OLYMPIADES MATHÉMATIQUES
LYCÉE, PREMIÈRE

ACADÉMIE DE LYON
2020

SUJET + CORRIGÉ

20e OLYMPIADES DE MATHÉMATIQUES

Mercredi 11 mars 2020[1], 2 énoncés (national et académique) en 4 heures, élèves de première générale et technologique[2] et de début de terminale[3], inscription auprès de votre professeur de mathématiques avant les vacances d'hiver selon académie.

RÉPUBLIQUE FRANÇAISE
MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE

OLYMPIADES DE MATHÉMATIQUES 2020

SUJETS ACADEMIQUES

Exercice académique à traiter par tous les candidats

Problèmes d'isopérimétrie

On définit le rapport isopérimétrique d'une figure fermée du plan comme étant le quotient du carré de son périmètre par son aire. Autrement dit, pour une figure de périmètre P et d'aire A, son rapport isopérimétrique est défini par $Q = \frac{P^2}{A}$.

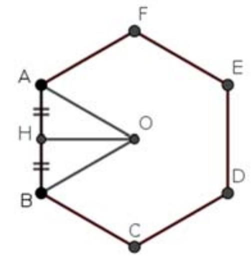
Partie A

1. Étude des triangles équilatéraux.

   a) Tracer un triangle équilatéral dont la longueur des côtés est 4 cm et calculer son rapport isopérimétrique.

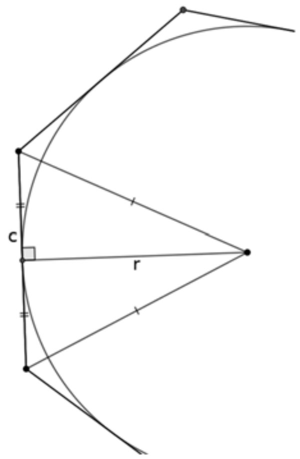
   b) Déterminer le rapport isopérimétrique d'un triangle équilatéral dont la longueur des côtés est *c*. Vérifier que son expression ne dépend pas de *c*.

2. Donner l'expression du rapport isopérimétrique d'un carré dont la longueur des côtés est *c*.
3. On a tracé ci-contre un hexagone régulier de centre O et de côté de longueur *c*. Calculer son rapport isopérimétrique.
   Indication : l'hexagone est formé de 6 triangles équilatéraux.



Partie B

1. On considère un polygone régulier à *n* côtés de longueur *c* et on note *r* le rayon de son cercle inscrit. Exprimer l'aire, le périmètre et le rapport isopérimétrique de ce polygone en fonction de *c*, *r* et *n*.
2. En comparant l'aire du polygone régulier et l'aire du disque de rayon *r* inscrit dans ce polygone, établir l'inégalité $\frac{nc}{2} \geq \pi r$ et en déduire que $Q \geq 4\pi$.



Partie C

1. On s'intéresse à un triangle isocèle dont deux côtés sont de longueur *c* et le troisième est de longueur *2d*.

   a) Démontrer que $c > d$.

   b) Démontrer que son rapport isopérimétrique est égal à $Q = \frac{4(c+d)^2}{d\sqrt{c^2-d^2}}$.

   c) Montrer que pour *c=2d*, on a $Q = 12\sqrt{3}$.

   d) Démontrer que
   $$Q^2 - (12\sqrt{3})^2 = \frac{16(c-2d)^2(7d^2+8cd+c^2)}{d^2(c^2-d^2)}.$$

   e) En déduire que le rapport isopérimétrique d'un triangle isocèle quelconque est toujours supérieur ou égal à celui de tout triangle équilatéral.

2. On considère un triangle quelconque *ABC*. On trace la droite (*d*) parallèle à (*AB*) passant par *C*, et on place un point *C'* sur (*d*).

   a) Démontrer que, quelle que soit la position du point *C'* sur (*d*), les triangles *ABC* et *ABC'* ont la même aire.

   b) Démontrer que, si *ABC'* est isocèle en *C'*, alors $AC + CB \geq AC' + BC'$.
   Indication : on pourra considérer le symétrique de *B* par rapport à (*d*).

   c) Déduire des questions précédentes que tous les triangles vérifient $Q \geq 12\sqrt{3}$, et donc $Q \geq 4\pi$.

3. Tracer un triangle de rapport isopérimétrique supérieur à 2020.

Exercice académique à traiter par les candidats de voie générale ayant choisi la spécialité mathématiques

Les mendiants généreux

Un voyageur sans un sou en poche se promène dans une ville imaginaire et rencontre des mendiants.

Le premier mendiant lui demande 1€, le voyageur, navré, lui répond qu'il n'a aucun euro en poche.

Le mendiant lui dit alors : « ce n'est pas grave, dans ce cas, c'est moi qui te donne 1€ ».

Le voyageur repart un peu confus et étonné d'avoir maintenant 1€ en poche. Il rencontre un 2ème mendiant qui lui demande 2€. Le voyageur, navré, lui dit qu'il n'a qu'un euro en poche, ce à quoi le mendiant répond : « ce n'est pas grave, dans ce cas, c'est moi qui te donne 2€ ».

Le voyageur poursuit son chemin avec 3€ en poche et rencontre un 3ème mendiant qui lui demande 3€. Ravi de les avoir, le voyageur lui donne les 3€ qu'il a en poche et continue son chemin sans argent.

Un peu plus loin, il rencontre un 4ème mendiant qui lui demande 4€…

L'histoire se poursuit ainsi : Lorsque le voyageur rencontre le n-ième mendiant, celui-ci lui demande n euros. Si le voyageur les possède, il les lui donne, sinon, c'est le mendiant qui les lui donne.

Pour tout entier n, avec $n \geq 0$, on appelle u_n la somme d'argent en euro, que possède le voyageur après avoir rencontré le n-ième mendiant. On a donc : $u_0 = 0$; $u_1 = 1$; $u_2 = 3$; $u_3 = 0$.

On définit ainsi une suite (u_n).

1°) Donner les termes de la suite (u_n) pour n allant de 4 à 10.

2°) Ecrire un algorithme qui permet d'obtenir les sommes d'argent, en euro, que possède le voyageur jusqu'au 50ème mendiant rencontré.

3°) Démontrer que pour tout entier naturel n, on a $0 \leq u_n \leq 2n$

4°) a) Démontrer que si $1 \leq u_n \leq n$ alors $u_{n+2} = u_n - 1$
b) Démontrer que si $n + 1 \leq u_n \leq 2n$ alors $u_{n+2} = u_n + 1$

5°) a) Démontrer que si $u_n = 0$ alors $u_{3n+3} = 0$
b) En utilisant le fait que $u_0 = 0$, trouver six autres termes de la suite (u_n) valant 0.

6°) On admet que pour tout $p \geq 1$, $S_p = 3 + 3^2 + 3^3 + \cdots + 3^p = \frac{3^{p+1}-3}{2}$
Démontrer que si $n = \frac{3^{p+1}-3}{2}$ avec p entier positif quelconque, alors $u_n = 0$

7°) a) Ecrire 1092 sous la forme d'une somme de puissances successives de 3.
b) En déduire la somme d'argent, en euro, possédée par le voyageur après avoir rencontré le 2020ème mendiant.

