SUJET + CORRIGÉ

OLYMPIADES DE MATHÉMATIQUES

ACADÉMIE DE LYON

Classes de première S • 2017

MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE, DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE

Olympiades académiques de mathématiques

Académie de Lyon

Mercredi 15 mars 2017

Série S

Les calculatrices sont autorisées, à l'exclusion de tout autre appareil électronique.

Il est conseillé aux candidats qui ne pourraient formuler une réponse complète à une question d'exposer le bilan des initiatives qu'ils ont pu prendre.

Exercices académiques

Cette sous-épreuve comporte deux exercices, à traiter dans le temps imparti.

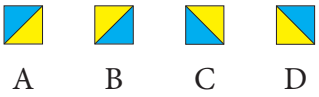
Durée de la composition : 2 heures

Texas Instruments · Animath · CASIO · Google · Crédit Mutuel Enseignant · Inria

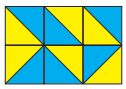
Exercice académique n°1 à traiter par tous les candidats

Étude de pavages de Truchet

On considère des carreaux identiques, colorés en bleu et en jaune de part et d'autre d'une diagonale. Ces carreaux étant utilisables dans tous les sens, on désigne par les lettres A, B, C, D les quatre positions ci-contre :



En disposant ces carreaux suivant p lignes et q colonnes, on forme des ensembles appelés **"Pavages de Truchet p x q".**



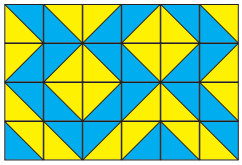
Exemple de pavage de Truchet 2 x 3

La partie 1 est indépendante des parties 2 et 3

PARTIE 1 : Dénombrement des pavages de Truchet

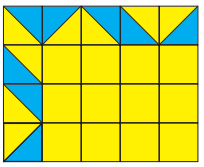
1) Montrer qu'il existe exactement 4096 pavages de Truchet 2 x 3.
2) Exprimer le nombre de pavages de Truchet p x q en fonction de p et q.

PARTIE 2 : Construction et dénombrement des pavages linéaires



Exemple de pavage linéaire 4 x 6

Un **"Pavage linéaire"** est un pavage de Truchet dans lequel, d'un carreau au suivant, les deux triangles situés côte-à-côte sont de la même couleur (voir exemple ci-contre).



1) Recopier la figure ci-contre puis colorer la grille pour obtenir un pavage linéaire 4 x 5.

2) On considère un pavage linéaire p x q dont on connaît la 1ère ligne et la 1ère colonne. On souhaite créer un algorithme qui, à partir de la 1ère ligne L(1),…, L(q), et en indiquant la 1ère case G(1) de la ligne suivante, permette d'afficher la composition complète du pavage linéaire p x q, ligne après ligne.

L(1)	…	L(i)	L(i + 1)	…	L(q)
G(1)	…	G(i)	L(i + 1)	…	G(q)
…					

Dans l'algorithme en annexe, quatre lignes comportent des pointillés. Les recopier et les compléter en précisant les lettres manquantes.

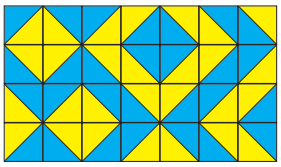
3) Montrer que le nombre de pavages linéaires p x q est égal à 2^{p+q}.

PARTIE 3 : Composition des pavages linéaires

On code l'orientation des diagonales des carreaux A, B, C, D avec les chiffres "0" et "1" comme ci-dessous :

Carreaux :				
Noms :	A	B	C	D
Codage de diagonale :	1	1	0	0

A chaque pavage linéaire on associe alors un tableau, appelé tableau linéaire, contenant les chiffres 0 et 1.

