SUJET + CORRIGÉ

OLYMPIADES DE MATHÉMATIQUES

ACADÉMIE DE LYON

Classes de première S • 2018

MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE, DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE

Olympiades académiques de mathématiques

Académie de Lyon

Mercredi 14 mars 2018

Série S

Les calculatrices sont autorisées, à l'exclusion de tout autre appareil électronique.

Il est conseillé aux candidats qui ne pourraient formuler une réponse complète à une question d'exposer le bilan des initiatives qu'ils ont pu prendre.

Exercices académiques

Cette sous-épreuve comporte deux exercices, à traiter dans le temps imparti.

Durée de la composition : 2 heures

Exercice académique n°1 : Les sauts de grenouilles

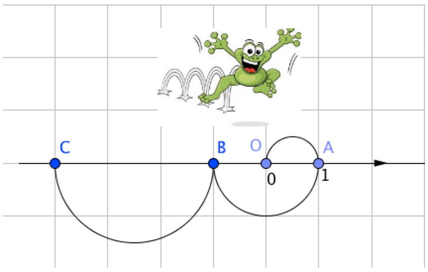
Partie A

Une grenouille se déplace sur un axe gradué. Elle part de l'origine O d'abscisse zéro puis effectue un certain nombre de sauts que l'on note N. À chaque saut, elle avance ou recule d'une unité, de façon équiprobable. On appelle abscisse finale, la position de la grenouille à l'issue des sauts consécutifs qu'elle a effectués.

1. Dans cette question, la grenouille effectue quatre sauts consécutifs, on a donc N=4.
   a. Quel est l'ensemble des abscisses finales possibles ?
   b. Quelle est la probabilité que l'abscisse finale soit égale à 0, c'est-à-dire que la grenouille revienne à sa position initiale ?
   c. Calculer la probabilité de chaque abscisse finale possible.
2. Quel est l'ensemble des abscisses finales possibles lorsque N est égal à 5.
3. Dans cette question, on considère que la grenouille effectue N sauts. Pour quelles valeurs de N, la grenouille peut-elle revenir à l'origine après les N sauts, ce qui signifie que l'abscisse finale vaut zéro ?

Partie B

Dans cette partie, la grenouille part de l'origine puis effectue N sauts dans un sens ou dans l'autre sur un axe gradué. De plus, on suppose que la longueur augmente d'une unité à chaque saut.
Le premier saut est de longueur 1, le deuxième saut est de longueur 2 etc…



Ci-contre un exemple pour N=3.
La grenouille part de l'origine d'abscisse zéro. Après un premier saut, elle se trouve en A, après le deuxième saut elle est en B, puis à la fin de son troisième saut elle s'arrête en C.

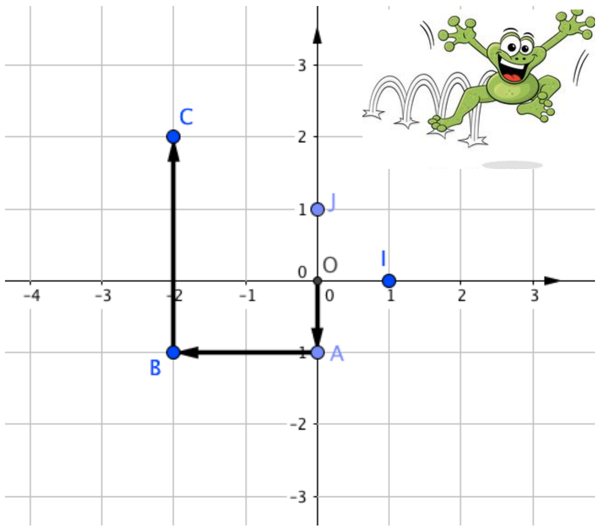
1. Après deux, trois ou quatre sauts, la grenouille peut-elle revenir à l'origine, c'est-à-dire l'abscisse finale peut-elle valoir zéro ?
2. Même question dans le cas où la grenouille effectue cinq sauts.