8°) En remarquant que $S_7 = 3 + 3^2 + 3^3 + 3^4 + 3^5 + 3^6 + 3^7 = 3279$, déterminer un entier n tel que $u_n = 2020$.

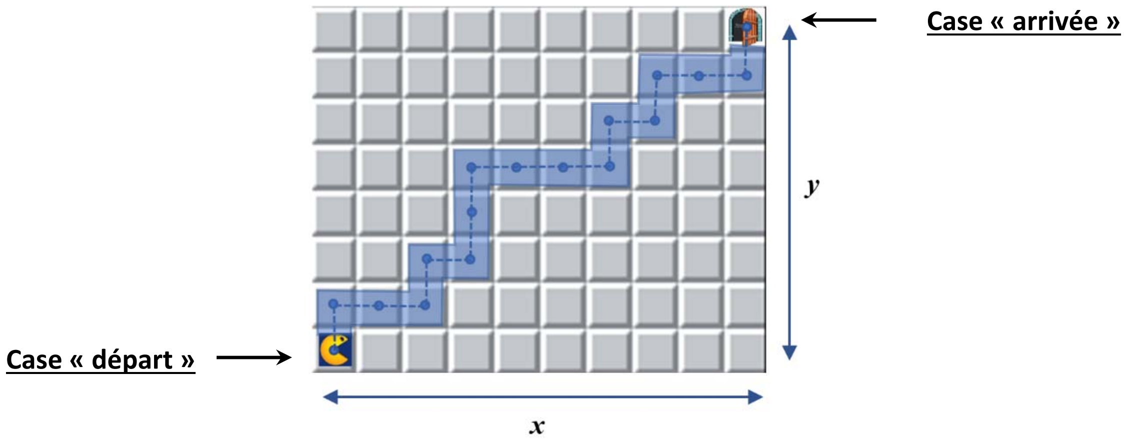
9°) Démontrer que pour tout entier naturel n, on a $u_{3n+1} = 3u_n + 1$.

Exercice académique à traiter par les candidats n'ayant pas suivi la spécialité mathématiques de voie générale

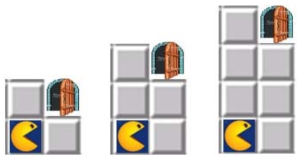
Problème « Jeu vidéo »

Un jeu vidéo est constitué d'une grille rectangulaire de x cases par y cases, x et y étant des entiers naturels non nuls (dans l'exemple d'illustration ci-dessous on a $x = 10$ et $y = 8$). Un personnage se trouvant en bas à gauche de la grille (case « départ ») doit rejoindre une porte située en haut à droite (case « arrivée ») en se déplaçant suivant deux directions : vers le haut ou vers la droite.

On appelle « chemin » l'ensemble des cases empruntées par le personnage (un exemple de chemin a été tracé ci-dessous). Le but de ce problème est d'étudier le nombre de chemins possibles entre la case de départ et la case d'arrivée, nombre que l'on notera C(x ; y).



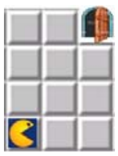
1) Etude de premiers cas de C(x ; y) , $x \geq 1$ et $y \geq 1$:



a. Soit y quelconque. Donner la valeur de C(1 ; y) .

b. Donner les valeurs de C(2 ; 2) ; C(2 ; 3) ; C(2 ; 4) .

Déterminer C(2 ; y) en fonction de y. Justifier la réponse.



c. Justifier que C(3 ; 4) = C(2 ; 4) + C(2 ; 3) + C(2 ; 2) + C(2 ; 1) puis calculer C(3 ; 4).

On rappelle que $1 + 2 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$. Préciser C(3 ; y) en fonction de y (en justifiant)

d. Justifier que C(y ; x) = C(x ; y)

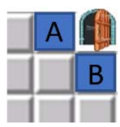
2) Calcul de C(6 ; 6) :

En considérant les chemins passant par les cases A, B, C, D, E ou F de la grille ci-contre :

a. Justifier que C(6 ; 6) = 2 [C^2(1 ; 6) + C^2(2 ; 5) + C^2(3 ; 4)]

b. En déduire la valeur de C(6 ; 6)

3) Détermination des C(x ; y) et application à une situation de jeu :

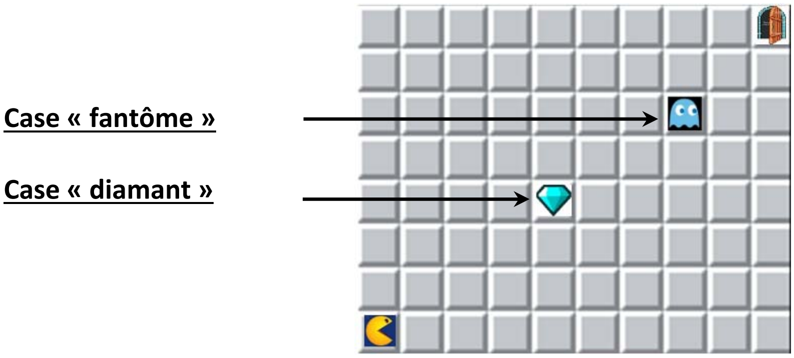


a. En considérant les chemins passant par les cases A et B adjacentes à la porte, montrer que C(x ; y) = C($x - 1$; y) + C(x ; $y - 1$)

b. Recopier et compléter alors le tableau des C(x ; y) ci-dessous :

6	1					
5	1					
4	1					
3	1					
2	1	2				
1	1	1	1	1	1	1
y / x	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**

c. Application à une configuration de jeu :



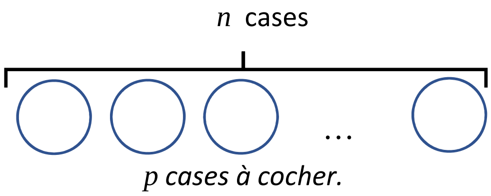
Le personnage doit rejoindre la case « arrivée » en passant par la case « diamant » et en évitant la case « fantôme ».

Calculer le nombre de chemins gagnants, c'est-à-dire respectant ces deux contraintes.

4) Recherche explicite des C(x ; y) :

Pour représenter un chemin, chaque déplacement d'une case vers le haut est noté **H** et chaque déplacement d'une case vers la droite est noté **D**.
Ainsi le chemin donné en exemple au début de l'énoncé est représenté par **H D D H D H H D D D H D H D D H .**

On admettra le résultat suivant :



Si on veut cocher p cases parmi n cases (avec $p < n$), le nombre de possibilités est égal à $\frac{(p+1)\times(p+2)\times\ldots\times n}{1\times2\times\ldots\times(n-p)}$,
ce nombre est noté $\binom{n}{p}$.

a. Justifier que C(x ; y) = $\binom{x+y-2}{x-1}$ et en déduire que pour $y \geq 2$, on a C(x ; y) = $\frac{x\times(x+1)\times\ldots\times(x+y-2)}{1\times2\times\ldots\times(y-1)}$

b. Utiliser le résultat précédent pour calculer la valeur de C(10 ; 8) puis déterminer la proportion du nombre de chemins gagnants de la question **3)** par rapport à la valeur C(10 ; 8) (arrondir le résultat à 10^{-4}).

c. Recopier puis compléter l'algorithme ci-dessous permettant de calculer la valeur de C(x ; y) où x et y sont deux entiers supérieurs ou égaux à 2 précisés par l'utilisateur et où C contiendra la valeur de C(x ; y).

```
N ← 1
D ← 1
   Pour k allant de 0 à  y − 2
  N ← N × ( ……….. )
  D ←  D × ( ……… )
  C ← …
```

OLYMPIADES MATHÉMATIQUES
LYCÉE, PREMIÈRE

CORRECTION !

