SUJET + CORRIGÉ

OLYMPIADES DE MATHÉMATIQUES

ACADÉMIE DE LYON

Classes de première S • 2017

Olympiades académiques de mathématiques

Académie de Lyon

Mercredi 15 mars 2017

Série S

Les calculatrices sont autorisées, à l'exclusion de tout autre appareil électronique.

Il est conseillé aux candidats qui ne pourraient formuler une réponse complète à une question d'exposer le bilan des initiatives qu'ils ont pu prendre.

Exercices académiques

Cette sous-épreuve comporte deux exercices, à traiter dans le temps imparti.

Durée de la composition : 2 heures

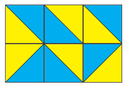
Exercice académique n°1 à traiter par tous les candidats

Étude de pavages de Truchet

On considère des carreaux identiques, colorés en bleu et en jaune de part et d'autre d'une diagonale. Ces carreaux étant utilisables dans tous les sens, on désigne par les lettres A, B, C, D les quatre positions ci-contre :

A B C D

En disposant ces carreaux suivant p lignes et q colonnes, on forme des ensembles appelés **"Pavages de Truchet p x q"**.



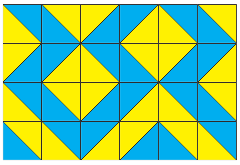
Exemple de pavage de Truchet 2 x 3

La partie 1 est indépendante des parties 2 et 3

PARTIE 1 : Dénombrement des pavages de Truchet

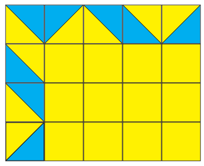
1) Montrer qu'il existe exactement 4096 pavages de Truchet 2 x 3.
2) Exprimer le nombre de pavages de Truchet p x q en fonction de p et q.

PARTIE 2 : Construction et dénombrement des pavages linéaires



Exemple de pavage linéaire 4 x 6

Un **"Pavage linéaire"** est un pavage de Truchet dans lequel, d'un carreau au suivant, les deux triangles situés côte-à-côte sont de la même couleur (voir exemple ci-contre).



1) Recopier la figure ci-contre puis colorer la grille pour obtenir un pavage linéaire 4 x 5.

2) On considère un pavage linéaire p x q dont on connaît la $1^{ère}$ ligne et la $1^{ère}$ colonne. On souhaite créer un algorithme qui, à partir de la $1^{ère}$ ligne L(1),…, L(q), et en indiquant la $1^{ère}$ case G(1) de la ligne suivante, permette d'afficher la composition complète du pavage linéaire p x q, ligne après ligne.

L(1)	…	L(i)	L(i + 1)	…	L(q)
G(1)	…	G(i)	L(i + 1)	…	G(q)
…					

Dans l'algorithme en annexe, quatre lignes comportent des pointillés. Les recopier et les compléter en précisant les lettres manquantes.

3) Montrer que le nombre de pavages linéaires p x q est égal à 2^{p+q}.

PARTIE 3 : Composition des pavages linéaires

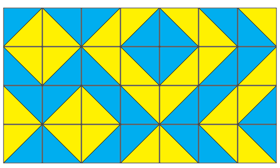
On code l'orientation des diagonales des carreaux A, B, C, D avec les chiffres "0" et "1" comme ci-dessous :

Carreaux :

Noms :	A	B	C	D
Codage de diagonale :	1	1	0	0

A chaque pavage linéaire on associe alors un tableau, appelé tableau linéaire, contenant les chiffres 0 et 1.

Par exemple le pavage linéaire



a pour tableau linéaire

1	0	1	1	0	0	0
0	1	0	0	1	1	1
0	1	0	0	1	1	1
1	0	1	1	0	0	0

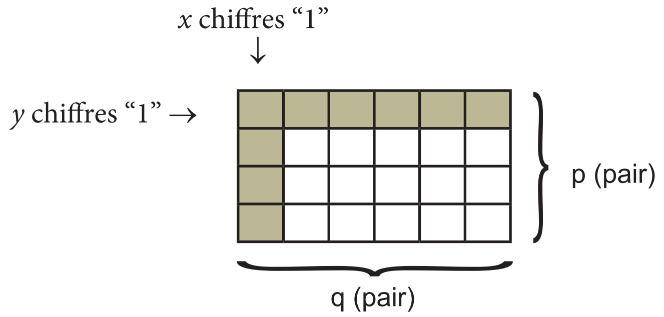
1) *a*) En utilisant le 3) de la Partie 2, justifier qu'il existe exactement huit tableaux linéaires 2 x 2.
b) Identifier ces huit tableaux linéaires dans l'exemple donné ci-dessus, et les représenter sur votre copie.
c) Montrer que les deux lignes d'un tableau linéaire 2 x q sont soit identiques, soit complémentaires (c'est-à-dire que chaque colonne du tableau est composée de deux chiffres distincts).