3. Montrer que si la somme des longueurs des sauts est un nombre impair alors l'abscisse finale ne peut pas être égale à zéro.
4.
   a. Montrer que la somme des longueurs des sauts est paire si et seulement si N est divisible par 4 ou N+1 est divisible par 4.
   b. Montrer que si N ou N+1 est divisible par 4, la grenouille peut revenir à l'origine après N sauts.

Partie C

Une grenouille se déplace par sauts dans le plan muni d'un repère orthonormal (O ; I, J) selon les règles suivantes :

- Elle part du point O et n'occupe que des points à coordonnées entières (nœuds du quadrillage).
- Les sauts s'effectuent alternativement dans la direction de chacun des axes (OI) et (OJ) en commençant par l'une ou l'autre des deux directions.
- À chaque saut la longueur augmente d'une unité.



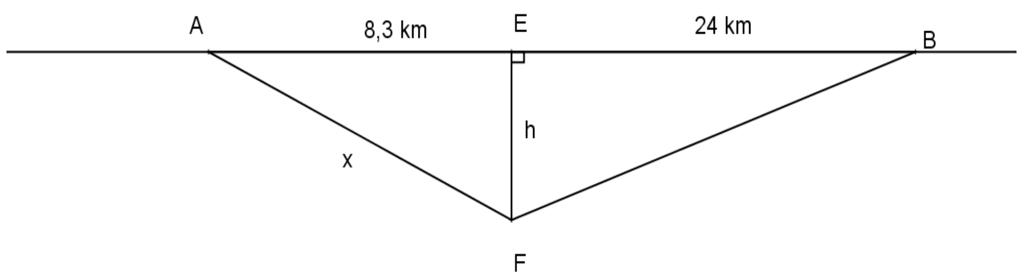
1. On suppose qu'à l'issue du troisième saut, la grenouille est en C après avoir occupé les positions A et B comme indiqué sur la figure ci-dessus.
Donner les coordonnées des points qu'elle est susceptible d'atteindre à l'issue du quatrième saut.
2. Prouver que la grenouille ne peut jamais atteindre un point dont les coordonnées sont toutes deux des nombres impairs.
3. La grenouille part du point O. Déterminer un chemin de sept sauts consécutifs qui la ramène au point O.
4. Montrer que si N ou N+1 est divisible par 8, alors il existe un chemin de N sauts consécutifs qui ramène la grenouille au point O.

5. On suppose que ni N, ni N+1 ne sont divisibles par 8. Montrer que la grenouille ne peut pas retourner au point O après N sauts.

Exercice académique n°2 : Le séisme

Partie A : Déterminer la profondeur du foyer d'un séisme

Un séisme est observé dans une station A située à 8,3 km de l'épicentre E, puis 2 secondes plus tard dans une station B située à 24 km de l'épicentre.
Les ondes enregistrées partent du foyer F et se propagent en ligne droite dans toutes les directions à une vitesse de 6,5 km.s^{-1}.
On note x la distance AF entre la première station et le foyer du séisme, et h la profondeur du foyer F du séisme, exprimées en km.
On suppose que (EF) et (AB) sont perpendiculaires et que A, E et B sont alignés.



1. Montrer que la distance FB, exprimée en km, entre la deuxième station et le foyer du séisme est égale à $x + 13$.
2.
   a. Montrer que $h = \sqrt{x^2 - 68{,}89}$
   b. Montrer que $h = \sqrt{(x+13)^2 - 576}$
   c. En déduire les valeurs de x et h.

Partie B : Localiser un séisme

Un séisme a été enregistré le 3 janvier 2018 aux stations de Montbéliard, Valdahon et Baume-les-Dames. Ces trois stations ont enregistré deux ondes différentes :

- Les ondes P qui ont une vitesse moyenne de $6{,}5$ km.s^{-1},
- Les ondes S qui ont une vitesse moyenne de 4 km.s^{-1}.

