SUJET + CORRIGÉ

OLYMPIADES DE MATHÉMATIQUES

ACADÉMIE DE MONTPELLIER

Classes de première S • 2013

Académie de Montpellier et Maroc

Olympiades de mathématiques

Classes de première des

Séries S

Durée : 4 heures

Ce sujet comporte quatre exercices indépendants et cinq pages numérotées de 1 à 5.
Les calculatrices sont autorisées.
La rédaction et la précision des justifications seront prises en compte dans l'évaluation de la copie.
Toute initiative, même infructueuse, pourra également être prise en compte.

Exercice 1 (national) : Les nombres Harshad.

Un entier naturel non nul est un **nombre Harshad** s'il est divisible par la somme de ses chiffres.
Par exemple, $n = 24$ est un nombre Harshad car la somme de ses chiffres est $2 + 4 = 6$, et 24 est bien divisible par 6.

1. a. Montrer que 364 est un nombre Harshad.

b. Quel est le plus petit entier qui ne soit pas un nombre Harshad ?

2. a. Donner un nombre Harshad de 4 chiffres.

b. Soit n un entier non nul. Donner un nombre Harshad de n chiffres.

3. a. Montrer que 110, 111, 112 forment une liste de trois nombres Harshad consécutifs.

b. En insérant judicieusement le chiffre 0 dans l'écriture décimale des nombres précédents, construire une autre liste de trois nombres Harshad consécutifs.

c. Justifier l'existence d'une infinité de listes de trois nombres Harshad consécutifs.

4. a. Soit $A = 30 \times 31 \times 32 \times 33$. Calculer la somme des chiffres de A.

b. En déduire que 98 208 030, 98 208 031, 98 208 032 et 98 208 033 forment une liste de quatre nombres Harshad consécutifs.

c. Justifier l'existence d'une infinité de listes de quatre nombres Harshad consécutifs.

5. a. En s'inspirant de la question 4, trouver une liste de cinq nombres Harshad consécutifs.

b. Justifier l'existence d'une infinité de listes de cinq nombres Harshad consécutifs.

6. a. Soit i un chiffre compris entre 0 et 8.

Soit p un entier dont le chiffre des dizaines est i et le chiffre des unités est 9.

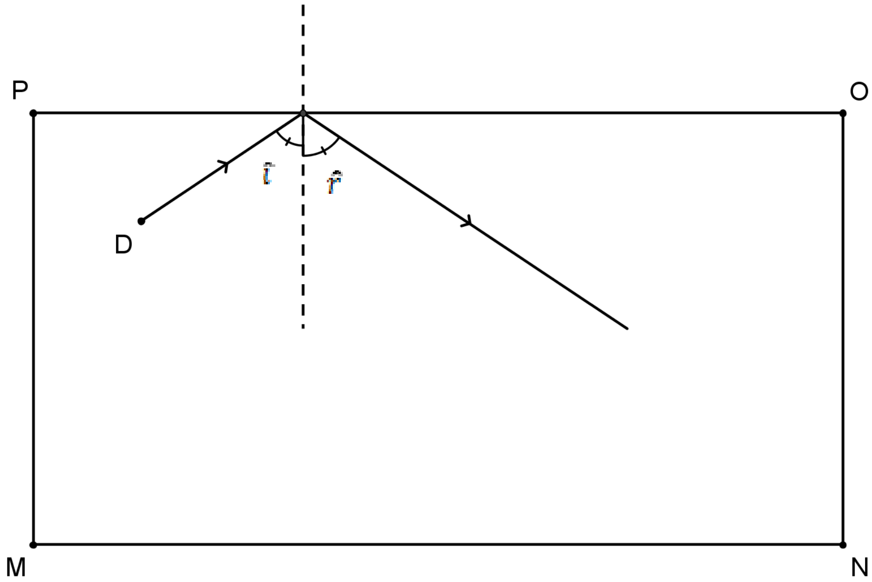
Montrer que soit la somme des chiffres du nombre p soit celle de $p + 2$ est un nombre pair.

En déduire que p et $p + 2$ ne peuvent pas être tous les deux des nombres Harshad.

b. Existe-t-il une liste de 22 nombres Harshad consécutifs ?

Exercice 2 (national) : Le billard rectangulaire.

On considère un billard de forme rectangulaire, de longueur 300 cm et de largeur 160 cm dont les boules sont assimilées à des points.
Entre deux rebonds toutes les trajectoires sont rectilignes.
Lorsque la boule atteint l'un des bords (rails) du billard, elle y rebondit suivant les règles de la physique des chocs élastiques : l'angle d'incidence $\hat{i}$ étant égal à l'angle de réflexion $\hat{r}$, comme sur la figure ci-dessous ($\hat{i} = \hat{r}$).



1. On frappe une boule placée au milieu du rail [MN].

   a. Quel point du rail [PO] peut-on viser pour que la boule atteigne le point N en une bande (c'est-à-dire avec un seul rebond) ?

   b. Quel point du rail [PO] peut-on viser pour que la boule atteigne en une bande le milieu du rail [NO] ?