Par exemple le pavage linéaire  a pour tableau linéaire

1	0	1	1	0	0	0
0	1	0	0	1	1	1
0	1	0	0	1	1	1
1	0	1	1	0	0	0

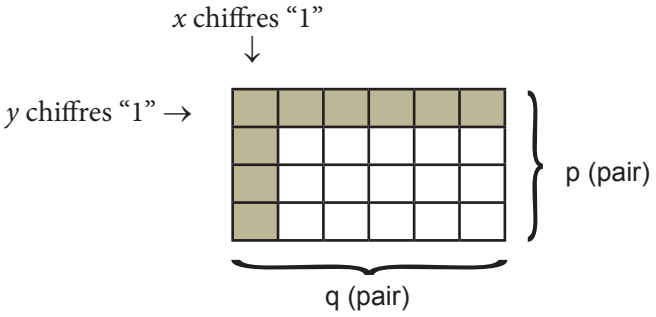
1) ***a)*** En utilisant le 3) de la Partie 2, justifier qu'il existe exactement huit tableaux linéaires 2 x 2.
b) Identifier ces huit tableaux linéaires dans l'exemple donné ci-dessus, et les représenter sur votre copie.
c) Montrer que les deux lignes d'un tableau linéaire 2 x q sont soit identiques, soit complémentaires (c'est-à-dire que chaque colonne du tableau est composée de deux chiffres distincts).

2) *a*) Justifier que dans un pavage linéaire, deux carreaux identiques ne peuvent être placés côte-à-côte.

***b*)** Pour chacun des tableaux linéaires 2 x 2 obtenus au 1) *b*), préciser le nombre de carreaux A, B, C, D composant les pavages linéaires 2 x 2 correspondants.

***c*)** On considère un pavage linéaire p x q , avec p et q pairs, dont le tableau linéaire contient *x* chiffres "1" dans la 1ère colonne et *y* chiffres "1" dans la 1ère ligne.

Illustration :



Préciser, en fonction de *x* ; *y* ; p ; q , le nombre de carreaux A, B, C, D du pavage linéaire dans les deux cas où :

***i*)** La première case (en 1ère ligne et 1ère colonne) contient le chiffre "1",

***ii*)** La première case (en 1ère ligne et 1ère colonne) contient le chiffre "0".

Annexe (Partie 2, Question 2)

Début de l'algorithme :

Variables : L, G (tableaux pouvant contenir les lettres A, B, C, D)
i, j, p, q : variables entières

Saisir les valeurs de p et de q (entiers ≥ 2)

Pour i allant de 1 à q : Saisir la lettre L(i) ; Afficher L(i)

Pour j allant de 2 à p

Début

- Saisir la 1ère lettre G(1) de la ligne suivante
- Pour i allant de 1 à q-1
- Début
- Si G(i) = A ou C ET L(i+1) = A ou D alors Mettre la lettre …… dans G(i+1)
- Si G(i) = A ou C ET L(i+1) = B ou C alors Mettre la lettre …… dans G(i+1)
- Si G(i) = B ou D ET L(i+1) = A ou D alors Mettre la lettre …… dans G(i+1)
- Si G(i) = B ou D ET L(i+1) = B ou C alors Mettre la lettre …… dans G(i+1)
- Fin
- Pour i allant de 1 à q : Afficher G(i)
- Pour i allant de 1 à q : Mettre la lettre G(i) dans L(i)

Fin

Fin de l'algorithme

Exercice académique numéro 2 à traiter par tous les candidats

Palindromes Binaires

PARTIE 1

Tout nombre entier naturel s'écrit de manière unique comme somme de puissances de 2.
Exemple

$$53 = 2^5 + 2^4 + 2^2 + 2^0$$
$$53 = 1 \times 2^5 + 1 \times 2^4 + 0 \times 2^3 + 1 \times 2^2 + 0 \times 2^1 + 1 \times 2^0$$

On dit que le nombre 53 s'écrit 110101 dans le système binaire (base 2) et on écrira :

$$53 = (110101)_2$$

1) Ecrire dans le système binaire le nombre 135.
2) Déterminer à quel nombre correspond $(101011)_2$.