Ces deux ondes ont été produites au même moment au foyer du séisme.
Le tableau ci-dessous récapitule les heures de réception de ces deux ondes dans les stations.

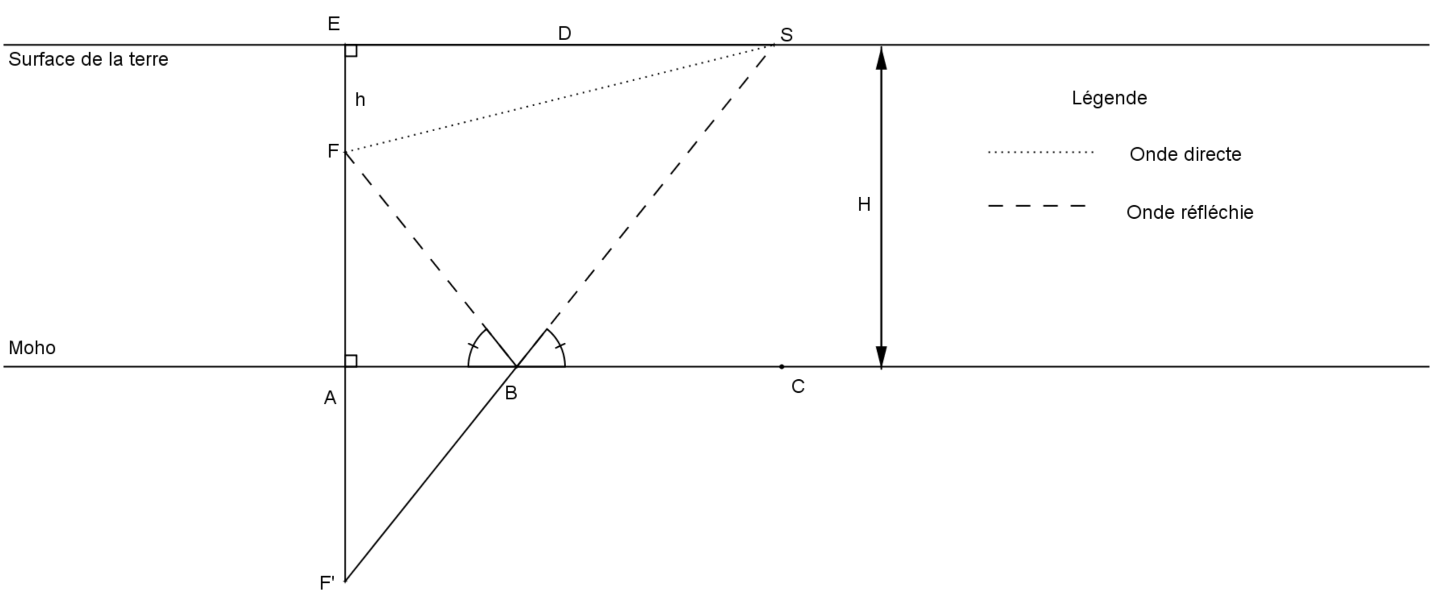
Ville	Ondes P	Ondes S
Montbéliard	2 h 45 min 30,277 s	2 h 45 min 34,200 s
Valdahon	2 h 45 min 27,806 s	2 h 45 min 30,185 s
Baume-les-Dames	2 h 45 min 27,000 s	2 h 45 min 28,875 s

Les points M, V, B et F désigneront dans cette partie les positions respectives de Montbéliard, de Valdahon, de Baume-les-Dames et du foyer du séisme.
Avec ces notations, on sait que : $VM = 60$ km, $BM = 48$ km, $VB = 36$ km.