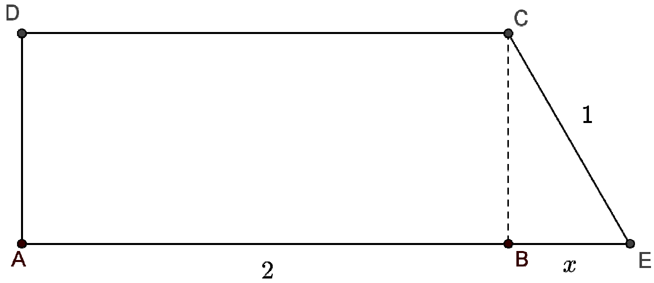
   c. Quel point du rail [NO] peut-on viser pour que la boule revienne à son point de départ en trois bandes (c'est-à-dire après exactement trois rebonds) ?

2. On frappe une boule placée en un point quelconque du rail [MN].

   a. Est-il possible d'atteindre en une bande n'importe quelle boule placée sur la surface de jeu ?

   b. Est-il toujours possible de la frapper de sorte qu'elle revienne en trois bandes à son point initial ?

Exercice 3 (académique) : Un trapèze.



Sur la figure ci-dessus, ABCD est un rectangle et BEC est un triangle rectangle. On donne les longueurs AB = 2 et CE = 1 et on pose $\mathrm{BE} = x$.

1. a. Exprimez l'aire $f(x)$ du trapèze en fonction de x.

   b. Tracez la courbe de f à l'aide de votre calculatrice. Donnez, à 10^{-1} près, la valeur du maximum M de f ainsi que l'abscisse x_M correspondante.

2. Un algorithme.

Dans le tableau ci-dessous qui décrit un algorithme, le symbole * représente la multiplication ; **racine** représente la racine carrée ; l'écriture **>=** représente le symbole de l'inégalité $\geq$.

Variables	x, y, p sont des réels ; n est un entier.
Données	x prend la valeur 0, y prend la valeur –1, p prend la valeur 0,01. n prend la valeur 0.

Algorithme	Tant que (0,5*racine((1 – x^2)*(x + 4)²) >= y) faire
	    y prend la valeur 0,5*racine((1 – x^2)*(x + 4)²)
	    x prend la valeur $x + p$
	    n prend la valeur $n + 1$
	fin Tant que

Sortie	Afficher x, y, n

   a. Montrez que l'algorithme se termine.
   b. Donnez les valeurs affichées en sortie.

3. Quelques questions plus techniques.

   a. Vérifiez que la dérivée de la fonction g définie pour tout nombre réel x par $g(x) = (x+4)^2$ est $g'(x) = 2(x+4)$.

   b. Étudiez les variations de la fonction u définie pour tout nombre réel x par

$$u(x) = (1-x^2)(x+4)^2 .$$

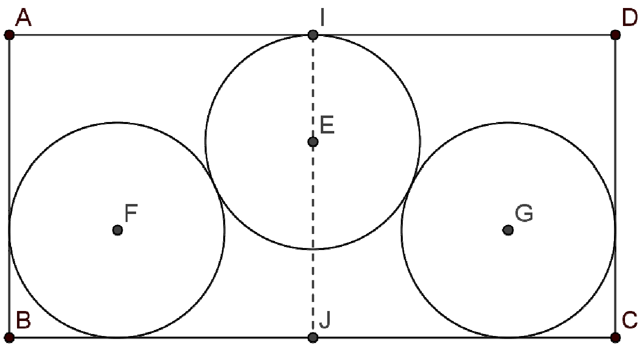
   c. Soit v une fonction définie sur [0 ; 1] et positive ; soit w la fonction définie par $w(x) = \sqrt{v(x)}$. Expliquez la raison pour laquelle les variations de w sont les mêmes que celles de v.

   d. En déduire le tableau de variation de f sur [0 ; 1].

4. Expliquez le lien entre les questions **1**, **2** et **3**.

Exercice 4 (académique) : Trois cercles.

Le rectangle ABCD a pour longueur 4 cm et pour largeur 2 cm. I et J sont les milieux de [AD] et [BC].
Dans ce rectangle sont inscrits trois cercles de même rayon R, tangents entre eux et tangents aux côtés du rectangle. Calculez la valeur de R en cm.