3) Démontrer que $2^n - 1 = \underbrace{(1111\ldots\ldots1)_2}_{n \text{ fois}}$

PARTIE 2

$$17 = (10001)_2$$
$$165 = (10100101)_2$$

Un nombre palindrome se lit indifféremment de gauche à droite et de droite à gauche. Ce nombre ne commence jamais par zéro.

On dit que l'an 17 est une « année palindrome binaire » tout comme l'année 165 car les écritures binaires de ces deux nombres sont des palindromes.
L'année 19 n'est pas une « année palindrome binaire » car $19 = (10011)_2$.

Partie A
1) Donner en écriture binaire toutes les « années palindromes binaires » comprises entre l'an 1 et l'an 129
2) L'année 2017 est-elle une « année palindrome binaire » ?
3) Trouver la prochaine « année palindrome binaire ».

Partie B
On s'intéresse à l'écriture binaire des nombres entiers naturels.
1) Combien y a-t-il de palindromes binaires à 3 ; 4 ; 5 ; 6 et 7 chiffres en écriture binaire ?
2) Soit n un entier naturel non nul :
Déterminer P (n) le nombre de palindromes binaires à n chiffres dans chacun des deux cas suivants :
(on donnera une expression de P (n) en fonction de n)

a) dans le cas où n est pair.
b) dans le cas où n est impair.

Partie C
On cherche le nombre $F(2^n)$ de palindromes binaires strictement inférieurs au nombre 2^n avec n un entier naturel non nul.
1) Déterminer $F(2^5)$ et $F(2^6)$
2) Montrer que le nombre de palindromes binaires strictement inférieurs à 2^n est :

a) $F(2^n) = 2^{\frac{n+2}{2}} - 2$ si n est pair.

b) $F(2^n) = 3 \times 2^{\frac{n-1}{2}} - 2$ si n est impair.

3) Soit x un nombre entier naturel quelconque strictement supérieur à 5.
On note $F(x)$ le nombre de palindromes binaires strictement inférieurs à x.
On appelle n le nombre entier tel que $2^n \leq x < 2^{n+1}$

a) Justifier que $F(2^n) \leq F(x) < F(2^{n+1})$
b) Montrer que $\sqrt{x} < F(x) < 3\sqrt{x}$

MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE, DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE

Olympiades académiques de mathématiques

Académie de Lyon

Série S

Correction

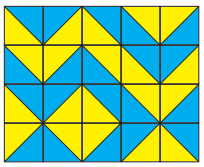
Inria · Crédit Mutuel Enseignant · Texas Instrument · Fondation Paris-Dauphine · CASIO · Animath

Pavages de Truchet, proposition de correction :

PARTIE 1 : Dénombrement des pavages de Truchet

1) Pour chacune des 6 cases, on a 4 positions A, B, C, D possibles d'où 4x4x4x4x4x4 = 4096 pavages de Truchet 2 x 3.

2) De façon générale, le nombre de pavages de Truchet p x q est égal à : $4^{nb\ cases} = 4^{pq}$.



PARTIE 2 : Construction et dénombrement des pavages linéaires

1) En respectant la règle de coloration des pavages linéaires, on obtient le pavage ci-contre :

2) En suivant la logique de construction du 1), on complète l'algorithme de la façon suivante :

Si	G(i) = A ou C	ET	L(i+1) A ou D	alors	Mettre la lettre B dans G(i+1)
Si	G(i) = A ou C	ET	L(i+1) B ou C	alors	Mettre la lettre D dans G(i+1)
Si	G(i) = B ou D	ET	L(i+1) A ou D	alors	Mettre la lettre C dans G(i+1)
Si	G(i) = B ou D	ET	L(i+1) B ou C	alors	Mettre la lettre A dans G(i+1)