1.
   a. Déterminer l'heure du séisme (à 10^{-3} seconde près).
   b. Déterminer les distances entre le foyer du séisme et chacune de ces villes (à 10^{-2} km près).
2.
   a. Dessiner le triangle VMB. 1 cm représentera 12 km.
   b. Déterminer l'aire du triangle VMB.
3. Connaisant les longueurs des arêtes du tétraèdre VMBF, on peut montrer que son volume est 2016 km^3. En déduire la profondeur du séisme, c'est-à-dire la hauteur du tétraèdre.
4. En déduire la distance entre l'épicentre du séisme et chacune des villes.
5. Placer l'épicentre E du séisme sur la figure de la question 2.a.

Partie C : Déterminer l'épaisseur de la croûte continentale

Pour déterminer l'épaisseur de la croûte continentale, nous allons utiliser le fait que les ondes sismiques se réfléchissent sur le Moho (la limite inférieure de la croûte continentale).
Dans la figure ci-dessous, le foyer du séisme F émet des ondes dans toutes les directions. La station située en S reçoit des ondes directes, qui se sont déplacées en ligne droite et les ondes qui se sont réfléchies en B.



On note E l'épicentre du séisme, $h = EF$ la profondeur du foyer, $D = ES$ la distance entre la station et l'épicentre, B le point de réflexion de l'onde sismique, A l'intersection entre le Moho et la droite (EF) et C un point de $[AB)$ qui n'est pas sur $[AB]$. On note également F' le symétrique de F par rapport à A.

On admet que les droites (EF) et (ES) d'une part et (EF) et (AB) d'autre part sont perpendiculaires. On admet également que les angles $\widehat{ABF}$ et $\widehat{CBS}$ sont de même mesure et que l'onde se déplace à une vitesse v constante.

On note $H = EA$ la hauteur de la croûte continentale.

La station S a enregistré un séisme dont l'épicentre est situé à une distance $D = 25$ km de la station. Le foyer du séisme est situé à une profondeur $h = 10$ km sous l'épicentre et la station a enregistré les ondes directes 4,46 secondes avant les ondes réfléchies.

On sait que les ondes se propagent à une vitesse de 6,5 km.s^{-1}.

Déterminer la hauteur H de la croûte continentale.

Olympiades académiques de mathématiques

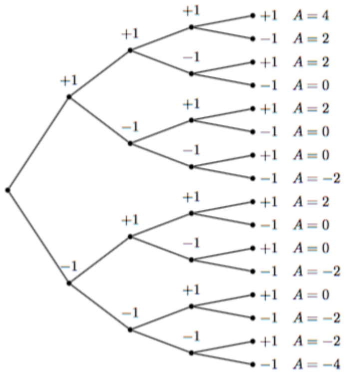
Académie de Lyon

Série S

Correction

Partie A

1-a) Représentons la situation dans un arbre à quatre étages. A chaque nœud, on indique l'abscisse de la grenouille et deux branche en part, celle vers le haut signifie que la grenouille avance d'une unité, et celle vers le bas qu'elle recule.



On y remarque que l'ensemble des abscisses finales est $\{\mathbf{-4};\ \mathbf{-2}; \mathbf{0}; \mathbf{2}; \mathbf{4}\}$**.**

1-b) En utilisant l'arbre de la question précédente, il y a 6 chemins dans l'arbre qui aboutissent à l'abscisse finale 0. Comme nous sommes dans une situation d'équiprobabilité, chacune des 16 feuilles de l'arbre a une probabilité de $\frac{1}{16}$.
Ainsi, la probabilité que la grenouille termine à l'abscisse finale 0 est de $\frac{\mathbf{6}}{\mathbf{16}}$ **ou** $\frac{\mathbf{3}}{\mathbf{8}}$ **ou 0,375**

1-c) En notant X la variable aléatoire correspondant à l'abscisse finale, en appliquant la méthode de la question précédente, on établie la loi de X :

k	-4	-2	0	2	4
$P(X=k)$	$\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{16}}$	$\frac{\mathbf{4}}{\mathbf{16}}$	$\frac{\mathbf{6}}{\mathbf{16}}$	$\frac{\mathbf{4}}{\mathbf{16}}$	$\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{16}}$