Épreuve ▪ 2020

Problèmes d'isopérimétrie : éléments de correction.

A.1.a. Les hauteurs ont pour longueur $\frac{4\sqrt{(3)}}{2}$ et ainsi $Q=\frac{(3\times 4)^2}{4\sqrt{(3)}}=12\sqrt{(3)}$

A.1.b. De même, $Q=\frac{(3c)^2}{c^2\sqrt{(3)}/4}=12\sqrt{(3)}$. Les facteurs c^2 du numérateur et du dénominateur se simplifient : le quotient ne dépend plus de c.

A.2. $Q=\frac{(4c)^2}{c^2}=16$.

A.3. L'aire de chaque triangle équilatéral est $\frac{c^2\sqrt{3}}{4}$ (calculée en A.1.b.). L'hexagone en comporte six dond son aire est égale à $\frac{6\times c^2\sqrt{(3)}}{4}$, et son périmètre à $6c$ d'où $Q=\frac{4\times 36c^2}{6c^2\sqrt{(3)}}=8\sqrt{(3)}$

B.1.L'un des triangles représentées a pour aire $\frac{cr}{2}$, l'aire du polygone est donc $\frac{ncr}{2}$.

Le périmètre est nc, on en déduit $Q=(nc)^2\times\left(\frac{ncr}{2}\right)^{-1}=\frac{2n^2c^2d}{ncr}=\frac{2nc}{r}$.

B.2. L'aire du disque inscrit est πr^2, elle est inférieure à l'aire du polygone, c'est à dire $\frac{ncr}{2}\geq\pi r^2$, d'où $\frac{nc}{2}\geq\pi r$ en simplifiant par r.

On en déduit $\frac{nc}{r}\geq 2\pi$ et donc $Q=2\times\frac{nc}{r}\geq 4\pi$

C.1.a. D'après l'inégalité triangulaire, le côté de longueur 2d a une longueur inférieur à la somme des longueurs des deux autres côtés, ce qui s'écrit $2d<2c$, d'où le résultat.
L'inégalité est stricte car dans le cas d'égalité le triangle est d'aire nulle, mais alors le rapport isopérimétrique n'est pas défini (ce fait reste implicite dans tout le problème).

C.1.b. La hauteur associée à la base de longueur $2d$ a pour longueur $\sqrt{(c^2-d^2)}$ donc le triangle a pour aire $d\sqrt{(c^2-d^2)}$. Son périmètre est $2(d+c)$ d'où $Q=\frac{4(c+d)^2}{d\sqrt{c^2-d^2}}$.

C.1.c. Avec $c=2d$, on trouve $Q=\frac{4(c+d)^2}{d\sqrt{c^2-d^2}}=\frac{4(3d)^2}{d\sqrt{3d^2}}=\frac{12\times 3d^2}{\sqrt{3}d^2}=12\sqrt{3}$.
Remarque : avec c=2d le triangle isocèle est équilatéral, et on retrouve heureusement la même valeur qu'en A.1.a.

C.1.d. On développe puis réduit le numérateur du membre de droite de l'égalité :

$$16(c-2d)^2(7d^2+8cd+c^2)=16(c^2-4cd+4d^2)(7d^2+8cd+c^2)=16(c^4+4c^3d-21c^2d^2+4cd^3+28d^4).$$

D'autre part $Q^2-(12\sqrt{3})^2=\frac{4^2(c+d)^4-3^3 4^2 d^2(c^2-d^2)}{d^2(c^2-d^2)}=\frac{16}{d^2(c^2-d^2)}\left((c+d)^4-27d^2(c^2-d^2)\right)$ en mettant sur le même dénominateur. On développe $\left((c+d)^4-27d^2(c^2-d^2)\right)$, on trouve

$$c^4+4c^3d+6c^2d^2+4cd^4+d^4-27c^2d^2+27d^4=c^4+4c^3d-21c^2d^2+4cd^3+28d^4.$$

Le résultat est établi.

C.1.e. On note D le membre de droite de l'égalité donnée. Tous les facteurs de D sont positif pour toutes les valeurs des paramètres. Avec l'identité remarquable,

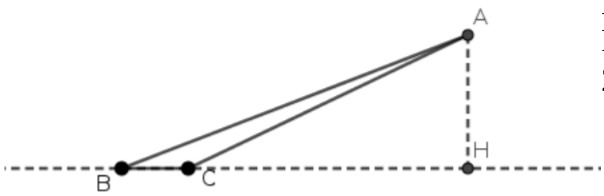
$Q^2-(12\sqrt{3})^2=(Q-12\sqrt{3})(Q+12\sqrt{3})=D\geq 0,$ d'où $Q-12\sqrt{3}=\dfrac{D}{Q+12\sqrt{3}}\geq 0,$ ce qui montre qu'on a $Q\geq 12\sqrt{3}$ pour tout triangle isocèle. Le rapport isopérimétrique de tout triangle équilatéral est donc toujours inférieur à celui de tout triangle isocèle.

C.2.a. La hauteur issue de C' a pour longueur la distance h entre (d) et (AB) pour tous ces triangles, et la longueur AB ne change pas. L'aire, qui vaut $h\dfrac{AB}{2}$, ne dépend pas de C'.

C.2.b. Considérons le symétrique B' de B par rapport à (d). La distance AB' est le plus court chemin entre A et B' donc $AB'\leq AC+CB'=AC+CB$. Comme C' est sur $[AB']$,
$AB'=AC'+C'B'=AC'+C'B\leq AC+CB$.

C.2.c. Le périmètre d'un triangle quelconque est supérieur à celui du triangle isocèle construit à la question précédente. Leurs aires étant égales, le rapport isopérimétrique d'un triangle quelconque est supérieur au rapport isopérimétrique du triangle isocèle qui lui est associé par la question précédent. D'après la question C.1.d, le rapport isopérimétrique de ce triangle isocèle est supérieur à $12\sqrt{3}$. On conclut en constatant que $12\sqrt{3}\geq 4\pi$.

C.3. Il s'agit de s'éloigner le plus possible du triangle isocèle. Pour simplifier, on peut rechercher un triangle ABC comme ci-dessous et d'aire 1, avec par exemple BC = 1cm et pour hauteur AH=2cm.



En notant x = BH, son périmètre est minoré par 2x. Pour que le rapport isopérimétrique soit supérieur à 2020, il suffit donc que $(2x)^2\geq 2020$, soit $x\geq\dfrac{\sqrt{2020}}{2}\approx 22{,}47$.

Le triangle schématisé ci-dessus avec BH = 22,5cm convient, et si l'on est assez soigneux on peut le tracer sur une feuille A4.