2) *a*) Justifier que dans un pavage linéaire, deux carreaux identiques ne peuvent être placés côte-à-côte.

_b_) Pour chacun des tableaux linéaires 2 x 2 obtenus au 1) *b*), préciser le nombre de carreaux A, B, C, D composant les pavages linéaires 2 x 2 correspondants.

_c_) On considère un pavage linéaire p x q , avec p et q pairs, dont le tableau linéaire contient x chiffres “1” dans la 1ère colonne et y chiffres “1” dans la 1ère ligne.

<u>*Illustration :*</u>



Préciser, en fonction de x ; y ; p ; q , le nombre de carreaux A, B, C, D du pavage linéaire dans les deux cas où :

_i_) La première case (en 1ère ligne et 1ère colonne) contient le chiffre “1”,

_ii_) La première case (en 1ère ligne et 1ère colonne) contient le chiffre “0”.

<u>Annexe</u> (Partie 2, Question 2)

<u>Début de l’algorithme :</u>

```
Variables :     L, G (tableaux pouvant contenir les lettres A, B, C, D)
                i, j, p, q : variables entières

Saisir les valeurs de p et de q ( entiers ≥ 2 )

Pour i allant de 1 à q : Saisir la lettre L(i) ; Afficher L(i)

Pour j allant de 2 à p
   Début
      Saisir la 1ère lettre G(1) de la ligne suivante
      Pour i allant de 1 à q-1
         Début
            Si G(i) = A ou C   ET   L(i+1) = A ou D   alors   Mettre la lettre …… dans G(i+1)
            Si G(i) = A ou C   ET   L(i+1) = B ou C   alors   Mettre la lettre …… dans G(i+1)
            Si G(i) = B ou D   ET   L(i+1) = A ou D   alors   Mettre la lettre …… dans G(i+1)
            Si G(i) = B ou D   ET   L(i+1) = B ou C   alors   Mettre la lettre …… dans G(i+1)
         Fin
      Pour i allant de 1 à q : Afficher G(i)
      Pour i allant de 1 à q : Mettre la lettre G(i) dans L(i)
   Fin
```

<u>Fin de l’algorithme</u>

Exercice académique numéro 2 à traiter par tous les candidats

Palindromes Binaires

PARTIE 1

Tout nombre entier naturel s'écrit de manière unique comme somme de puissances de 2.
Exemple

$$53 = 2^5 + 2^4 + 2^2 + 2^0$$
$$53 = 1 \text{ x } 2^5 + 1 \text{ x } 2^4 + 0 \text{ x } 2^3 + 1 \text{ x } 2^2 + 0 \text{ x } 2^1 + 1 \text{ x } 2^0$$

On dit que le nombre 53 s'écrit 110101 dans le système binaire (base 2) et on écrira :

$$53 = (110101)_2$$

1) Ecrire dans le système binaire le nombre 135.
2) Déterminer à quel nombre correspond $(101011)_2$.

3) Démontrer que $2^n - 1 = (\underbrace{1111\ldots\ldots1}_{n \text{ fois}})_2$

PARTIE 2

$$17 = (10001)_2$$
$$165 = (10100101)_2$$

Un nombre palindrome se lit indifféremment de gauche à droite et de droite à gauche. Ce nombre ne commence jamais par zéro.

On dit que l'an 17 est une « année palindrome binaire » tout comme l'année 165 car les écritures binaires de ces deux nombres sont des palindromes.
L'année 19 n'est pas une « année palindrome binaire » car $19 = (10011)_2$.

Partie A
1) Donner en écriture binaire toutes les « années palindromes binaires » comprises entre l'an 1 et l'an 129
2) L'année 2017 est-elle une « année palindrome binaire » ?
3) Trouver la prochaine « année palindrome binaire ».

