages. Depuis le bord de cette ligne ou colonne où l'on fait face à un immeuble de 40, on ne peut voir que lui. Comme tout immeuble "intérieur" de 40 étages est visible, les autres chiffres du tour latin sur chaque bord sont au moins égaux à 2.

Enfin, si le nombre 1 figure en bout de ligne ou de colonne, on distingue donc au moins l'immeuble de 30 étages et l'immeuble de 40 étages depuis le bord opposé. Deux 1 ne peuvent donc se faire face.

3. Supposons que sur un tour latin tous les chiffres de 1 à 4 apparaissent une fois exactement sur chaque bord.

Sur la ligne du haut, le 4 peut se trouver dans un coin ou non…

On examine ces deux situations (sans perte de généralité en se plaçant en haut à gauche).

	4				
	10				
	20				
	30				
	40				
	1				

Nécessairement le 1 sur le bord bas est en face du 4 puisque l'immeuble de 40 étages est placé.

⇨

	4				
4	10	20	30	40	1
	20				
	30				
1	40	30	20	10	4
	1				

Nécessairement une ligne débutant par 10 est celle où l'on voit les 4 immeubles.

⇨

	4			1	
4	10	20	30	40	1
	20			30	
	30			20	
1	40	30	20	10	4
	1			4	

Les colonnes centrales ne permettent de voir que 2 immeubles… Le 3 ne peut pas apparaître sur le tour.

		4			
		10			
		20			
		30			
		40			
		1			

Nécessairement le 1 sur le bord bas est en face du 4 puisque l'immeuble de 40 étages est placé.

⇨

		4			
		10			
4	10	20	30	40	1
		30			
2		40			
		1			

Nécessairement seule la seconde ligne permet de faire apparaître 4 et 1 sur les bords opposés gauche et droit.

⇨

		4			
		10			
4	10	20	30	40	1
		30			
2		40			
		1			

On agit de même sur les 3ème colonne et 3ème ligne où seuls les immeubles de 30 étages permettent de faire apparaître 4 et 1 sur les bords.

⇨

		4	1	
2		10	40	
4	10	20	30	40
1	40	30	20	10
2		40	10	
		1	4	

On obtient nécessairement deux fois le 2 sur le bord gauche et le 3 ne peut apparaître.

La supposition faite est absurde. On en déduit que sur un tour latin tous les chiffres de 1 à 4 ne peuvent apparaître une fois exactement sur chaque bord.

4. Sur un tour latin il est possible qu'un chiffre n'apparaisse pas du tout.
Ce n'est pas le cas du 1 (à cause d'un immeuble de 40 étages sur un bord) ni du 2 (à cause de l'immeuble de 40 étages sur la $2^{\text{ème}}$ ligne par exemple qui impose un 2 sur le bord haut de la colonne correspondante).

Mais il est possible d'écarter le 3 ou le 4 comme le montre les deux quartiers latins ci-dessous

	1	2	2	4	
1	40	30	20	10	4
2	30	10	40	20	2
2	20	40	10	30	2
4	10	20	30	40	1
	4	2	2	1	

	1	3	2	2	
1	40	10	30	20	3
2	30	20	10	40	1
2	10	40	20	30	2
3	20	30	40	10	2
	3	2	1	3	