Les mendiants généreux

Un voyageur sans un sou en poche se promène dans une ville imaginaire et rencontre des mendiants.

Le premier mendiant lui demande 1€, le voyageur, navré, lui répond qu'il n'a aucun euro en poche.

Le mendiant lui dit alors : « ce n'est pas grave, dans ce cas, c'est moi qui te donne 1€ ».

Le voyageur repart un peu confus et étonné d'avoir maintenant 1€ en poche. Il rencontre un 2ème mendiant qui lui demande 2€. Le voyageur, navré, lui dit qu'il n'a qu'un euro en poche, ce à quoi le mendiant répond : « ce n'est pas grave, dans ce cas, c'est moi qui te donne 2€ ».

Le voyageur poursuit son chemin avec 3€ en poche et rencontre un 3ème mendiant qui lui demande 3€. Ravi de les avoir, le voyageur lui donne les 3€ qu'il a en poche et continue son chemin sans argent.

Un peu plus loin, il rencontre un 4ème mendiant qui lui demande 4€…

L'histoire se poursuit ainsi : Lorsque le voyageur rencontre le n-ième mendiant, celui-ci lui demande n euros. Si le voyageur les possède, il les lui donne, sinon, c'est le mendiant qui les lui donne.

Pour tout entier n, avec $n \geq 0$, on appelle u_n la somme d'argent en euro, que possède le voyageur après avoir rencontré le n-ième mendiant. On a donc : $u_0 = 0$; $u_1 = 1$; $u_2 = 3$; $u_3 = 0$.

On définit ainsi une suite (u_n).

1°) Donner les termes de la suite (u_n) pour n allant de 4 à 10.

2°) Ecrire un algorithme qui permet d'obtenir les sommes d'argent, en euro, que possède le voyageur jusqu'au 50ème mendiant rencontré.

3°) Démontrer que pour tout entier naturel n, on a $0 \leq u_n \leq 2n$

4°) a) Démontrer que si $1 \leq u_n \leq n$ alors $u_{n+2} = u_n - 1$

b) Démontrer que si $n + 1 \leq u_n \leq 2n$ alors $u_{n+2} = u_n + 1$

5°) a) Démontrer que si $u_n = 0$ alors $u_{3n+3} = 0$

b) En utilisant le fait que $u_0 = 0$, trouver six autres termes de la suite (u_n) valant 0.

6°) On admet que pour tout $p \geq 1$, $S_p = 3 + 3^2 + 3^3 + \cdots + 3^p = \frac{3^{p+1}-3}{2}$

Démontrer que si $n = \frac{3^{p+1}-3}{2}$ avec p entier positif quelconque, alors $u_n = 0$

7°) a) Ecrire 1092 sous la forme d'une somme de puissances successives de 3.

b) En déduire la somme d'argent, en euro, possédée par le voyageur après avoir rencontré le 2020ème mendiant.

8°) En remarquant que $S_7 = 3 + 3^2 + 3^3 + 3^4 + 3^5 + 3^6 + 3^7 = 3279$, déterminer un entier n tel que $u_n = 2020$.

9°) Démontrer que pour tout entier naturel n, on a $u_{3n+1} = 3u_n + 1$.

Eléments de correction

1°)

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
U_n	1	3	0	4	9	3	10	2	11	1

2°)
U prend la valeur 0
n prend la valeur 0
Pour n allant de 0 à 50
    Afficher n, U
    Si U<n+1 alors U prend la valeur U+n+1
      Sinon U prend la valeur U- (n+1)
      Fin si
Fin Pour

3°) Par récurrence mais les élèves de première ne connaissent pas ce type de raisonnement

Pour n=0 c'est vrai.

Pour un n donné on suppose $0 \leq u_n \leq 2n$ on veut démontrer que $0 \leq u_{n+1} \leq 2n + 2$

Supposons $0 \leq u_n \leq n$. Lorsque le voyageur rencontre le mendiant M_{n+1} il reçoit, en euros, $n + 1$ donc il possède après u_{n+1} tel que $0 \leq \ n + 1 \leq u_{n+1} \leq 2n + 1 \leq 2n + 2$.

Supposons $n + 1 \leq u_n \leq 2n$. Lorsque le voyageur rencontre le mendiant M_{n+1}, c'est le voyageur qui donne, en euros, $n + 1$ donc il lui reste après u_{n+1} tel que $0 \leq u_{n+1} \leq n - 1 \leq 2n$+2.

Par récurrence on a donc : Pour tout entier naturel n, on a $0 \leq u_n \leq 2n$

Sinon on peut raisonner comme suit.

Le cas le plus défavorable pour le voyageur est qu'il possède n euros lorsqu'il rencontre le n-ième mendiant. Dans ce cas, il donne tout son argent et il possède ensuite 0€.

On a donc pour tout entier naturel n, $0 \leq u_n$

Le cas le plus favorable pour le voyageur est qu'il possède $(n - 1)$ € lorsqu'il rencontre le n-ième mendiant. Dans ce cas, il possède ensuite $(2n - 1)$ €.

On a donc pour tout entier naturel $n \geq 1$: $u_n \leq 2n - 1$

Comme $u_0 = 0$, on a bien pour tout entier naturel $n \geq 0$: $u_n \leq 2n$

4°)a)

Supposons $1 \leq \ u_n \leq n$, alors lorsque le voyageur rencontre le mendiant numéro $(n + 1)$ il n'a pas assez d'argent, il reçoit $(n + 1)$€ donc on a $u_{n+1} = u_n + n + 1$ avec

$$n + 2 \leq \ u_n + n + 1 \leq 2n + 1$$

Puis lorsque le voyageur rencontre le mendiant numéro $(n + 2)$, il aura suffisamment d'argent, donc il lui donnera $(n + 2)$€. Ainsi il possèdera $u_{n+2} = u_{n+1} - (n + 2) = u_n + n + 1 - n - 2 = u_n - 1$

4°)b)

Supposons $n+1 \leq u_n \leq 2n$, alors lorsque le voyageur rencontre le mendiant numéro $(n+1)$ il a assez d'argent, il donne $(n+1)$€ donc on a $u_{n+1} = u_n - (n+1)$ avec $0 \leq u_n - n - 1 \leq n - 1$

Puis lorsque le voyageur rencontre le mendiant numéro $(n+2)$, il n'aura pas suffisamment d'argent, donc il recevra $(n+2)$€.

Ainsi il possèdera $u_{n+2} = u_{n+1} + (n+2) = u_n - n - 1 + n + 2 = u_n + 1$

5°)a)

Si $u_n = 0$ alors $u_{n+1} = n+1$ et on se trouve dans le cas du 4°a) donc $u_{n+3} = (n+1) - 1$ et on restera dans la cas du 4°a) jusqu'à ce qu'on retombe à 0.

Ainsi $u_{n+(2k+1)} = (n+1) - k$ pour tout $0 \leq k \leq n+1$.