Partie B
On s'intéresse à l'écriture binaire des nombres entiers naturels.
1) Combien y a-t-il de palindromes binaires à 3 ; 4 ; 5 ; 6 et 7 chiffres en écriture binaire ?
2) Soit n un entier naturel non nul :
Déterminer P (n) le nombre de palindromes binaires à n chiffres dans chacun des deux cas suivants :
(on donnera une expression de P (n) en fonction de n)

a) dans le cas où n est pair.
b) dans le cas où n est impair.

Partie C
On cherche le nombre $F(2^n)$ de palindromes binaires strictement inférieurs au nombre 2^n avec n un entier naturel non nul.
1) Déterminer $F(2^5)$ et $F(2^6)$
2) Montrer que le nombre de palindromes binaires strictement inférieurs à 2^n est :

a) $F(2^n) = 2^{\frac{n+2}{2}} - 2$ si n est pair.
b) $F(2^n) = 3 \text{ x } 2^{\frac{n-1}{2}} - 2$ si n est impair.

3) Soit x un nombre entier naturel quelconque strictement supérieur à 5.
On note $F(x)$ le nombre de palindromes binaires strictement inférieurs à x.
On appelle n le nombre entier tel que $2^n \leq x < 2^{n+1}$

a) Justifier que $F(2^n) \leq F(x) < F(2^{n+1})$
b) Montrer que $\sqrt{x} < F(x) < 3\sqrt{x}$

Olympiades académiques de mathématiques

Académie de Lyon

Série S

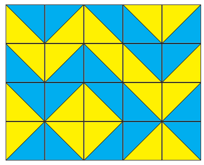
Correction

Pavages de Truchet, proposition de correction :

PARTIE 1 : Dénombrement des pavages de Truchet

1) Pour chacune des 6 cases, on a 4 positions A, B, C, D possibles d'où 4x4x4x4x4x4 = 4096 pavages de Truchet 2 x 3.

2) De façon générale, le nombre de pavages de Truchet p x q est égal à : $4^{nb\ cases} = 4^{pq}$.



PARTIE 2 : Construction et dénombrement des pavages linéaires

1) En respectant la règle de coloration des pavages linéaires, on obtient le pavage ci-contre :

2) En suivant la logique de construction du 1), on complète l'algorithme de la façon suivante :

Si	G(i) = A ou C	ET	L(i+1) A ou D	alors	Mettre la lettre B dans G(i+1)
Si	G(i) = A ou C	ET	L(i+1) B ou C	alors	Mettre la lettre D dans G(i+1)
Si	G(i) = B ou D	ET	L(i+1) A ou D	alors	Mettre la lettre C dans G(i+1)
Si	G(i) = B ou D	ET	L(i+1) B ou C	alors	Mettre la lettre A dans G(i+1)

3) D'après 2), un pavage linéaire est défini de façon unique par sa 1ère ligne (L(1)… L(q)) et sa 1ère colonne (les G(1) successifs), il faut donc dénombrer les 1ères lignes et les 1ères colonnes que l'on peut former dans un pavage linéaire. Le 1er carreau (1ère ligne et 1ère colonne) fixe l'alternance de couleurs des côtés de la 1ère ligne, de sorte que pour chaque case de cette ligne on a à chaque fois 2 possibilités d'orientation de carreaux (A ou C ; B ou D). Il en est de même pour la 1ère colonne (avec A ou D ; B ou C).
Pour un 1er carreau donné, il y a donc 2^{q-1} façons de compléter la 1ère ligne et 2^{p-1} façons de compléter la 1ère colonne. Enfin comme il y a 4 façons de placer le 1er carreau, il y a donc :
$4 \times 2^{q-1} \times 2^{p-1} = 2^2 \times 2^{q-1} \times 2^{p-1} = 2^{p+q}$ pavages linéaires p x q.