3) D'après 2), un pavage linéaire est défini de façon unique par sa 1ère ligne (L(1)… L(q)) et sa 1ère colonne (les G(1) successifs), il faut donc dénombrer les 1ères lignes et les 1ères colonnes que l'on peut former dans un pavage linéaire.
Le 1er carreau (1ère ligne et 1ère colonne) fixe l'alternance de couleurs des côtés de la 1ère ligne, de sorte que pour chaque case de cette ligne on a à chaque fois 2 possibilités d'orientation de carreaux (A ou C ; B ou D). Il en est de même pour la 1ère colonne (avec A ou D ; B ou C).
Pour un 1er carreau donné, il y a donc 2^{q-1} façons de compléter la 1ère ligne et 2^{p-1} façons de compléter la 1ère colonne. Enfin comme il y a 4 façons de placer le 1er carreau, il y a donc :
$4 \times 2^{q-1} \times 2^{p-1} = 2^2 \times 2^{q-1} \times 2^{p-1} = 2^{p+q}$ pavages linéaires p x q.

PARTIE 3 : Composition des pavages linéaires

1) ***a*** **)** Un tableau linéaire code uniquement l'orientation des diagonales, indépendamment des couleurs (codage d'un pavage "incolore" en quelque sorte), or le choix d'une des deux couleurs pour l'un des triangles du pavage entraîne, par adjacences successives, les couleurs de tous les autres : il y a donc exactement 2 pavages linéaires associés à un même tableau linéaire, or avec 3) de la Partie 2, il y a $2^{2+2} = 16$ pavages linéaires 2 x 2 et donc 16/2 = 8 tableaux linéaires 2 x 2.

b **)** On peut identifier ces huit tableaux dans l'exemple donné dans l'énoncé :

1 1	0 0	0 0	1 0	1 1	0 1	0 1	1 0
1 1	0 0	1 1	1 0	0 0	0 1	1 0	0 1

c **)** Grâce aux tableaux 2 x 2, il apparaît que :

- Si les codes de la 1ère colonne sont identiques, il en est de même pour la colonne suivante, et ainsi de suite, colonne par colonne sur toute la longueur des deux lignes : les deux lignes sont alors identiques.
- Si les codes de la 1ère colonne sont distincts, il en est de même pour la colonne suivante, et ainsi de suite colonne par colonne sur toute la longueur des deux lignes : les deux lignes sont alors complémentaires.

2) ***a*** **)** Les triangles d'un même carreau ayant deux couleurs distinctes (à gauche et à droite, en bas et en haut), ils ne peuvent être placés côte-à-côte (ni en ligne, ni en colonne) pour respecter la règle de coloration linéaire.

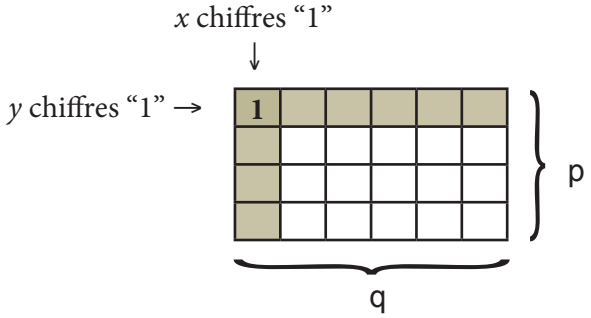
b **)** Avec ***a*** **)**, si deux carreaux adjacents ont le même code alors ils sont distincts : il s'agit donc des deux carreaux partageant ce code.

On déduit que le 1er tableau a pour composition 2A + 2B, le 2ème a pour composition 2C + 2D, et que les 4 suivants ont pour composition 1A+ 1B+ 1C + 1D.
Enfin si deux carreaux adjacents ont des codes distincts alors, par ligne : A est adjacent à D et B est adjacent à C, et par colonne : A est adjacent à C et B est adjacent à D.
On déduit que les deux derniers tableaux ont aussi pour composition 1A + 1B+ 1C + 1D.

c) p et q étant pairs, on peut partitionner le tableau linéaire p x q par des tableaux linéaires 2 x 2. Or d'après b), il y a dans ces tableaux autant de A que de B (codés "1") et de C que de D (codés "0"), donc pour trouver la composition en A, B (respectivement en C, D) il suffit de dénombrer les "1" (respectivement les "0" : à compléter avec p x q) et de diviser par 2.