Donc lorsque $k = n+1$, on aura $u_{n+2(n+1)+1} = 0$ c'est-à-dire $u_{3n+3} = 0$

5°)b) On a $u_0 = 0$ donc $u_3 = 0$, puis $u_{3\times 3+3} = u_{12} = 0$, puis $u_{3\times 12+3} = u_{39} = 0$, puis $u_{3\times 39+3} = u_{120} = 0$, puis $u_{3\times 120+3} = u_{363} = 0$, puis $u_{3\times 363+3} = u_{1092} = 0$

6°)

Les indices de termes qui valent 0 sont 0, 3, 3^2+3, 3^3+3^2+3, $3^4+3^3+3^2+3$ etc… sommes qui s'expriment, en fonction de $p \geq 1$, comme précédemment et qui, pour $p = 0$ donne bien pour indice 0 avec la même formule. Donc si le rang est $n = \frac{3^{p+1}-3}{2}$ avec p entier positif quelconque les termes u_n de la suite valent 0.

7°)a)

$1092 = S_6 = 3 + 3^2 + \cdots + 3^6$

7°)b)

On a $u_{1092} = 0$ donc $U_{1093} = 1093$.

On obtient alors $u_{2019} = 1093 - \frac{2019-1093}{2} = 1093 - 463 = 630$.

Ainsi $u_{2020} = 2020 + 630 = 2650$. Après avoir rencontré le 2020$^{\text{ème}}$ mendiant le voyageur possède 2650€

8°)

Si l'on part de $U_{1093} = 1093$ on a pour tout entier k ; $0 \leq k \leq 1093$, $u_{1093+2k} = 1093 - k$.

Or $1093 - k = 2020$ est impossible avec k positif.

On a de plus $u_{1094} = 2187$ avec $u_{1094+2k} \geq 2187 > 2020$ pour tout k ; $0 \leq k \leq 1093$.

On doit donc aller jusqu'au prochain terme nul de la suite.

On a $S_7 = 3279$ donc $u_{3279} = 0$, ainsi $u_{3280} = 3280$

Puis $u_{3280+2k} = 3280 - k$ pour tout k ; $0 \leq k \leq 3280$.

On cherche k tel que $3280 - k = 2020 \Leftrightarrow k = 1260$.

On obtient $u_{3280+2\times1260} = u_{5800} = 2020$

Remarque : Le prochain entier qui vérifie la même propriété est 25483 : $u_{25483} = 2020$.

Démonstration de la question 9$^{\text{o}}$)

Supposons $u_{3n+1} = 3u_n + 1$. Montrons que $u_{3(n+1)+1} = 3u_{n+1} + 1$, c'est-à-dire $u_{3n+4} = 3u_{n+1} + 1$.

— Si $0 \leqslant u_n \leqslant n$, alors le voyageur ne peut pas donner au $n+1$-ième mendiant, donc $u_{n+1} = u_n + n + 1$. D'autre part, $1 \leqslant u_{3n+1} = 3u_n + 1 \leqslant 3n + 1$ donc par la question 4$^{\text{o}}$a)

$$u_{3n+3} = u_{3n+1} - 1 = 3u_n \leqslant 3n < 3n + 4$$

Le voyageur ne peut pas non plus payer le $3n + 4$-ième mendiant et

$$u_{3n+4} = 3u_n + 3n + 4 = 3(u_n + n + 1) + 1 = 3u_{n+1} + 1$$

ce qu'il fallait démontrer.

— Si $u_n \geqslant n+1$, le voyageur a assez d'argent pour payer le $n+1$-ième mendiant. Ainsi $u_{n+1} = u_n - n - 1$. De plus, $u_{3n+1} = 3u_n + 1 \ \geqslant 3(n + 1) + 1 = 3n + 4 > 3n + 1$, et par la question 4$^{\text{o}}$b)

$$u_{3n+3} = u_{3n+1} + 1 = 3u_n + 2$$

Mais alors $u_{3n+3} \geqslant 3(n + 1) + 2 \geqslant 3n + 5$: le voyageur peut payer le $3n + 4$-ième mendiant, et

$$u_{3n+4} = 3u_n + 2 - (3n + 4) = 3u_n - 3n - 2 = 3(u_n - n - 1) + 1 = 3u_n + 1$$

La propriété est donc héréditaire pour tout entier n. Reste à vérifier que la propriété est vraie pour $n = 0$, ce qui est trivial puisque $u_0 = 0$ et $u_1 = 1$.

Remarque

Étant donné que l'on n'a pas utilisé la question 5$^{\text{o}}$a), on peut démontrer cette dernière en utilisant la question 9$^{\text{o}}$) aisément :

Si $u_n = 0$, $u_{3n+1} = 3u_n + 1 = 1$. Mais alors le $3n + 2$-ième mendiant donne la somme d'argent et $u_{3n+2} = 3n + 3$. Le voyageur peut ainsi exactement payer au $3n + 3$-ième mendiant, ce qui donne $u_{3n+3} = 0$.

Analyse précise de la structure de la suite

Cette analyse est inspirée par l'arbre fait par Bodo.

On rappelle qu'on a $u_0 = 0$, $u_1 = 1$, $u_2 = 3$, $u_3 = 0$, $u_4 = 4$, $u_5 = 9$, $u_6 = 3$, $u_7 = 10$, $u_8 = 2$, $u_9 = 11$, $u_{10} = 1$, $u_{11} = 12$, $u_{12} = 0$, $u_{13} = 13$, $u_{14} = 27$ et $u_{15} = 12$.

En étudiant les termes d'indice pair non nul d'un côté et les termes d'indice impair de l'autre, on obtient deux sous-suites :

— $u_1 = 1$, $u_3 = 0$, $u_5 = 9$, $u_7 = 10$, $u_9 = 11$, $u_{11} = 12$, $u_{13} = 13$, $u_{15} = 12$, $u_{17} = 11$, $u_{19} = 10$...

— $u_2 = 3$, $u_4 = 4$, $u_6 = 3$, $u_8 = 2$, $u_{10} = 1$, $u_{12} = 0$, $u_{14} = 27$, $u_{16} = 28$, $u_{18} = 29$, $u_{20} = 30$...

On pose $u_{-1} = 0$. Soit $n \leqslant 1$, avec $u_{n-2} = 0$. D'après la question 5$^{\text{o}}$a) $u_{3(n-2)+3} = 0$ soit $u_{3n-3} = 0$, mais aussi $u_{3(3n-3)+3} = 0$ soit $u_{9n-6} = 0$. Puisque $9n - 6$ a la même parité que n, on peut définir le *groupe* de termes $(u_n, u_{n+2}, \dots, u_{9n-6})$ qui se termine par un 0, et contient $\dfrac{9n-6-n}{2} + 1 = 4n - 2$ termes.

Le terme u_{9n-4} suit ce groupe, et commence un nouveau groupe de même parité. On sait aussi que $u_{3n-3} = 0$ donc u_{3n-1} commence lui aussi un groupe, de parité différente. Le groupe de premier terme u_{3n-1} possède $4(3n-1) - 2 = 3(4n-2)$ termes, soit trois fois plus que le groupe débutant par u_n.

Pour $n = 1$ on obtient le groupe $(u_1 = 1,\ u_3 = 0)$. Un autre groupe commence à $n = 3 \times 1 - 1 = 2$: $(u_2 = 3,\ u_4 = 4,\ u_6 = 3,\ u_8 = 2,\ u_{10} = 1,\ u_{12} = 0)$. Un autre commence à $n = 3 \times 2 - 1 = 5$ et il suit directement le dernier terme du groupe $(u_1 = 1,\ u_3 = 0)$.

