SUJET + CORRIGÉ

OLYMPIADES DE MATHÉMATIQUES

ACADÉMIE DE MONTPELLIER

Classes de première S • 2014

Classe de premières générales
et technologiques

OLYMPIADES DE MATHEMATIQUES

Groupement :

Académie de Montpellier

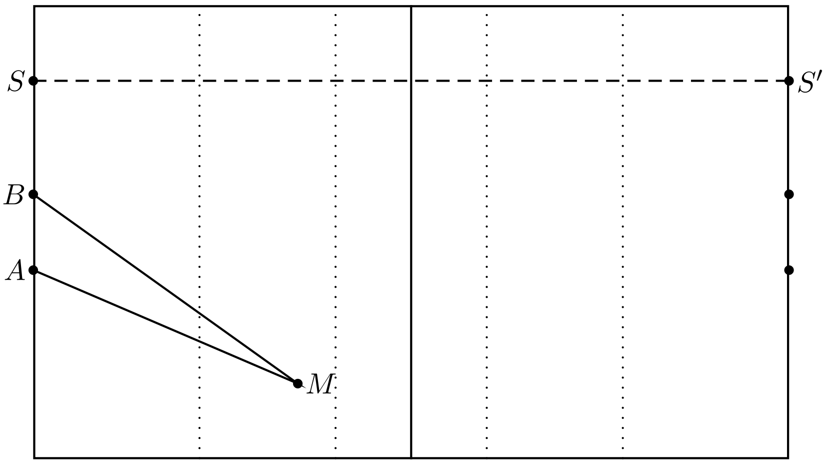
Série S

Durée : 4 heures

Ce sujet comporte 4 exercices indépendants.
Les calculatrices sont autorisées.
La rédaction et la qualité des raisonnements seront prises en compte.
Toute initiative, même infructueuse, pourra être prise en compte.

Exercice 3 *(Académique)* ***Angle de tir***

On a représenté ci-dessous un terrain de rugby. Un joueur a posé le ballon en M et « tente un coup de pied » dit « de pénalité » : il s'agit de faire passer le ballon entre les poteaux A et B.

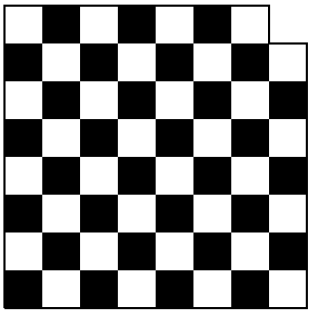


L'angle $\widehat{AMB}$ est appelé *angle de tir*. L'ouverture de cet angle est un élément décisif pour la réussite de ce coup de pied.

1. Représenter sur le terrain trois autres points que M qui offrent le même angle de tir que l'angle $\widehat{AMB}$?
2. Le joueur « marque un essai »au point S. La règle veut qu'il place alors le ballon en un point de son choix sur le segment $[SS']$ pour tirer son coup de pied (dit « de transformation »).
   a. Y-a-t-il une ou plusieurs positions qui offrent le même angle de tir que lors de la pénalité précédente ?
   b. Où faut-il placer le ballon sur le segment $[SS']$ pour que l'angle de tir soit maximal ?

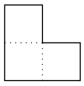
Exercice 4 *(Académique)* ***Damiers tronqués et Triminos***

On suppose que n est entier non nul. Soit un damier ayant 2^n cases par côté. On enlève une case de coin à ce damier.



Damier tronqué pour $n = 3$

Un *trimino* est une pièce de la forme ci-dessous et qui peut recouvrir exactement 3 cases de damier :



Par exemple, si $n = 1$ (2^1 cases par côté, le damier tronqué a donc 3 cases), un seul trimino permet de recouvrir le damier tronqué .
Dans la suite recouvrir (par des triminos) un damier tronqué donné signifie que les triminos servant à le recouvrir ne se superposent pas et que toutes les cases du damier tronqué sont exactement recouvertes.
Il est permis de tourner les triminos dans tous les sens.