D'après 1) c), les lignes commençant par le même code sont identiques (sinon elles sont complémentaires) ainsi :

- Cas d'une 1ère case codée "1" :



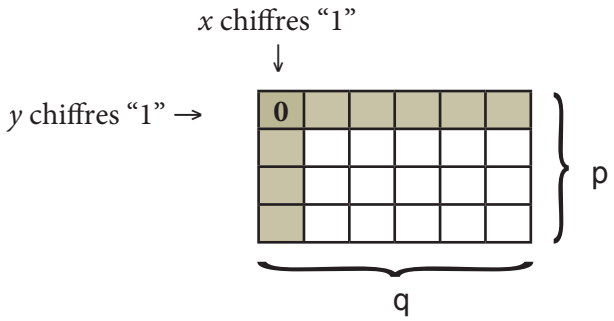
Le tableau est composé de : x lignes de 1ère case "1" contenant y codes "1"
et, par complémentarité : $(p - x)$ lignes de 1ère case "0" contenant $(q - y)$ codes "1"

d'où le nombre total de "1" : $xy + (p - x)(q - y) = pq + 2xy - qx - py$
et le nombre total de "0" : $pq - (pq + 2xy - qx - py) = qx + py - 2xy$

D'où **le nombre de carreaux A, et de carreaux B : $\frac{1}{2}(pq + 2xy - qx - py)$**

et **le nombre de carreaux C, et de carreaux D : $\frac{1}{2}(qx + py - 2xy)$**

- Cas d'une 1ère case codée "0", cette fois :



Le tableau est composé de : $(p - x)$ lignes de 1ère case "0" contenant y codes "1",
x lignes de 1ère case "1" contenant $(q - y)$ codes "1",

d'où le nombre total de codes "1" dans le tableau : $y(p - x) + x(q - y) = qx + py - 2xy$
et le nombre total de de codes "0" dans le tableau : $pq - (qx + py - 2xy) = pq + 2xy - qx - py$

D'où **le nombre de carreaux A, et de carreaux B : $\frac{1}{2}(qx + py - 2xy)$**

et **le nombre de carreaux C, et de carreaux D : $\frac{1}{2}(pq + 2xy - qx - py)$**

CQFD !

Palindromes binaires, proposition de correction :

PARTIE 1

1. L'écriture binaire de 135 est $(10000111)_2$.

2. Le nombre dont la représentation en base deux est $(101011)_2$ est :

$$1 \times 2^0 + 1 \times 2^1 + 0 \times 2^2 + 1 \times 2^3 + 0 \times 2^4 + 1 \times 2^5 = 1 + 2 + 8 + 32 = 43$$

3. Pour tout entier $n \geq 1$, dans l'écriture en base deux est $(\underbrace{11\ldots1}_{n \text{ fois}})_2$, tous les bits sont chargés au maximum donc il faut un bit supplémentaire pour représenter l'entier suivant qui sera $(\underbrace{100\ldots0}_{n \text{ fois}})_2$. Or ce dernier est 2^n, donc $(\underbrace{11\ldots1}_{n \text{ fois}})_2$ représente l'entier $2^n - 1$.

PARTIE 2

Partie A

1. Voici la liste des 23 palindromes binaires compris entre 1 et 129 :

[(1, '1'), (3, '11'), (5, '101'), (7, '111'), (9, '1001'), (15, '1111'),
(17, '10001'), (21, '10101'), (27, '11011'), (31, '11111'),
(33, '100001'), (45, '101101'), (51, '110011'), (63, '111111'),
(65, '1000001'), (73, '1001001'), (85, '1010101'), (93, '1011101'),
(99, '1100011'), (107, '1101011'), (119, '1110111'), (127, '1111111'),
(129, '10000001')]

2. En utilisant l'un des algorithmes de conversion de la partie A, on trouve que l'écriture binaire de 2017 est $(11111100001)_2$ donc 2017 n'est pas une année palindrome binaire.