On peut ainsi découper la suite en groupes disjoints :

— $u_0 = 0$
— $u_1 = 1$ et $u_3 = 0$
— $u_2 = 3$, $u_4 = 4$, $u_6 = 3$, $u_8 = 2$, $u_{10} = 1$ et $u_{12} = 0$
— $u_5 = 9$, $u_7 = 10$, $u_9 = 11$, $u_{11} = 12$, $u_{13} = 13$, $u_{15} = 12$, $u_{17} = 11$, $u_{19} = 10$, $u_{21} = 9$, $u_{23} = 8$, $u_{25} = 7$, $u_{27} = 6$, $u_{29} = 5$, $u_{31} = 4$, $u_{33} = 3$, $u_{35} = 2$, $u_{37} = 1$ et $u_{39} = 0$
— $u_{14} = 27$, $u_{16} = 28$, $u_{18} = 29$, $u_{20} = 30$, …, $u_{38} = 39$, $u_{40} = 40$, $u_{42} = 39$, $u_{44} = 38$, …, $u_{110} = 5$, $u_{112} = 4$, $u_{114} = 3$, $u_{116} = 2$, $u_{118} = 1$ et $u_{120} = 0$
— $u_{41} = 81$, $u_{43} = 82$, $u_{45} = 83$, $u_{47} = 84$, …, $u_{115} = 118$, $u_{117} = 119$, $u_{119} = 120$, $u_{121} = 121$, $u_{123} = 120$, $u_{125} = 119$, $u_{127} = 118$, $u_{129} = 117$, …
— …

Étudions le groupe de premier terme u_n avec $n \geqslant 1$. Puisque $u_{n-2} = 0$, $u_{n-1} = n-1$ car le mendiant est alors généreux, et $u_n = 2n-1$ car le voyageur n'a toujours pas de quoi payer le n-ième mendiant.

Soit $\forall m, v_m = u_m - m$. On a $v_n = n - 1$. D'après la question 3º), $\forall m, -m \leqslant v_m \leqslant m$, et d'après la question 4º) :

— si $v_m \geqslant 1$ alors $v_{m+2} = u_{m+2} - m - 2 = u_m + 1 - m - 2 = v_m - 1$;
— si $v_m \leqslant 0$ alors $v_{m+2} = u_{m+2} - m - 2 = u_m - 1 - m - 2 = v_m - 3$.

Dans tous les cas, on obtient une suite de valeurs entières strictement décroissantes $v_n > v_{n+2} > v_{n+4} > \cdots > v_{n+2k}$. Plus précisément, $v_{n+2} = v_n - 1 = n - 2$, …, $v_{n+2k} = n - 1 - k$, jusqu'à $v_{n+2(n-1)} = 0$ soit $v_{3n-2} = 0$. Cela correspond à des augmentations $u_{n+2} = u_n + 1$, $u_{n+4} = u_n + 2$, jusqu'à atteindre $u_{3n-2} = 3n - 2$.

Par la suite les termes v_{n+2k} sont tous négatifs ou nuls, c'est-à-dire $u_{n+2k} \leqslant n + 2k$ donc les termes du groupe diminuent de un en un et il faut encore $3n - 2$ étapes pour atteindre $u_{3n-2+2(3n-2)} = 0$, ou encore $u_{9n-6} = 0$.

Les seuls termes nuls dans la suite sont donc bien donnés par la question 5ºa) : dans chaque groupe tous les termes sont non nuls hormis le dernier. De plus les valeurs des termes sont toutes consécutives, croissantes de u_n à $u_{3n-2} = 3n - 2$ puis décroissants de u_{3n-2} à $u_{9n-6} = 0$.

$u_0 = 0$, $u_1 = 1$, $u_2 = 3$, $u_3 = 0$, $u_4 = 4$, $u_5 = 9$, $u_6 = 3$, $u_7 = 10$, $u_8 = 2$, $u_9 = 11$, $u_{10} = 1$, $u_{11} = 12$, $u_{12} = 0$, $u_{13} = 13$, $u_{14} = 27$, $u_{15} = 12$, $u_{16} = 28$, $u_{17} = 11$, $u_{18} = 29$, $u_{19} = 10$, $u_{20} = 30$, $u_{21} = 9$, $u_{22} = 31$, $u_{23} = 8$, $u_{24} = 32$, $u_{25} = 7$, $u_{26} = 33$, $u_{27} = 6$, $u_{28} = 34$, $u_{29} = 5$, $u_{30} = 35$, $u_{31} = 4$, $u_{32} = 36$, $u_{33} = 3$, $u_{34} = 37$, $u_{35} = 2$, $u_{36} = 38$, $u_{37} = 1$, $u_{38} = 39$, $u_{39} = 0$, $u_{40} = 40$, $u_{41} = 81$, $u_{42} = 39$, $u_{43} = 82$, $u_{44} = 38$, $u_{45} = 83$, $u_{46} = 37$, $u_{47} = 84$, $u_{48} = 36$, $u_{49} = 85$, $u_{50} = 35$, $u_{51} = 86$, $u_{52} = 34$, $u_{53} = 87$, $u_{54} = 33$, $u_{55} = 88$, $u_{56} = 32$, $u_{57} = 89$, $u_{58} = 31$, $u_{59} = 90$, $u_{60} = 30$, $u_{61} = 91$, $u_{62} = 29$, $u_{63} = 92$, $u_{64} = 28$, $u_{65} = 93$, $u_{66} = 27$, $u_{67} = 94$, $u_{68} = 26$, $u_{69} = 95$, $u_{70} = 25$, $u_{71} = 96$, $u_{72} = 24$, $u_{73} = 97$, $u_{74} = 23$, $u_{75} = 98$, $u_{76} = 22$, $u_{77} = 99$, $u_{78} = 21$, $u_{79} = 100$, $u_{80} = 20$, $u_{81} = 101$, $u_{82} = 19$, $u_{83} = 102$, $u_{84} = 18$, $u_{85} = 103$, $u_{86} = 17$, $u_{87} = 104$, $u_{88} = 16$, $u_{89} = 105$, $u_{90} = 15$, $u_{91} = 106$, $u_{92} = 14$, $u_{93} = 107$, $u_{94} = 13$, $u_{95} = 108$, $u_{96} = 12$, $u_{97} = 109$, $u_{98} = 11$, $u_{99} = 110$, $u_{100} = 10$, $u_{101} = 111$, $u_{102} = 9$, $u_{103} = 112$, $u_{104} = 8$, $u_{105} = 113$, $u_{106} = 7$, $u_{107} = 114$, $u_{108} = 6$, $u_{109} = 115$, $u_{110} = 5$, $u_{111} = 116$, $u_{112} = 4$, $u_{113} = 117$, $u_{114} = 3$, $u_{115} = 118$, $u_{116} = 2$, $u_{117} = 119$, $u_{118} = 1$, $u_{119} = 120$, $u_{120} = 0$, $u_{121} = 121$, $u_{122} = 243$, $u_{123} = 120$, $u_{124} = 244$, $u_{125} = 119$, $u_{126} = 245$, $u_{127} = 118$, $u_{128} = 246$, $u_{129} = 117$, $u_{130} = 247$, $u_{131} = 116$, $u_{132} = 248$, $u_{133} = 115$, $u_{134} = 249$, $u_{135} = 114$, $u_{136} = 250$, $u_{137} = 113$, $u_{138} = 251$, $u_{139} = 112$, $u_{140} = 252$,

