SUJET + CORRIGÉ

OLYMPIADES DE MATHÉMATIQUES

ACADÉMIE DE MONTPELLIER

Classes de première S • 2012

Académie de Montpellier et Maroc

Olympiades de mathématiques

Classes de première des

Séries S

Durée : 4 heures

Ce sujet comporte quatre exercices indépendants et six pages numérotées de 1 à 6.
Les calculatrices sont autorisées.
La rédaction et la précision des justifications seront prises en compte dans l'évaluation de la copie.
Toute initiative, même infructueuse, pourra également être prise en compte.

Exercice 1 (national) :

On dit qu'un nombre entier est *digisible* lorsque les trois conditions suivantes sont vérifiées :

- aucun de ses chiffres n'est nul ;
- il s'écrit avec des chiffres tous différents ;
- il est divisible par chacun d'eux.

Par exemple,

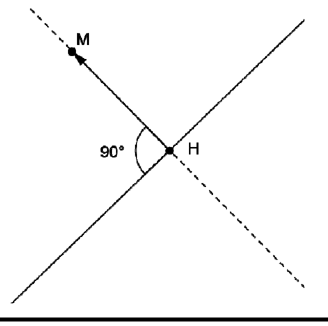
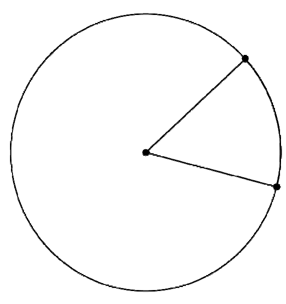
- 24 est digisible car il est divisible par 2 et par 4.
- 324 est digisible car il est divisible par 3, par 2 et par 4.
- 32 n'est pas digisible car il n'est pas divisible par 3.

On rappelle qu'un nombre entier est divisible par 3 si et seulement si la somme de ses chiffres est divisible par 3.

1. Proposer un autre nombre *digisible* à deux chiffres.
2. Proposer un nombre digisible à quatre chiffres.
3. Soit n un entier digisible s'écrivant avec un 5.
   a) Démontrer que 5 est le chiffre de ses unités.
   b) Démontrer que tous les chiffres de n sont impairs.
   c) Démontrer que n s'écrit avec au plus quatre chiffres.
   d) Déterminer le plus grand entier *digisible* s'écrivant avec un 5.
4. Soit n un entier digisible quelconque.
   e) Démontrer que n s'écrit avec au plus sept chiffres.
   f) Si n s'écrit avec sept chiffres, dont un 9, déterminer les chiffres de n.
   g) Déterminer le plus grand entier digisible.

Exercice 2 (national) :

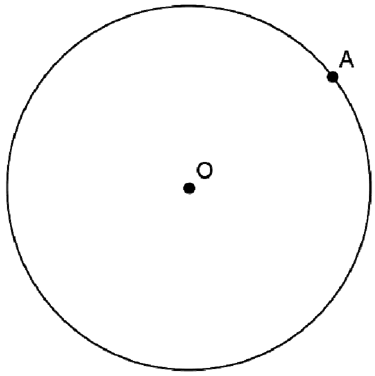
Rappels

• *On appelle* ***distance entre un point*** **M** ***et une droite (D)*** *la distance* MH, *où* H *est le point d'intersection de (D) avec la droite perpendiculaire à (D) passant par* M.	
• *Dans la figure ci-contre, si le rayon du disque est* R *, et si l'angle du secteur angulaire grisé mesure* α *(exprimée en degrés), alors* ***l'aire de la portion de disque*** *grisée vaut* $\frac{\pi\alpha R^2}{360}$.	

Dans la partie II de l'exercice, on considérera la distance d'un point M à un segment [BC] comme étant la distance du point M à la droite (BC).

Partie I

Soit C un cercle de centre O, A un point de ce cercle et D le disque délimité par ce cercle.



1. Reproduire la figure, et représenter l'ensemble des points du disque équidistants de O et de A.
2. Hachurer l'ensemble des points du disque plus proches de O que de A.
3. Soit M un point déterminé aléatoirement de manière équiprobable sur la surface du disque D.