3. La prochaine année palindrome binaire sera $(11111111111)_2$ c'est-à-dire $2^{11} - 1 = 2047$.

Partie B

1. Palindromes binaires :

- avec 3 chiffres binaires, il y en a deux : 101 et 111
- avec à 4 chiffres binaires, il y en a deux : 1001 et 1111
- avec 5 chiffres binaires, il y en a quatre : 10001, 11011, 11111 et 10101
- avec 6 chiffres binaires, il y en a quatre : 100001,101101,110011 et 111111
- avec 7 chiffres binaires, il y en a huit : 1001001, 1000001, 1011101, 1010101, 1101011, 1100011, 1111111, 1110111.

2. Pour tout entier $n \geq 1$, on note $P(n)$ le nombre de palindromes binaires à n chiffres. Dans chaque cas, puisque le bit de poids le plus fort est 1, le bit de poids le plus faible doit être 1 aussi.

- **Premier cas, n est pair**

  Il reste deux blocs de $\frac{n-2}{2}$ bits, les plus forts et les plus faibles, qui sont symétriques :

  $$(1 \quad \underbrace{10101}_{\text{poids forts}} \quad \underbrace{10101}_{\text{poids faibles}} \quad 1)$$

  Dans ce cas, un palindrome binaire est entièrement déterminé par ce bloc de $\frac{n-2}{2}$ bits de poids forts qui peuvent prendre deux valeurs 0 ou 1.

  Il y a $2^{\frac{n-2}{2}}$ palindromes binaires si n est pair.

- **Deuxième cas, n est impair**

  Il reste deux blocs de $\frac{n-3}{2}$ bits, les plus forts et les plus faibles, symétriques par rapport au bit en position médiane $\frac{n+1}{2}$:

  $$(1 \quad \underbrace{10101}_{\text{poids forts}} \quad \overbrace{1}^{\text{médian}} \quad \underbrace{10101}_{\text{poids faibles}} \quad 1)$$

  Dans ce cas, un palindrome binaire est entièrement déterminé par ce bloc de $\frac{n-3}{2}$ bits de poids forts et le bit médian, qui peuvent prendre deux valeurs 0 ou 1.

  Il y a $2^{\frac{n-3}{2}} \times 2 = 2^{\frac{n-1}{2}}$ palindromes binaires si n est impair.

Partie C

On cherche le nombre $F(2^n)$ de palindromes binaires strictement inférieurs au nombre 2^n avec n un entier naturel non nul.

1.
- $F(2^5)$ est la somme des nombres de palindromes binaires à 1, 2, 3, 4 ou 5 chiffres binaires donc d'après la question 1. de la partie B :

$$F(2^5) = 1 + 1 + 2 + 2 + 4 = 10$$

- $F(2^6)$ s'obtient en ajoutant à $F(2^5)$ le nombre de palindromes binaires à 6 chiffres binaires donc d'après la question 1. de la partie B :

$$F(2^6) = F(2^5) + 4 = 10 + 4 = 14$$

2. $F(2^n)$ est la somme des nombres de palindromes binaires à k chiffres binaires avec $1 \leq k \leq n$.

a. Premier cas, $n = 2p$ est pair :

$$\mathbf{S_{2p} = \sum_{k=1}^{p} 2^{\frac{2k-2}{2}} + \sum_{k=0}^{p-1} 2^{\frac{2k+1-1}{2}}}$$

$$\mathbf{S_{2p} = \sum_{k=1}^{p} 2^{k-1} + \sum_{k=0}^{p-1} 2^{k}}$$

$$\mathbf{S_{2p} = 2 \times \sum_{k=0}^{p-1} 2^{k}}$$

$$\mathbf{S_{2p} = 2 \times (2^{p} - 1)}$$

$$\mathbf{S_{2p} = 2 \times 2^{p} - 2}$$

$$F(2^n) = 2^{\frac{n+2}{2}} - 2 \text{ si } n \text{ est pair.}$$

b. Deuxième cas, $n = 2p + 1$ est impair :

$$S_{2p+1} = S_{2p} + 2^{\frac{2p+1-1}{2}}$$

$$S_{2p+1} = 2^{p+1} - 2 + 2^p$$

$$S_{2p+1} = 3 \times 2^p - 2$$

$$F(2^n) = 3 \times 2^{\frac{n+1}{2}} - 2 \text{ si } n \text{ est impair.}$$

3. Soit x un nombre entier naturel tel que $x > 5$.
On note $F(x)$ le nombre de palindromes binaires strictement inférieurs à x.