2) On connait l'ensemble des abscisses finales lorsque $N = 4$.
- si la grenouille avance d'une unité, l'ensemble de ses abscisses finales devient $\{-3;\ -1; 1; 3; 5\}$,
- si la grenouille recule d'une unité, l'ensemble de ses abscisses finales devient $\{-5;\ -3;\ -1; 1; 3\}$,
- on peut donc conclure que si $\boldsymbol{N} = \mathbf{5}$ **l'ensemble des abscisses finales est** $\{\mathbf{-5};\ \mathbf{-3};\ \mathbf{-1}; \mathbf{1}; \mathbf{3}; \mathbf{5}\}$**.**

3) Notons p le nombre de sauts vers l'avant que fait la grenouille et q le nombre de sauts vers l'arrière. On sait que $N = p + q$.
L'abscisse finale vaut $p - q$.
Donc N et l'abscisse finale ont la même parité, on peut conclure que si N est impaire, l'abscisse finale ne peut pas valoir 0.
Inversement, si N est paire, notons $N = 2k$. Dans ce cas, si la grenouille saute k fois en avant puis k fois en arrière, elle a bien sauté N fois et termine en 0. Donc si N est pair, l'abscisse finale peut valoir 0.
Conclusion : **L'abscisse finale peut valoir 0 si et seulement si $\boldsymbol{N}$ est pair.**

Partie B

1) – **N=2** : Si les deux sauts vont dans le même sens, l'abscisse finale ne sera pas 0. Sinon, l'abscisse finale sera soit -1 (premier saut en avant, deuxième en arrière), soit 1 (l'inverse). Dans aucun cas **l'abscisse finale ne vaut 0.**
– **N=3** : 2 sauts vers l'avant puis deux vers l'arrière **permettent de revenir en 0**.
– **N=4** : Un saut en arrière puis deux en avant et un autre en arrière **permet de revenir en 0.**

2) Après cinq sauts **la grenouille ne peut pas revenir à l'origine** ; elle peut se trouver à l'une des abscisses suivantes :-15 ;-13 ;-11 ;-9 ;-7 ;-5 ;-3 ;-1 ;1 ;3 ;5 ;7 ;9 ;11 ;13 ;15.
La somme de la longueur des sauts est de 15

On remarque que la question revient à découper l'ensemble $\{1; 2;\ 3;\ 4;\ 5\}$ en deux ensembles dont la somme des termes est égale (le premier sera les sauts vers l'avant, le deuxième les sauts vers l'arrière).
Or, $1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15$ est impair, si l'on sépare cet ensemble en deux de sommes respectives S_1 et S_2, On sait que $S_1 +\ S_2 = N$, donc S_1 et S_2 ne peuvent pas avoir la même parité, ils ne peuvent par conséquent pas être égaux.

3) Cette question revient à généraliser le raisonnement de la question précédente pour N quelconque. Si $S_1 +\ S_2 = N$ est impair, S_1 et S_2 ne peuvent pas avoir la même parité, ils ne peuvent par conséquent pas être égaux.

4-a) Soit N le nombre de sauts effectués.

Considérons que la somme de la longueur des sauts est paire :

1+2+3+4+ ……….+N=2k avec k un nombre entier naturel

d'où $\frac{N(N+1)}{2} = 2k\ d'où\ \frac{N(N+1)}{4} = k$ par suite 4 divise N ou 4 divise N+1

Réciproquement, si 4 divise N ou 4 divise N+1, on a $\frac{N(N+1)}{4} = k$ avec k un nombre entier naturel . par suite $\frac{N(N+1)}{2} = 2k$

4-b) Si $1 + 2 + \cdots + N = 2k$ est un nombre pair, montrons qu'il existe un découpage de $\{1; 2; \dots; N\}$ en deux sous ensembles de somme k.
On introduit la suite de premier terme $u_1 = N$ et vérifiant $u_{n+1} = u_n + (N - n)$. La suite (u_n) est croissante pour n allant de 1 à N, $u_1 = N\ < k$ et $u_N = N +\ (N-1) + \cdots + 1 = 2k > k$. Donc il existe un entier *p* tel que $u_p < k \leq u_{p+1}$.