PARTIE 3 : Composition des pavages linéaires

1) ***a*** **)** Un tableau linéaire code uniquement l'orientation des diagonales, indépendamment des couleurs (codage d'un pavage "incolore" en quelque sorte), or le choix d'une des deux couleurs pour l'un des triangles du pavage entraîne, par adjacences successives, les couleurs de tous les autres : il y a donc exactement 2 pavages linéaires associés à un même tableau linéaire, or avec 3) de la Partie 2, il y a $2^{2+2} = 16$ pavages linéaires 2 x 2 et donc 16/2 = 8 tableaux linéaires 2 x 2.

b **)** On peut identifier ces huit tableaux dans l'exemple donné dans l'énoncé :

1	1
1	1

0	0
0	0

0	0
1	1

1	0
1	0

1	1
0	0

0	1
0	1

0	1
1	0

1	0
0	1

c **)** Grâce aux tableaux 2 x 2, il apparaît que :

- Si les codes de la 1ère colonne sont identiques, il en est de même pour la colonne suivante, et ainsi de suite, colonne par colonne sur toute la longueur des deux lignes : les deux lignes sont alors identiques.
- Si les codes de la 1ère colonne sont distincts, il en est de même pour la colonne suivante, et ainsi de suite colonne par colonne sur toute la longueur des deux lignes : les deux lignes sont alors complémentaires.

2) ***a*** **)** Les triangles d'un même carreau ayant deux couleurs distinctes (à gauche et à droite, en bas et en haut), ils ne peuvent être placés côte-à-côte (ni en ligne, ni en colonne) pour respecter la règle de coloration linéaire.

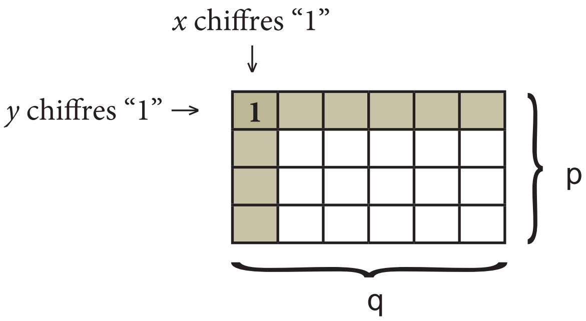
b **)** Avec ***a***), si deux carreaux adjacents ont le même code alors ils sont distincts : il s'agit donc des deux carreaux partageant ce code.

On déduit que le 1er tableau a pour composition 2A + 2B, le 2ème a pour composition 2C + 2D, et que les 4 suivants ont pour composition 1A+ 1B+ 1C + 1D.
Enfin si deux carreaux adjacents ont des codes distincts alors, par ligne : A est adjacent à D et B est adjacent à C, et par colonne : A est adjacent à C et B est adjacent à D.
On déduit que les deux derniers tableaux ont aussi pour composition 1A + 1B+ 1C + 1D.

***c*)** p et q étant pairs, on peut partitionner le tableau linéaire p x q par des tableaux linéaires 2 x 2. Or d'après b), il y a dans ces tableaux autant de A que de B (codés "1") et de C que de D (codés "0"), donc pour trouver la composition en A, B (respectivement en C, D) il suffit de dénombrer les "1" (respectivement les "0" : à compléter avec p x q) et de diviser par 2.

D'après 1) c), les lignes commençant par le même code sont identiques (sinon elles sont complémentaires) ainsi :

- Cas d'une 1ère case codée "1" :



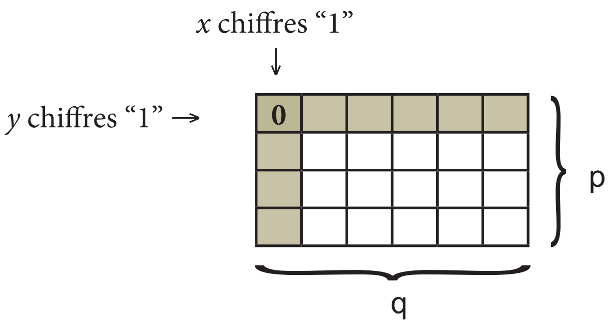
Le tableau est composé de : x lignes de 1ère case "1" contenant y codes "1"
et, par complémentarité : (p – x) lignes de 1ère case "0" contenant (q – y) codes "1"

d'où le nombre total de "1" : $xy + (p - x)(q - y) = pq + 2xy - qx - py$
et le nombre total de "0" : $pq - (pq + 2xy - qx - py) = qx + py - 2xy$

D'où **le nombre de carreaux A, et de carreaux B :** $\mathbf{\frac{1}{2}(pq + 2xy - qx - py)}$

et **le nombre de carreaux C, et de carreaux D :** $\mathbf{\frac{1}{2}(qx + py - 2xy)}$