$u_{141} = 111$, $u_{142} = 253$, $u_{143} = 110$, $u_{144} = 254$, $u_{145} = 109$, $u_{146} = 255$, $u_{147} = 108$, $u_{148} = 256$, $u_{149} = 107$, $u_{150} = 257$, $u_{151} = 106$, $u_{152} = 258$, $u_{153} = 105$, $u_{154} = 259$, $u_{155} = 104$, $u_{156} = 260$, $u_{157} = 103$, $u_{158} = 261$, $u_{159} = 102$, $u_{160} = 262$, $u_{161} = 101$, $u_{162} = 263$, $u_{163} = 100$, $u_{164} = 264$, $u_{165} = 99$, $u_{166} = 265$, $u_{167} = 98$, $u_{168} = 266$, $u_{169} = 97$, $u_{170} = 267$, $u_{171} = 96$, $u_{172} = 268$, $u_{173} = 95$, $u_{174} = 269$, $u_{175} = 94$, $u_{176} = 270$, $u_{177} = 93$, $u_{178} = 271$, $u_{179} = 92$, $u_{180} = 272$, $u_{181} = 91$, $u_{182} = 273$, $u_{183} = 90$, $u_{184} = 274$, $u_{185} = 89$, $u_{186} = 275$, $u_{187} = 88$, $u_{188} = 276$, $u_{189} = 87$, $u_{190} = 277$, $u_{191} = 86$, $u_{192} = 278$, $u_{193} = 85$, $u_{194} = 279$, $u_{195} = 84$, $u_{196} = 280$, $u_{197} = 83$, $u_{198} = 281$, $u_{199} = 82$, $u_{200} = 282$...

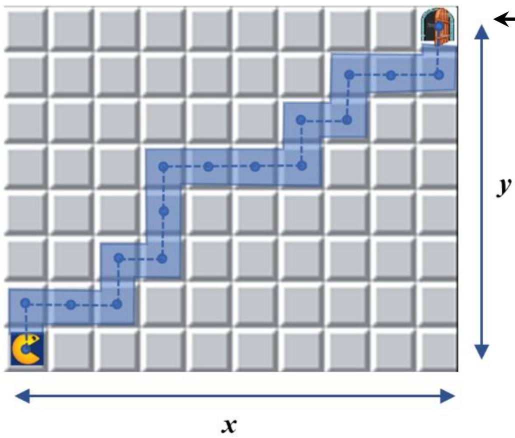
* *
*

Problème « <u>Jeu vidéo</u> »

Un jeu vidéo est constitué d'une grille rectangulaire de x cases par y cases, x et y étant des entiers naturels non nuls (dans l'exemple d'illustration ci-dessous on a $x = 10$ et $y = 8$). Un personnage se trouvant en bas à gauche de la grille (case « départ ») doit rejoindre une porte située en haut à droite (case « arrivée ») en se déplaçant suivant deux directions : vers le haut ou vers la droite.

On appelle « chemin » l'ensemble des cases empruntées par le personnage (un exemple de chemin a été tracé ci-dessous). Le but de ce problème est d'étudier le nombre de chemins possibles entre la case de départ et la case d'arrivée, nombre que l'on notera C(x ; y).

Case « arrivée »



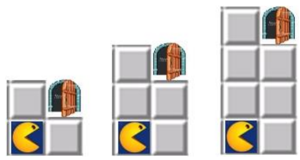
Case « départ »

1) Etude de premiers cas de C(x ; y) , $x \geq 1$ et $y \geq 1$:

a. Soit y quelconque. Donner la valeur de C(1 ; y)

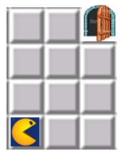
b. Donner les valeurs de C(2 ; 2) ; C(2 ; 3) ; C(2 ; 4)

Déterminer C(2 ; y) en fonction de y. Justifier la réponse.



c. Justifier que C(3 ; 4) = C(2 ; 4) + C(2 ; 3) + C(2 ; 2) + C(2 ; 1) puis calculer C(3 ; 4).

On rappelle que $1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$. Préciser C(3 ; y) en fonction de y (en justifiant)



d. Justifier que C(y ; x) = C(x ; y)

2) Calcul de C(6 ; 6) :

En considérant les chemins passant par les cases A, B, C, D, E ou F de la grille ci-contre :

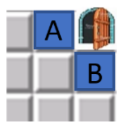
a. Justifier que C(6 ; 6) = 2 [C^2(1 ; 6) + C^2(2 ; 5) + C^2(3 ; 4)]

b. En déduire la valeur de C(6 ; 6)

3) Détermination des C(x ; y) et application à une situation de jeu :

a. En considérant les chemins passant par les cases A et B adjacentes à la porte, montrer que

C(x ; y) = C(x - 1 ; y) + C(x ; y - 1)



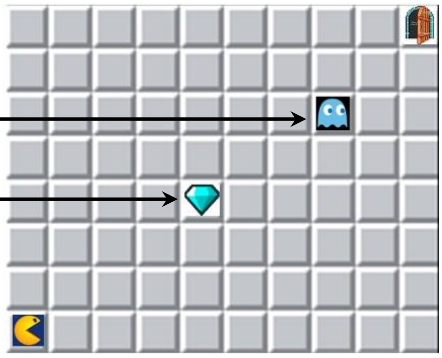
b. Recopier et compléter alors le tableau des C(x ; y) ci-dessous :

6	1					
5	1					
4	1					
3	1					
2	1	2				
1	1	1	1	1	1	1
y / x	1	2	3	4	5	6

c. Application à une configuration de jeu :

Case « fantôme »

Case « diamant »



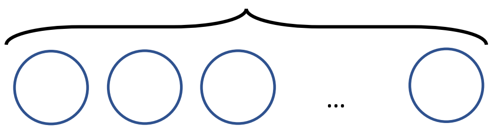
Le personnage doit rejoindre la case « arrivée » en passant par la case « diamant » et en évitant la case « fantôme ». Calculer le nombre de chemins gagnants, c'est-à-dire respectant ces deux contraintes.

4) Recherche explicite des C(x ; y) :

Pour représenter un chemin, chaque déplacement d'une case vers le haut est noté H et chaque déplacement d'une case vers la droite est noté **D**, ainsi le chemin donné en exemple au début de l'énoncé est représenté par H **D** **D** H **D** H H **D** **D** **D** H **D** H **D** **D** H

On admettra le résultat suivant :

n cases



p cases à cocher.

Si on veut cocher p cases parmi n cases (avec $p < n$), le nombre de possibilités est égal à $\frac{(p+1)\times(p+2)\times\ldots\times n}{1\times 2\times\ldots\times(n-p)}$, ce nombre est noté $\binom{n}{p}$.