Donc $N +\ \ (N-1) + \cdots + (N-p) < k \leq N + (N-1) + \cdots + (N-p) + (N-(p+1))$.
Donc il existe un entier *a* compris entre 1 et (N – (p+1)) tel que $k =\ N + (N-1) + \cdots + (N-p) + a$. Donc en découpant $\{1; 2; \dots; N\}$ en $E_1 = \{N; N-1; \dots; N-p; a\}$ et E_2 son complémentaire dans $\{1; 2; \dots; N\}$, la somme des éléments de E_1 vaut *k* et celle des éléments de E_2 vaut $1 + 2 + \cdots +$

$N - k = 2k - k = k.$
Conclusion : si la somme des *N* premiers entiers est paire, la grenouille peut retourner en *0* en *N* sauts.
NB : on aurait pu montrer cela par une récurrence forte sur N.

Partie C

1) Les points que la grenouille peut atteindre sont **(2 ;2) et (-6 ;2).**

2) Considérons que le premier saut se fait le long de l'axe des abscisses, ce qui, à une symétrie près, permet de traiter tout le problème.
Dans ce cas, les sauts le long de l'axe des ordonnées auront pour longueur 2 ; 4 ; 6 ; 8 ; … **les ordonnées des positions de la grenouille seront donc toujours des nombres pairs**. Les deux coordonnées ne peuvent donc jamais être impaires en même temps.

3) DESSIN

4) Les sauts de longueur 1, 3, 5, 7, 9, ... s'additionnent dans la direction de l'un des deux axes, et les sauts de longueur 2, 4, 6, 8, ...s'additionnent dans la direction de l'autre axe. Il s'agit donc d'obtenir 0 à la fois pour les nombres impairs et pour les nombres pairs.

Si N est divisible par 8, alors pour les nombres impairs **jusqu'à N-1** on a par exemple:

1-3-5+7 = 0,
1-3-5+7 + 9-11-13+15 = 0,
1-3-5+7 + 9-11-13+15 + 17-19-21+23 = 0,
etc.

En effet, pour quatre nombres supplémentaires, on peut toujours additionner la première et la dernière et soustraire les deux au milieu : cela donne bien 0.

De même**, si N est divisible par 8**, alors pour les nombres pairs **jusqu'à N** on a par exemple:

2-4-6+8 = 0,
2-4-6+8 + 10-12-14+16 = 0,
2-4-6+8 + 10-12-14+16 + 18-20-22+24 = 0,
etc.

Si N est divisible par 8, la grenouille peut donc réussir à la fois ses sauts impairs (jusqu'à N-1) et ses sauts pairs (jusqu'à N) pour arriver à 0.

Enfin, **si N+1 est divisible par 8,** alors ça marche bien pour les sauts impairs jusqu'à N (déjà vu), mais aussi pour les sauts pairs jusqu'à N-1 :

2+4-6 = 0,
2+4-6 + 8-10-12+14 = 0,
2+4-6 + 8-10-12+14 + 16-18-20+22 = 0,
etc.

En conclusion, si N ou N+1 est divisible par 8, il existe bien un chemin de N sauts consécutifs qui ramène la grenouille au point O.

5) La grenouille peut obtenir 0 avec des sauts pairs 2, 4, 6, 8, ..., 2k si et seulement si elle peut obtenir 0 avec des sauts 1, 2, 3, 4, ..., k.

Nous avons déjà vu (partie B) que cela est possible si et seulement si 4 divise k ou k+1, c'est-à-dire
si et seulement si 8 divise 2k ou 2k+2.
Autrement dit, si le plus grand saut pair de la grenouille est p, alors 8 doit diviser p ou p+2.