- Cas d'une 1ère case codée "0", cette fois :



Le tableau est composé de : (p – x) lignes de 1ère case "0" contenant y codes "1",
x lignes de 1ère case "1" contenant (q – y) codes "1",

d'où le nombre total de codes "1" dans le tableau : $y(p - x) + x(q - y) = qx + py - 2xy$
et le nombre total de de codes "0" dans le tableau : $pq - (qx + py - 2xy) = pq + 2xy - qx - py$

D'où **le nombre de carreaux A, et de carreaux B :** $\mathbf{\frac{1}{2}(qx + py - 2xy)}$

et **le nombre de carreaux C, et de carreaux D :** $\mathbf{\frac{1}{2}(pq + 2xy - qx - py)}$

CQFD !

Palindromes binaires, proposition de correction :

PARTIE 1

1. L'écriture binaire de 135 est $(10000111)_2$.

2. Le nombre dont la représentation en base deux est $(101011)_2$ est :

$$1 \times 2^0 + 1 \times 2^1 + 0 \times 2^2 + 1 \times 2^3 + 0 \times 2^4 + 1 \times 2^5 = 1 + 2 + 8 + 32 = 43$$

3. Pour tout entier $n \geq 1$, dans l'écriture en base deux est $(\underbrace{11\ldots1}_{n \text{ fois}})_2$, tous les bits sont chargés au maximum donc il faut un bit supplémentaire pour représenter l'entier suivant qui sera $(1\underbrace{00\ldots0}_{n \text{ fois}})_2$. Or ce dernier est 2^n, donc $(\underbrace{11\ldots1}_{n \text{ fois}})_2$ représente l'entier $2^n - 1$.

PARTIE 2

Partie A

1. Voici la liste des 23 palindromes binaires compris entre 1 et 129 :

   [(1, '1'), (3, '11'), (5, '101'), (7, '111'), (9, '1001'), (15, '1111'),
   (17, '10001'), (21, '10101'), (27, '11011'), (31, '11111'),
   (33, '100001'), (45, '101101'), (51, '110011'), (63, '111111'),
   (65, '1000001'), (73, '1001001'), (85, '1010101'), (93, '1011101'),
   (99, '1100011'), (107, '1101011'), (119, '1110111'), (127, '1111111'),
   (129, '10000001')]

2. En utilisant l'un des algorithmes de conversion de la partie A, on trouve que l'écriture binaire de 2017 est $(11111100001)_2$ donc 2017 n'est pas une année palindrome binaire.

3. La prochaine année palindrome binaire sera $(11111111111)_2$ c'est-à-dire $2^{11} - 1 = 2047$.

Partie B

1. Palindromes binaires :
   - avec 3 chiffres binaires, il y en a deux : 101 et 111
   - avec à 4 chiffres binaires, il y en a deux : 1001 et 1111
   - avec 5 chiffres binaires, il y en a quatre : 10001, 11011, 11111 et 10101
   - avec 6 chiffres binaires, il y en a quatre : 100001,101101,110011 et 111111
   - avec 7 chiffres binaires, il y en a huit : 1001001, 1000001, 1011101, 1010101, 1101011, 1100011, 1111111, 1110111.

2. Pour tout entier $n \geq 1$, on note $P(n)$ le nombre de palindromes binaires à n chiffres. Dans chaque cas, puisque le bit de poids le plus fort est 1, le bit de poids le plus faible doit être 1 aussi.

- **Premier cas, n est pair**

Il reste deux blocs de $\dfrac{n-2}{2}$ bits, les plus forts et les plus faibles, qui sont symétriques :

$$(1 \quad \underbrace{10101}_{\text{poids forts}} \quad \underbrace{10101}_{\text{poids faibles}} \quad 1)$$

Dans ce cas, un palindrome binaire est entièrement déterminé par ce bloc de $\dfrac{n-2}{2}$ bits de poids forts qui peuvent prendre deux valeurs 0 ou 1.

$$\boxed{\text{Il y a } 2^{\frac{n-2}{2}} \text{ palindromes binaires si } n \text{ est pair.}}$$