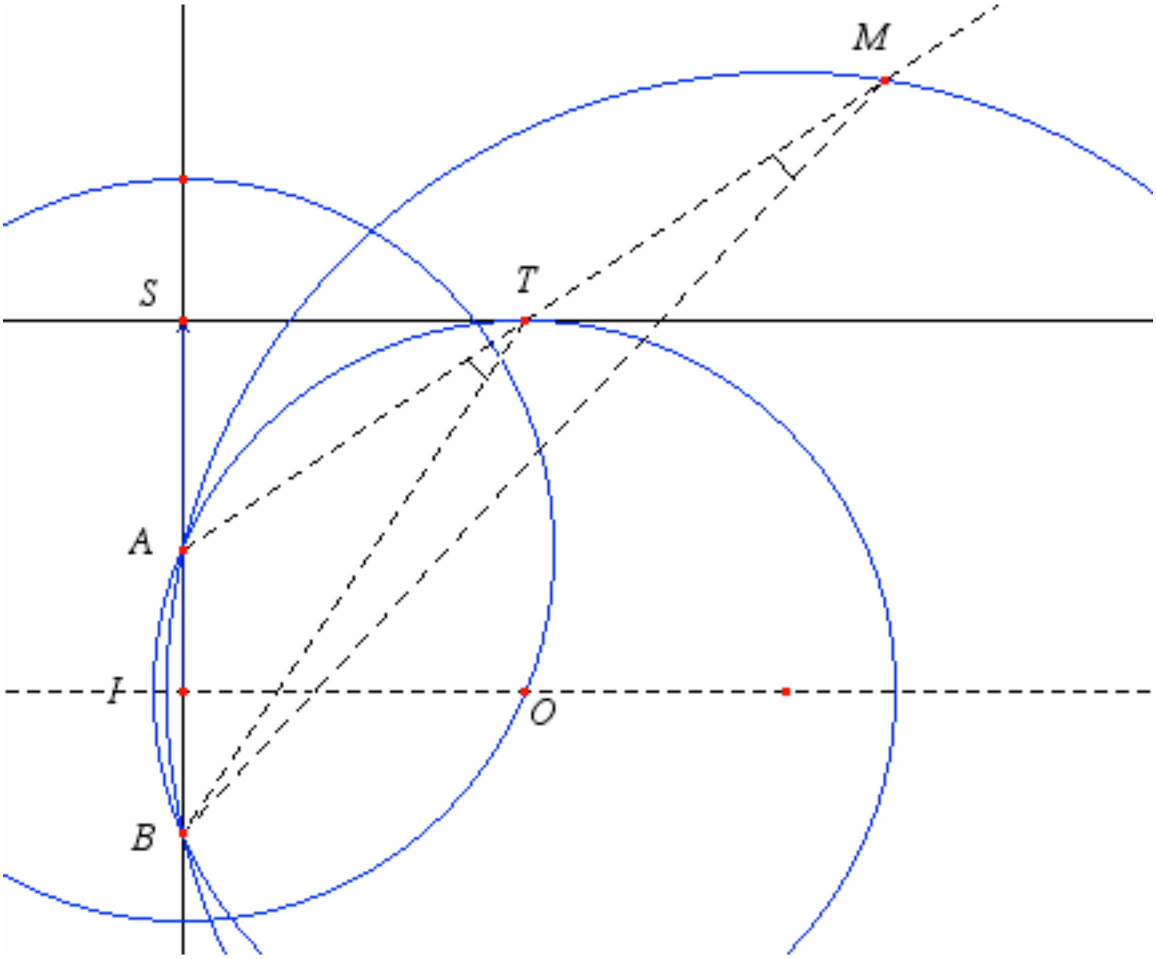
1. Faire un dessin pour $n = 2$ (4 cases par côté), et montrer comment recouvrir par des triminos ce damier auquel on a enlevé une case de coin.
2. Faire un dessin pour $n = 4$ (16 cases par côté) montrer comment recouvrir par des triminos ce damier auquel on a enlevé une case de coin.
3. Prouver que si l'on peut recouvrir par des triminos, un damier ayant 2^n cases par coté et auquel on a enlevé une case de coin, alors on peut aussi recouvrir par des triminos, un damier ayant 2^{n+1} cases par coté et auquel on a enlevé une case de coin.

   A ce niveau, on peut conclure que, pour tout $n > 0$, on peut recouvrir par des triminos, un damier ayant 2^n cases par coté et auquel on a enlevé une case de coin.

4. Le nombre $2^{2^{2010}} - 1$ est-il divisible par 3 ?

Corrigé

Exercice 3 - série S - *(Académique)* ***Angle de tir***

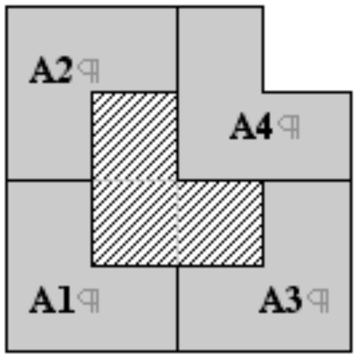


1. On utilise la propriété de l'angle inscrit pour proposer des points sur le cercle circonscrit au triangle ABM.
2. Le joueur « marque un essai »au point S. La règle veut qu'il place alors le ballon en un point de son choix sur le segment $[SS']$ pour tirer son coup de pied (dit « de transformation »).
   a. Si le cercle circonscrit au triangle ABM coupe la droite (SS') les (ou le) points conviennent.
   b. Tout d'abord la position optimale correspond au point T de tangence d'un cercle centré sur la médiatrice de $[AB]$ et passant par A et B.
   On montre d'abord comment construire ce point T : Le cercle de centre A et de rayon IS coupe la médiatrice en un point O. Le cercle de centre O et passant par A (passera aussi par B puisque O est sur la médiatrice de $[AB]$) et est tangent à la droite (SS') puisque la distance de O à la droite (SS') est égale au rayon OA.
   Ce point T correspond à l'angle de tir optimum en effet, la règle du jeu impose de choisir un point du segment $[SS']$, soit $N \neq T$ un point de $[SS']$; le cercle circonscrit à ABN (a un rayon strictement supérieur à OA puisque sécant et non tangent à (SS')) permet la configuration ci-dessus qui montre que la mesure de l'angle $\widehat{ATB}$ est supérieur à

celle de $\widehat{AMB}$ et donc à toutes les mesure des angles inscrits dans le cercle circonscrit à AMB