CORRECTION, MONTPELLIER 2013

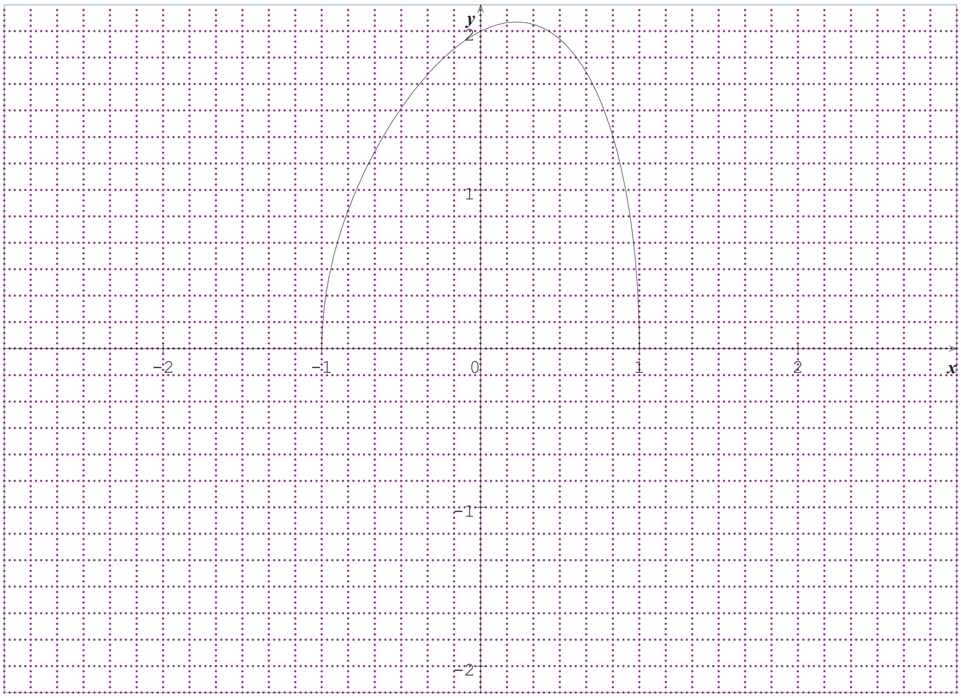
Premier exercice Académique (exo 3)

Olympiades mathématiques, S

1. **Aire du trapèze et maximum par méthode graphique**

   a) On a $BC^2 = 1 - x^2$ d'où $BC = \sqrt{1-x^2}$ et l'aire du trapèze est donnée par $f(x) = \dfrac{1}{2}(x+4)\sqrt{1-x^2}$.

   a) La représentation graphique est donnée par :

   Le maximum est obtenu pour $x = 0,225$ et vaut 2,06 environ.

2. **Algorithme**

   a) Au démarrage, on reconnaît f. Comme $y = -1$, le « tant que » s'initialise bien. Se termine-t-il ? A chaque itération, y vaut $f(x)$ et x augmente de $p = 0,01$ et ce tant que le nouvel y est supérieur à l'ancien, soit lorsque f est croissante : l'algorithme se termine lorsque le maximum est atteint.

   b) Les valeurs affichées sont $x = 0,23$ et $y = 2.05830472963$ et $n = 23$.

3. **Quelques questions plus techniques**

   a) Si $g(x) = (x+4)^2 = x^2 + 8x + 16$ alors $g' = 2x + 8 = 2(x+4)$.

   b) On étudie les variations de la fonction u yelle que $u(x) = \left(1-x^2\right)(x+4)^2$
   On a $u'(x) = -2x(x+4)^2 + \left(1-x^2\right)2(x+4) = 2(x+4)\left[-x(x+4) + \left(1-x^2\right)\right]$
   D'où $u'(x) = 2(x+4)(-2x^2 - 4x + 1)$.

   La dérivée s'annule pour $x_1 = \dfrac{4+2\sqrt{6}}{-4} = -1$ et pour $x_2 = \dfrac{4-2\sqrt{6}}{-4} \approx 0,225$. Le signe de u' est simple à étudier.

   c) Variations liées.
   La fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est croissante sur $[0; +\infty]$ donc
   $a \leqslant b \Rightarrow v(a) \leqslant v(b) \Rightarrow \sqrt{v(a)} \leqslant \sqrt{v(b)}$ puisque $v(a)$ et $v(b)$ sont positifs ;

   d) Variations de f : simple

4. Lien entre les questions : toujours un maximum selon trois méthodes graphique, algorithmique et analytique.

source : **apmep**

CORRECTION, MONTPELLIER 2013

Second exercice Académique (exo 4)

Olympiades mathématiques, S

On choisit le repère de sorte que B en soit l'origine, l'axe des x soit BC, l'axe des y soit BA en respectant les unités données.
On a alors B (0, 0), J (2, 0), C (4, 0), D (4,2), A(0, 2), I (2, 2).
De plus, si on pose F(R, R) alors E$(2, 2-R)$ et G$(4-R, R)$.
Une condition nécessaire et suffisante pour que les trois cercles soient tangents deux à deux est que : $FE = 2R$ soit que $FE^2 = 4R^2$. On aboutit à l'équation :

$$(2-R)^2 + (2-2R)^2 = 4R^2.$$

$$\text{Soit : } R^2 - 12R + 8 = 0$$

On a $\Delta = 112$ d'où deux solutions : $R_1 = \dfrac{12-\sqrt{112}}{2} \approx 0,708$ et $R_2 = \dfrac{12+\sqrt{112}}{2} = 11,29 > 2$ qui ne convient donc pas.
Le rayon du cercle mesure environ 0,708.