- **Deuxième cas, n est impair**

Il reste deux blocs de $\dfrac{n-3}{2}$ bits, les plus forts et les plus faibles, symétriques par rapport au bit en position médiane $\dfrac{n+1}{2}$:

$$(1 \quad \underbrace{10101}_{\text{poids forts}} \quad \overbrace{1}^{\text{médian}} \quad \underbrace{10101}_{\text{poids faibles}} \quad 1)$$

Dans ce cas, un palindrome binaire est entièrement déterminé par ce bloc de $\dfrac{n-3}{2}$ bits de poids forts et le bit médian, qui peuvent prendre deux valeurs 0 ou 1.

$$\boxed{\text{Il y a } 2^{\frac{n-3}{2}} \text{ x } 2 = 2^{\frac{n-1}{2}} \text{ palindromes binaires si } n \text{ est impair.}}$$

Partie C

On cherche le nombre $F(2^n)$ de palindromes binaires strictement inférieurs au nombre 2^n avec n un entier naturel non nul.

1.
- $F(2^5)$ est la somme des nombres de palindromes binaires à 1, 2, 3, 4 ou 5 chiffres binaires donc d'après la question 1. de la partie B :

$$F(2^5) = 1 + 1 + 2 + 2 + 4 = 10$$

- $F(2^6)$ s'obtient en ajoutant à $F(2^5)$ le nombre de palindromes binaires à 6 chiffres binaires donc d'après la question 1. de la partie B :

$$F(2^6) = F(2^5) + 4 = 10 + 4 = 14$$

2. $F(2^n)$ est la somme des nombres de palindromes binaires à k chiffres binaires avec $1 \leq k \leq n$.

a. Premier cas, $n = 2\,p$ est pair :

$$\mathbf{S_{2p}} = \sum_{k=1}^{p} 2^{\frac{2k-2}{2}} + \sum_{k=0}^{p-1} 2^{\frac{2k+1-1}{2}}$$

$$\mathbf{S_{2p}} = \sum_{k=1}^{p} 2^{k-1} + \sum_{k=0}^{p-1} 2^{k}$$

$$\mathbf{S_{2p}} = 2 \text{ x } \sum_{k=0}^{p-1} 2^{k}$$

$$\mathbf{S_{2p}} = 2 \text{ x } (2^p - 1)$$

$$\mathbf{S_{2p}} = 2 \text{ x } 2^p - 2$$

$$\boxed{F(2^n) = 2^{\frac{n+2}{2}} - 2 \text{ si } n \text{ est pair.}}$$

b. Deuxième cas, $n = 2p + 1$ **est impair :**

$$S_{2p+1} = S_{2p} + 2^{\frac{2p+1-1}{2}}$$

$$S_{2p+1} = 2^{p+1} - 2 + 2^p$$

$$S_{2p+1} = 3 \text{ x } 2^p - 2$$

$$\boxed{F(2^n) = 3 \text{ x } 2^{\frac{n+1}{2}} - 2 \text{ si } n \text{ est impair.}}$$

3. Soit x un nombre entier naturel tel que $x > 5$.
On note $F(x)$ le nombre de palindromes binaires strictement inférieurs à x.

a. Soit n le nombre entier tel que $2^n \leq x \leq 2^{n+1}$.
$2^n \leq x$ donc $F(x)$ est la somme de $F(2^n)$ et des nombres de palindromes binaires supérieurs ou égaux à 2^n et inférieurs à x.
Or ce nombre est positif donc $F(2^n) \leq F(x)$.
Comme $x < 2^{n+1}$, le même raisonnement nous conduit à $F(x) \leq F(2^{n+1})$.
Plus généralement, la suite $(F(x))_{x \in \mathbb{N}^*}$ est croissante.
Par ailleurs, $2^{n+1} - 1$, dont l'écriture en base deux est $(\underbrace{111\ldots111}_{n+1 \text{ fois}})_2$, est un palindrome binaire qui est compté dans $F(2^{n+1})$ mais pas dans $F(x)$ car $x < 2^{n+1}$.
On a donc $F(x) < F(2^{n+1})$.

$$\boxed{\text{Si } 2^n \leq x < 2^{n+1} \text{ alors } F(2^n) \leq F(x) < F(2^{n+1}).}$$

b. Soit n le nombre entier tel que $2^n \leq x \leq 2^{n+1}$. D'après les deux questions précédentes on a :