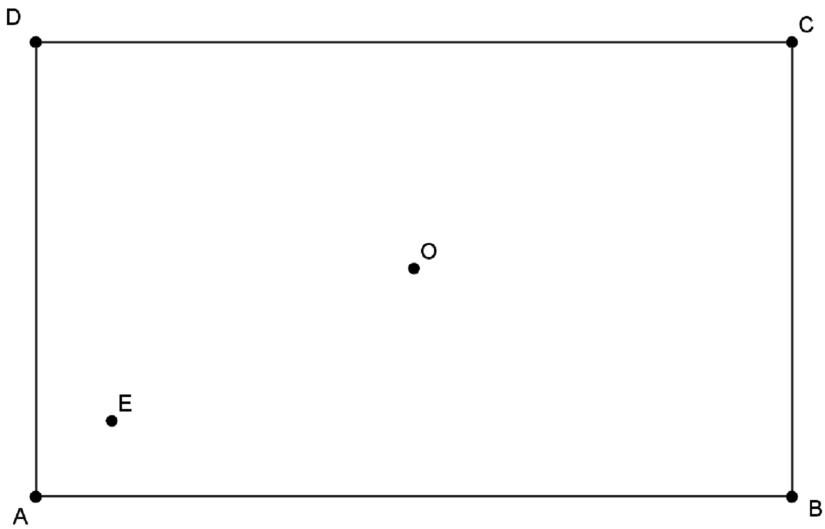
   Quelle est la probabilité que M soit plus proche de O que de A ?

Partie II

Soit ABCD un rectangle de longueur AB = 20 cm et de largeur BC = 12 cm, de centre O.

Soit E un point situé à l'intérieur du rectangle, proche de A, à 2 cm de chaque bord (comme sur la figure ci-après, qui n'est toutefois pas à l'échelle).

Soit M un point déterminé aléatoirement de manière équiprobable à l'intérieur du rectangle ABCD.



1. Quelle est la probabilité que M soit plus proche du côté [BC] que du côté [AD] ?

a) Reproduire le rectangle, et représenter l’ensemble des points intérieurs au rectangle et équidistants des côtés [AB] et [BC].

b) Hachurer l’ensemble des points intérieurs au rectangle et plus proches du côté [BC] que du côté [AB].

c) Quelle est la probabilité que M soit plus proche du côté [BC] que du côté [AB] ?

2. Quelle est la probabilité que M soit plus proche du côté [AB] que des trois autres côtés [BC], [CD] et [DA] ?
3. Quelle est la probabilité que M soit plus proche de O que de E ?
4. Quelle est la probabilité que M soit plus proche de O que des quatre sommets A, B, C et D?

Exercice 3 (académique) : Le problème de Dédé.

On lance deux dés ordinaires : le Tableau 1 suivant présente les résultats possibles du lancer des deux dés ainsi que l'ensemble des valeurs prises par la somme des valeurs obtenues pour les deux dés.

	⚀	⚁	⚂	⚃	⚄	⚅
⚀	2	3	4	5	6	7
⚁	3	4	5	6	7	8
⚂	4	5	6	7	8	9
⚃	5	6	7	8	9	10
⚄	6	7	8	9	10	11
⚅	7	8	9	10	11	12

Tableau 1

Ce tableau conduit aux nombres d'apparitions suivants pour chacune des sommes possibles de 2 à 12 :

Somme	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Nombre d’apparitions	1	2	3	4	5	6	5	4	3	2	1

Tableau 2

Problème :

Le but de cet exercice est de montrer qu'il est possible de fabriquer une autre paire de dés cubiques, équilibrés, qui ne sont pas les dés cubiques ordinaires, permettant de retrouver en les lançant exactement le même tableau que le Tableau 2.

On se donne les règles de construction suivantes, les deux dés n’étant pas forcément identiques :

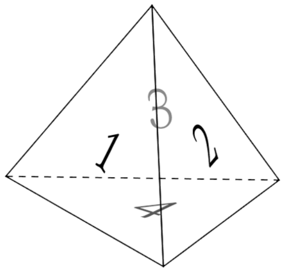
- les chiffres figurant sur chaque face sont non nuls,

- les chiffres ne sont pas forcément entre 1 et 6 mais sont positifs,

- on peut répéter le même chiffre sur deux faces différentes.

1. Etude d’un problème plus simple.

On considère deux dés à quatre faces (dés tétraédriques réguliers comme sur la figure ci-contre) dont les faces sont marquées avec les chiffres de 1 à 4



a) Donner le tableau des résultats possibles pour la somme calculée en additionnant les résultats obtenus en lançant deux dés ainsi que la fréquence d’apparitions de ces sommes.

b) On essaie maintenant de fabriquer deux dés tétraédriques réguliers ne portant pas les mêmes chiffres mais donnant le même tableau que dans la question précédente. Pour cela, on essaie sur un dé les chiffres 1,2, 3 et 3 et sur l’autre dé les chiffres 1,2, 4 et 5. On obtient le Tableau 3 suivant :

Faces des tétraèdres	1	2	3	3
1	2	3	4	4
2	3	4	5	5
4	5	6	7	7
5	6	7	8	8

Tableau 3

Ce tableau convient-il ?

c) Fabriquer alors deux dés différents à quatre faces qui conviennent.

d) Justifier qu'il n'existe qu'une paire de dés solution du problème.