---

a. Justifier que C(x ; y) = $\binom{x+y-2}{x-1}$ et en déduire que pour $y \geq 2$, on a C(x ; y) = $\frac{x\times(x+1)\times\ldots\times(x+y-2)}{1\times 2\times\ldots\times(y-1)}$

b. Utiliser le résultat précédent pour calculer la valeur de C(10 ; 8) puis déterminer la proportion du nombre de chemins gagnants de la question **3)** par rapport à la valeur C(10 ; 8) (arrondir à 10^{-4} près).

c. Recopier puis compléter l'algorithme ci-dessous permettant de calculer la valeur de C(x ; y) où x et y sont deux entiers ≥ 2 précisés par l'utilisateur et où C contiendra la valeur de C(x ; y).

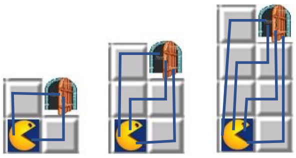
$N \leftarrow 1$
$D \leftarrow 1$
Pour k allant de 0 à $y-2$
| N ← N × (………)
| D ← D × (………)
C ← …

Correction :

1)

a. Une grille 1 x y étant constituée d'une seule colonne, donc un seul chemin (en ligne droite) d'où C(1 ; y) = 1.

b.



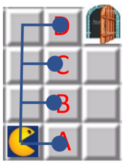
En traçant les différents chemins possibles on trouve facilement :

C(2 ; 2) = 2 C(2 ; 3) = 3 C(2 ; 4) = 4

Lorsqu'on ajoute une ligne, on a les chemins précédents (ceux passant par la case sous la porte) plus le chemin longeant toute la 1$^{\text{ère}}$ colonne donc le fait d'ajouter une ligne augmente le nombre de chemins de 1.

Autrement dit C(2 ; y + 1) = C(2 ; y) + 1 et comme C(2 ; 1) = 1, on déduit de proche en proche que C(2 ; y) = y.

c.



Les différents chemins peuvent se dénombrer en 4 cas : ceux passant par A, B, C, D (voir dessin)

puis rejoignant la porte, au nombre de C(2 ;4) ; C(2 ; 3) ; C(2 ;2) et C(2 ;1) respectivement.

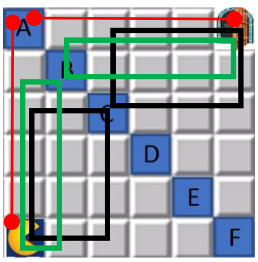
On déduit que C(3 ;4) = C(2 ;4) + C(2 ;3) + C(2 ;2) + C(2 ;1) = 4 + 3 + 2 + 1 = 10

En généralisant le raisonnement précédent on a : C(3 ; y) = C(2 ; y) + C(2 ; y-1) + … + C(2 ; 1)

Donc avec **c.** : C(3 ; y) = y + (y-1) + … + 1 = $\frac{y(y+1)}{2}$

d. La symétrie autour de la diagonale « personnage – porte » transforme un déplacement vers la droite en un déplacement vers le haut et inversement donc à tout chemin d'une grille x x y on peut associer un et un seul chemin solution d'une grille y x x et inversement, on en déduit donc que C(y ; x) = C(x ; y).

2.



Les chemins entre le personnage et la porte sont constitués exclusivement de ceux contenant A ; B ; C ; D ; E ou F (chacun contient une seule de ces cases)

Les chemins contenant A sont ceux reliant le personnage et A, au nombre de C(1 ; 6), suivi de ceux reliant A et la porte, au nombre de C(6 ; 1) donc on a :
C(1 ; 6) x C(6 ; 1) = C²(1 ;6) chemins contenant A. Même résultat pour la lettre F.

De même il y a C²(2;5) chemins contenant B ou E et C²(3;4) chemins contenant C ou D.

Donc au total : C(6 ;6) = 2 [C²(1 ;6) + C²(2 ;5) + C²(3 ;4)] donc C(6 ;6) = 2 [1² + 5² + 10²] = 2 x 126 = 252.

3.

a. Les chemins de la grille x x y se composent exclusivement de ceux issus de A, au nombre de C(x-1 ; y) et de ceux issus de B, au nombre de C(x ; y-1) d'où au total : C(x ; y) = C(x-1 ; y) + C(x ; y-1).

b.

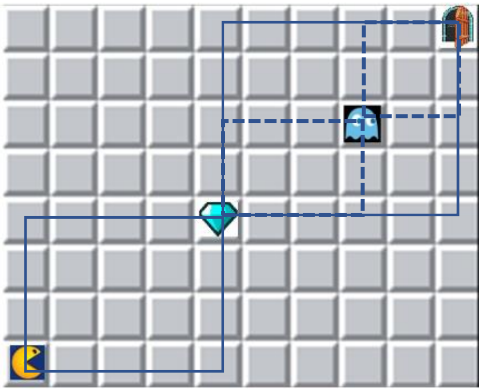
C(x-1 ;y)	C(x ;y)
	C(x ;y-1)

Cette relation permet de compléter de proche en proche les diagonales successives du tableau, on obtient

6	1	6	21	56	126	252
5	1	5	15	35	70	126
4	1	4	10	20	35	56
3	1	3	6	10	15	21
2	1	2	3	4	5	6
1	1	1	1	1	1	1
y \ x	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**

Remarque : on retrouve en dernière case le fait que C(6 ; 6) = 252

c.



Les chemins solutions passent d'abord par ceux entre le personnage et le diamant, au nombre de C(5 ; 4) = 35 (d'après le tableau précédent), associés à ceux entre le diamant et la porte, au nombre de C(6 ; 5) = 126 privés de ceux contenant le fantôme, au nombre de C(4 ; 3) x C(3 ; 3) = 10 x 6 = 60.

On en déduit le nombre de chemins solutions :

35 x (126 – 60) = 35 x 66 = 2310.

4 .

a. Un chemin relie le personnage et la porte si et seulement si il est constitué de (x-1) déplacements vers la droite associés à ($y-1$) déplacements vers le haut. Le problème revient donc à placer ($x-1$) lettres **D** parmi une liste le ($x-1$) + ($y-1$) = $x+y-2$ emplacements. D'après la propriété le nombre de chemins est donc :

C(x ; y) = $\binom{x+y-2}{x-1}$ donc en appliquant la formule $\binom{n}{p}$ avec n = $x+y-2$ et p = $x-1$ (donc n – p = $y-1$) on trouve : C(x ; y) = $\frac{x\times(x+1)\times\ldots\times(x+y-2)}{1\times2\times\ldots\times(y-1)}$

b. Par application de cette formule C(10 ; 8) = $\frac{10\times11\times\ \ldots\ \times16}{1\times2\times\ldots\times7}$ = 11440 d'où la proportion $\frac{2310}{11440} = 0{,}2019$ (soit 20,19%) : les chemins « gagnants » représentent environ 20,19 % des chemins reliant les cases de départ et d'arrivée dans la grille 10 x 8 (environ 1 chemin reliant des cases de départ et d'arrivée sur 5 est « gagnant »)

c.

$N \leftarrow 1$

$D \leftarrow 1$

k allant de 0 à $y-2$

N ← **N × (x + k)**

D ← **D × (k + 1)**

C ← **N/D**