- **Premier cas,** n **est pair et** $n + 1$ **impair :**

$$F(2^n) \leq F(x) < F(2^{n+1})$$
$$2^{\frac{n+2}{2}} - 2 \leq F(x) < 3 \text{ x } 2^{\frac{n+1-1}{2}} - 2$$
$$2^{\frac{n+2}{2}} - 2 \leq F(x) < 3 \text{ x } 2^{\frac{n}{2}} - 2$$

Or on a $2^n \leq x < 2^{n+1} \Longleftrightarrow 2^{\frac{n}{2}} \leq \sqrt{x} < 2^{\frac{n+1}{2}}$ et $2^{\frac{n+2}{2}} - 2 - 2^{\frac{n+1}{2}} = 2^{\frac{n+1}{2}} \text{ x } (2^{\frac{1}{2}} - 1) - 2$.
De plus $2^{\frac{n+1}{2}} \text{ x } (2^{\frac{1}{2}} - 1) - 2 > 0 \Longleftrightarrow n \geq 4$.
Donc $\sqrt{x} < F(x)$ si $n \geq 4$ et $x \geq 2^4$.
Par ailleurs $2^{\frac{n}{2}} \leq \sqrt{x}$ et $F(x) < 3 \text{ x } 2^{\frac{n}{2}} - 2$ impliquent $F(x) < 3\sqrt{x}$.
On en déduit donc que si n est pair et $n \geq 4$ alors :

$$\sqrt{x} < F(x) < 3\sqrt{x}$$

- **Deuxième cas,** n **est impair et** n **est pair :**

$$F(2^n) \leq F(x) < F(2^{n+1})$$
$$3 \text{ x } 2^{\frac{n-1}{2}} - 2 \leq F(x) < 2^{\frac{n+1+2}{2}} - 2$$
$$3 \text{ x } 2^{-\frac{1}{2}} \text{ x } 2^{\frac{n}{2}} - 2 \leq F(x) < 2^{\frac{3}{2}} \text{ x } 2^{\frac{n}{2}} - 2$$

Or $2^{\frac{3}{2}} = 2\sqrt{2}$ et $3 > 2^{\frac{3}{2}}$ donc on a :

$$\frac{3}{\sqrt{2}} \text{ x } 2^{\frac{n}{2}} - 2 \leq F(x) < 3 \text{ x } 2^{\frac{n}{2}} - 2$$

Or $2^n \leq x < 2^{n+1} \Longleftrightarrow 2^{\frac{n}{2}} \leq \sqrt{x} < 2^{\frac{n+1}{2}}$.

De plus $\frac{3}{\sqrt{2}} \text{ x } 2^{\frac{n}{2}} - 2 - 2^{\frac{n+1}{2}} = 2^{\frac{n}{2}} \text{ x } \left(\frac{3}{\sqrt{2}} - \sqrt{2}\right) - 2 = 2^{\frac{n}{2}} \text{ x } \frac{\sqrt{2}}{2} - 2$.

Or $2^{\frac{n}{2}} \text{ x } \frac{\sqrt{2}}{2} - 2 \geq 0 \Longleftrightarrow n \geq 3$.

Donc $\sqrt{x} < F(x)$ si $n \geq 3$ et $x \geq 2^3$.

Par ailleurs $2^{\frac{n}{2}} \leq \sqrt{x}$ et $F(x) < 3 \text{ x } 2^{\frac{n}{2}} - 2$ impliquent $F(x) < 3\sqrt{x}$.

On en déduit donc que si n est impair et $n \geq 3$ alors :

$$\sqrt{x} < F(x) < 3\sqrt{x}$$

Les seuls cas restant sont $n = 1$ et $n = 2$ ce qui correspond à deux entiers supérieurs à 5 : $x = 6$ et $x = 7$.

Or $1 = (1)_2$, $2 = (10)_2$, $3 = (11)_2$, $4 = (100)_2$, $5 = (101)_2$, $6 = (110)_2$ et $7 = (111)_2$, donc on a $F(6) = 3$ et $F(7) = 3$.

On vérifie bien que $\sqrt{6} < F(6) < 3\sqrt{6}$ et $\sqrt{7} < F(7) < 3\sqrt{7}$.

$$\boxed{\text{Pour tout entier } x > 5, \text{ on a } \sqrt{x} < F(x) < 3\sqrt{x}.}$$