2. Retour au problème des dés cubiques.

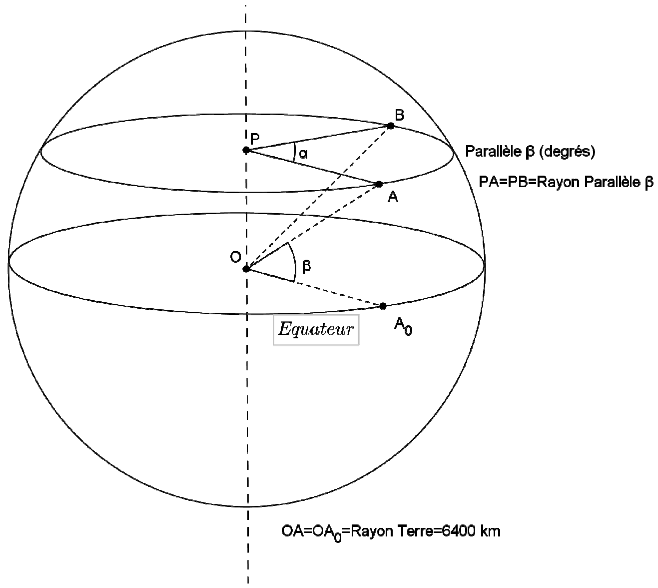
On cherche une paire de dés à six faces solution du problème ci-dessus. On ordonne les faces de chaque dé dans l'ordre croissant dans un tableau comme le Tableau 3 ci-dessus. Après des essais (que l’on ne demande pas de réaliser), on s’aperçoit qu’il n'est pas possible que les quatre premières faces des deux dés soient les mêmes que celles obtenues à la question 1. d.

Donner, sans justification, une paire de dés à six faces répondant au problème posé.

Indication : La répartition des 1 et des 2 pour ces dés pas ordinaires n'est pas celle des dés ordinaires.
On ne demande pas de prouver l'unicité du résultat, mais ce résultat est en effet unique.

Exercice 4 (académique) : Perdre le Nord ?

1. Sur Terre, à la latitude β (en degrés), le cercle parallèle à l'Équateur (appelé parallèle) a pour centre P et pour rayon R : montrer que lorsqu'on parcourt une distance d de 1000 km sur ce parallèle entre deux points A et B, une mesure α de l'angle $\widehat{APB}$ est $\frac{d}{R}$ radians ou $\frac{180d}{\pi R}$ degrés.



2. Igor Moustaïev part de chez lui à Novosibirsk (latitude 55° Nord) faire un tour de Sibérie. Il prend un avion qui le mène plein Nord pendant 1000 km puis il prend un deuxième avion qui l'emmène plein Est pendant 1000 km ; un troisième avion l'emmène vers le Sud pendant 1000 km et, enfin, un quatrième avion se dirigeant vers l'Ouest le ramène chez lui. Quelle est la distance parcourue par le dernier avion ?

3. Jésus Martinez rencontre son ami Paco Montaner au Bar des Amis ; la température est de 35 °C. Il lui raconte la mésaventure qu'il vient de vivre : « Figure-toi qu'en déchargeant des caisses, le train dans lequel je travaillais est parti sans prévenir : j'ai fait 200 km vers le Nord, 200 km vers l'Ouest, 200 km vers le Sud et 200 km vers l'Est… et je suis revenu à mon point de départ ! »

   « Amigo, c'est normal puisque… aaargh… » lui dit Paco en s'écroulant dans un dernier râle, un couteau planté entre les deux épaules… Où habitent Paco et Jésus ?

CORRECTION, MONTPELLIER 2012

Premier exercice Académique (exo 3)

Olympiades mathématiques, S

1. a)

somme	2	3	4	5	6	7	8
nombre d'apparitions	1	2	3	4	3	2	1

   b) Ce tableau 3 ne convient pas car il y a par exemple deux fois la somme 8.

   c) et d) ensemble

   N.B. 1 : dans les tableaux ci-dessous les faces sont énumérées dans l'ordre croissant. On parlera du dé vertical et du dé horizontal, pour désigner resp. celui dont les faces sont données verticalement et horizontalement.

   N.B. 2 : Cette convention entraîne aussi que dans les tableaux, les chiffres sont toujours croissants vers la droite et vers le bas. Donc une entrée est toujours inférieure ou égale à toutes les entrées à sa droite et en dessous.
   Le fait d'avoir un total qui fait 2 exige d'avoir un 1 sur chaque dé. Le fait d'avoir deux totaux 3 demande d'avoir deux fois $2+1$:
   • *Par l'absurde* : Si on choisit de mettre un 2 sur chaque dé : on doit ensuite pour fabriquer trois fois le total 4, et se distinguer des dés ordinaires, choisir de mettre deux fois 3 sur l'un des deux dés, sans restriction de généralité.