De plus, si le plus grand saut impair de la grenouille est i, alors 4 doit diviser i+1, car la grenouille doit faire un nombre pair de sauts impairs pour arriver à 0.

Pour que ces deux restrictions soit satisfaites simultanément, il faut bien que 8 divise N ou N+1,
si la grenouille retourne au point O après N sauts.

Séismes

A. Déterminer la profondeur du foyer d'un séisme

1	$FB = x + v \times 2 = x + 13$	2 points
2 a	Théorème de Pythagore	1 point
2 b	Théorème de Pythagore	1 point
2 c	$x = \dfrac{338.11}{26} = 13.00$ et $h = 10.01$	3 points

B. Localiser un séisme

1 a	2h 45 min 24,000s	3 points
1 b	$FB = 19,50; FM = 40,80; FV = 27,74$	3×1 point
2 a	Dessin	1 point
2 b	864 km^2	2 points
3	7 km	2 points
4	$EB = 18,20; EM = 40,20; EV = 23,73$	3 points
5	Dessin	2 points

C. Déterminer l'épaisseur de la croûte continentale

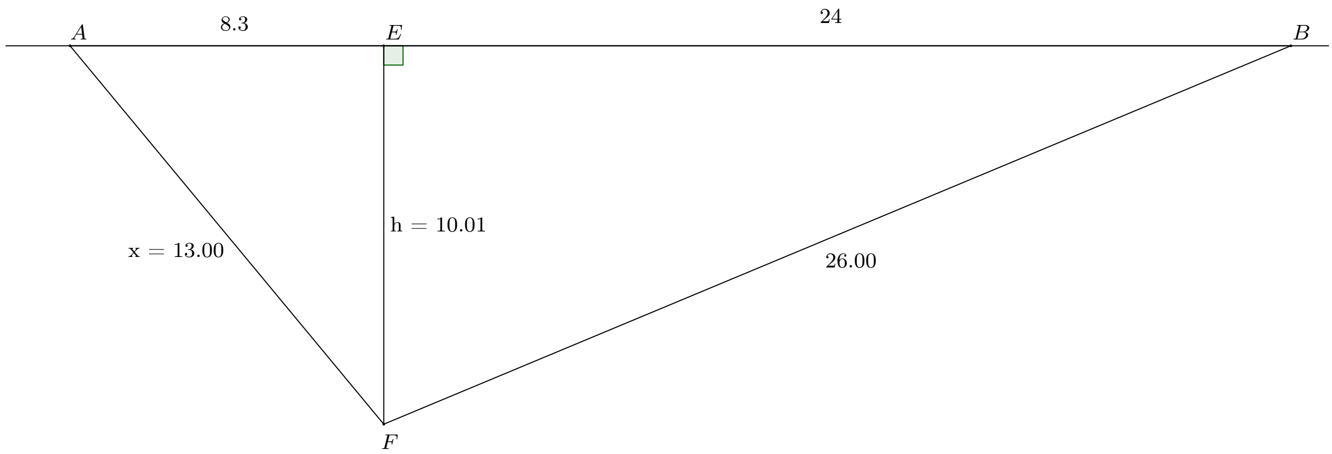
C	H = 30 cm	7 points

Correction

A. Déterminer la profondeur du foyer d'un séisme

1. Notons t_1 et t_2 les temps mis par l'onde pour parcourir les distances FA et FB.
   Selon l'énoncé, $t_2 = t_1 + 2$
   Or, $FA = t_1 \times 6,5$ et $FB = t_2 \times 6,5$,
   Donc $FB = (t_1 + 2) \times 6,5 = t_1 \times 6,5 + 13 = FA + 13 = x + 13$.