Remarque : On n'envisage pas la position du point S entre A et B, la solution est alors triviale et n'apporte rien à la modélisation d'une situation réelle.

Exercice 4- série S - *(Académique)* ***Damiers tronqués et Triminos***



1. A1...A4 et le trimino central recouvrent un damier de 2^2 cases avec une case de coin enlevée.
2. Pour $n = 4$ il suffit d'imaginer que les Ai sont des damiers de 2^2 cases de côté avec un coin enlevé.
3. Supposons que l'on sache recouvrir un damier de 2^n cases avec une case de coin enlevée, alors en disposant quatre de ces damiers recouverts comme sont disposés A1, A2 ; A3 et A4 puis en comblant le centre avec un trimino (le hachuré) on a recouvert un damier de 2^{n+1} cases de côté avec une case de coin enlevée.

4. $2^{2^{2010}} - 1$ est le nombre de cases d'un damier de $2^{2^{2009}} - 1$ cases de côté avec une case de coin enlevée. Il est donc recouvrable par des triminos d'après la question précédente, donc ce nombre est divisible par 3.

Exercice 3 - autres séries - *(Académique)* ***Le jeu de « Nîmes »***

Partie A : Il reste 6 bâtonnets

1. Partie gagnante : MOI : 2 / LUI : 1 / MOI : 3 / reste 0.
   Partie perdante : MOI : 1 / LUI : 1 / MOI : 3 / LUI 1/ reste 0.
2. Il suffit de laisser l'ordinateur avec 4 bâtonnets.

Partie B : Avec n bâtonnets

1. Pour $n = 101$, il suffit de maintenir l'adversaire devant un multiple de 4 bâtonnets. Ainsi si on enlève 1 bâtonnet, l'adversaire aura devant lui 100 bâtonnets, qu'il en enlève 1 ou 2 ou 3, au coup suivant il en aura 96 et après 24 coups, il en aura 4 donc il aura perdu au prochain coup.
2. Si n est un nombre entier non nul non multiple de 4 donc $n = 4k + 1$ ou $n = 4k + 2$ ou $n = 4k + 3$, le premier coup sera de présenter à l'adversaire $4k$ bâtonnets en en enlevant respectivement 1, 2 ou 3.
   Si n est un multiple de 4, l'adversaire peut appliquer la stratégie gagnante puisqu'il aura devant lui $n = 4k - 1$ ou $n = 4k - 2$ ou $n = 4k - 3$ bâtonnets.

Partie C : Avec n bâtonnets et une nouvelle règle du jeu. On vous laisse trouver.

Exercice 4 - autres séries - *(Académique)* ***Damiers et dominos***

Partie A : Il reste 6 bâtonnets

1. Un damier de 9 cases de côté a donc un nombre impair de cases. Pour recouvrir par des dominos, il est nécessaire que le nombre de cases soit pair(Donc recouvrement impossible).
2. Un tel damier contient $(2n)^2 - 1$ cases or $4n^2 - 1 = (2n - 1)(2n + 1)$, c'est un nombre impair produit de deux nombres impairs d'où impossibilité. (un contre exemple avec $n = 1$ était un raisonnement valable)
3. Quand on recouvre par des dominos, on couvre une case blanche et une case noire. Or un damier de $2n$ cases de côté auquel on a retiré les deux cases extrémités d'une diagonale ne contient plus un nombre égal de cases noires et blanches d'où impossibilité (encore une fois, l'énoncé permettait une démonstration par contre exemple).
4. Même considération de parité du nombre de cases que dans la question 2.
5. (La parité, condition nécessaire, est ici satisfaite). On pouvait utiliser un raisonnement par récurrence (comme on l'appelle dans certaines séries !) : Pour $n = 1$, donc 3 cases de côté et 8 cases en tout, on s'en convainc par un dessin. On peut alors border par des dominos pour former un damier de 5 cases de côté avec une case otée "en haut à gauche". Reste à mettre en forme la propriété dite "héréditaire" ; celle-ci pouvait s'exprimer par un dessin d'autant plus convaincant que la méthode pour border était simple (par exemple en disposant les dominos de bordure perpendiculairement aux côtés du damier).