   Mais alors comme le plus grand total doit faire huit, et que ce doit être l'endroit en bas à droite du tableau, on sait aussi qu'un a un 5 sur la quatrième face du second dés, ce qui nous donne le tableau ci-contre.
   Et on voit qu'il ne convient pas puisqu'on a deux fois le total 8.

	1	2	3	3
1	2	3	4	4
2	3	4	5	5
5	6	7	8	8

Conclusion : Si on veut des dés différents des dés ordinaires, on doit commencer par mettre deux 2 sur l'un des dés et donc le tableau commence par

	1	2	2	
1	2	3	3	
3	4	5	5	

$\longrightarrow$

Le fait d'avoir trois fois le total 4 impose déjà que la seconde face du dé « vertical » (cf. le N.B.) est un 3 : car sinon, toutes les entrées des deux dernières lignes seraient strictement plus grandes que 4. Donc on a déjà

	1	2	2	
1	2	3	3	
3	4	5	5	

Reste à fabriquer deux fois le total 4 ; il n'y a que deux possibilités : ou bien on rajoute deux fois encore le 3 sur le dé vertical ou bien on rajoute un 3 sur chaque dé.

Montrons que la première possibilité de convient pas : on obtiendrait :

	1	2	2	
1	2	3	3	
3	4	5	5	
3	4	5	5	
3	4	5	5	

et donc trop de totaux valant 5.

$\longrightarrow$

Donc *nécessairement*, le tableau est de la forme

	1	2	2	3
1	2	3	3	4
3	4	5	5	6
3	4	5	5	6

Pour obtenir le total maximum qui doit faire 8, la dernière face du dé vertical doit faire 8. Donc, nécessairement le tableau est le suivant :

	1	2	2	3
1	2	3	3	4
3	4	5	5	6
3	4	5	5	6
5	6	7	7	8

Réciproquement, il convient !

2. Résultat sans justification :

	1	2	2	3	3	4
1	2	3	3	4	4	5
3	4	5	5	6	6	7
4	5	6	6	7	7	8
5	6	7	7	8	8	9
6	7	8	8	9	9	10
8	9	10	10	11	11	12

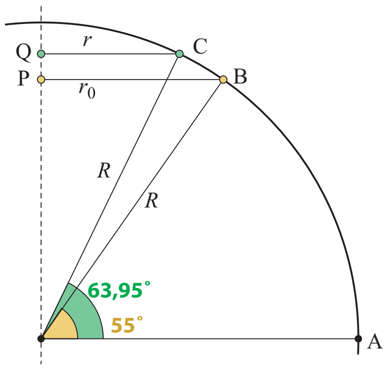
CORRECTION, MONTPELLIER 2012

Second exercice Académique (exo 4)

Olympiades mathématiques, S

1. Pour un angle de 360°, on parcourt $2\pi kR$ km, soit, pour 1 degré : $\dfrac{2\pi R}{360}$ et pour α ,

$$\frac{2\pi R}{360}\alpha = \frac{\pi R}{180}\alpha = d \Leftrightarrow \alpha = \frac{180}{\pi R}d \text{ ou } \frac{d}{R} \text{ en radians.}$$



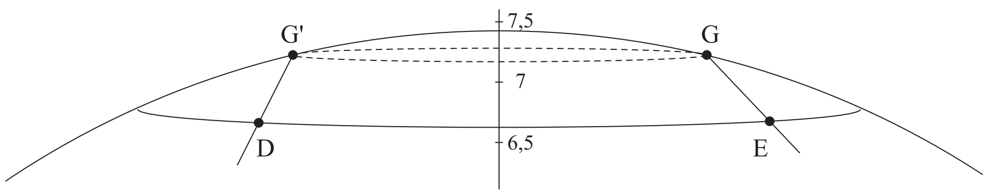
2. A la latitude 55° le rayon du parallèle est

$$r = R\cos 55^o = 3670,89 \text{ km.}$$

En montant de 1000 km, il parcourt un angle de $\dfrac{1000}{R} = 0,156$ rad et atteint la latitude 63,95° ou $\beta = 1,116$ rad d'où, en revenant à la latitude 55° la distance

$$d' = \gamma \times r = 0,3558 \times 3670,89 = 1306,1 \text{ kl.}$$

3. Pour que cela soit possible, il faut que les 200 km vers le Nord se fassent symétriquement à l'Équateur, soit 100 km au sud de l'Équateur…Évidemment il pourrait aussi être un peu en-dessous du Pôle Nord et tourner plusieurs fois autour du pôle puis redescendre vers le Sud et retourner à la maison…



Comme il fait 35° et qu'il n'y a pas de trains au Pôle Nord, la situation ne concorde pas…mais les calculs peuvent être amusants…Serait-ce possible au Pôle Sud ?

source : apmep