2. (a) On utilise le théorème de Pythagore dans le triangle AEF rectangle en E :
   $8,3^2 + h^2 = x^2$ soit $h = \sqrt{x^2 - 68,89}$.
   (b) On utilise le théorème de Pythagore dans le triangle BEF rectangle en E :
   $24^2 + h^2 = (x + 13)^2$ soit $h = \sqrt{(x + 13)^2 - 576}$.
   (c) On en déduit que :
$$\begin{aligned}\sqrt{x^2 - 68,89} &= \sqrt{(x + 13)^2 - 576}\\ x^2 - 68,89 &= x^2 + 26x + 169 - 576\\ 26x &= 576 - 169 - 68,89\\ x &= 13,00\end{aligned}$$
   Ainsi, $h = \sqrt{x^2 - 68,89} = 10,01$



B. Localiser un séisme

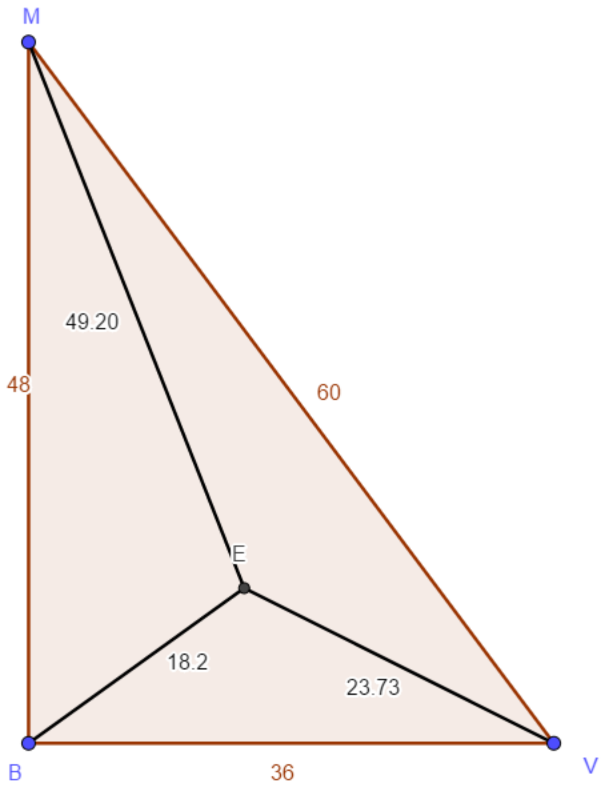
1. (a) On pose t le temps mis par l'onde P pour parcourir la distance FB en secondes.
   On sait que les ondes S parcourent la distance FB en un temps $t + 1,875$ secondes.
   Ainsi, $6,5t = 4(t + 1,875)$ t donc $t = 3,000$ secondes.
   Le séisme a commencé 3 secondes avant d'être enregistré à Baume-les-Dames soit à 2h 45min 24s.
   (b) Les ondes P ont parcourues les distances BF, VF et MF en $3, 3,806$ et $6,277$ secondes.
   Donc $BF = 3 \times 6,5 = 19,50; VF = 24,74$ et $MF = 40,80$.

2. (a) En fin de partie B.
   (b) Ce triangle semble rectangle. On le vérifie car $60^2 = 48^2 + 36^2$. Son aire est donc $\frac{36*48}{2} = 864$ km^2.

3. $h = \frac{3\times2016}{864} = 7$ km.

4. En appliquant le théorème de Pyhtagore, on trouve : $EB = 18,20; EM = 40,20; EV = 23,73$

5. En fin de partie B.



C. Déterminer l'épaisseur de la croûte continentale

- $t_1 = \frac{\sqrt{h^2+D^2}}{v}$ est le temps mis par l'onde directe entre F et B.
- $t_2 = \frac{\sqrt{(2H-h)^2+D^2}}{v}$ est le temps mis par l'onde réfléchie pour aller de F à B.
- $t_2 - t_1 = \frac{\sqrt{(2H-h)^2+D^2}-\sqrt{h^2+D^2}}{v}$
- $H = \frac{\sqrt{(v(t_2-t_1)+\sqrt{h^2+D^2})^2-D^2}+h}{2}$
- $H = 30\text{km}$