a. Soit n le nombre entier tel que $2^n \leq x \leq 2^{n+1}$.
$2^n \leq x$ donc $F(x)$ est la somme de $F(2^n)$ et des nombres de palindromes binaires supérieurs ou égaux à 2^n et inférieurs à x.
Or ce nombre est positif donc $F(2^n) \leq F(x)$.
Comme $x < 2^{n+1}$, le même raisonnement nous conduit à $F(x) \leq F(2^{n+1})$.
Plus généralement, la suite $(F(x))_{x \in \mathbb{N}^*}$ est croissante.
Par ailleurs, $2^{n+1} - 1$, dont l'écriture en base deux est $(\underbrace{111\ldots111}_{n+1 \text{ fois}})_2$, est un palindrome binaire qui est compté dans $F(2^{n+1})$ mais pas dans $F(x)$ car $x < 2^{n+1}$.
On a donc $F(x) < F(2^{n+1})$.

$$\text{Si } 2^n \leq x < 2^{n+1} \text{ alors } F(2^n) \leq F(x) < F(2^{n+1}).$$

b. Soit n le nombre entier tel que $2^n \leq x \leq 2^{n+1}$. D'après les deux questions précédentes on a :

- **Premier cas, n est pair et $n + 1$ impair :**

$$F(2^n) \leq F(x) < F(2^{n+1})$$
$$2^{\frac{n+2}{2}} - 2 \leq F(x) < 3 \times 2^{\frac{n+1-1}{2}} - 2$$
$$2^{\frac{n+2}{2}} - 2 \leq F(x) < 3 \times 2^{\frac{n}{2}} - 2$$

Or on a $2^n \leq x < 2^{n+1} \iff 2^{\frac{n}{2}} \leq \sqrt{x} < 2^{\frac{n+1}{2}}$ et $2^{\frac{n+2}{2}} - 2 - 2^{\frac{n+1}{2}} = 2^{\frac{n+1}{2}} \times (2^{\frac{1}{2}} - 1) - 2$.
De plus $2^{\frac{n+1}{2}} \times (2^{\frac{1}{2}} - 1) - 2 > 0 \iff n \geq 4$.
Donc $\sqrt{x} < F(x)$ si $n \geq 4$ et $x \geq 2^4$.
Par ailleurs $2^{\frac{n}{2}} \leq \sqrt{x}$ et $F(x) < 3 \times 2^{\frac{n}{2}} - 2$ impliquent $F(x) < 3\sqrt{x}$.
On en déduit donc que si n est pair et $n \geq 4$ alors :

$$\sqrt{x} < F(x) < 3\sqrt{x}$$

- **Deuxième cas, n est impair et n est pair :**

$$F(2^n) \leq F(x) < F(2^{n+1})$$
$$3 \times 2^{\frac{n-1}{2}} - 2 \leq F(x) < 2^{\frac{n+1+2}{2}} - 2$$
$$3 \times 2^{-\frac{1}{2}} \times 2^{\frac{n}{2}} - 2 \leq F(x) < 2^{\frac{3}{2}} \times 2^{\frac{n}{2}} - 2$$

Or $2^{\frac{3}{2}} = 2\sqrt{2}$ et $3 > 2^{\frac{3}{2}}$ donc on a :

$$\frac{3}{\sqrt{2}} \text{ x } 2^{\frac{n}{2}} - 2 \leq F(x) < 3 \text{ x } 2^{\frac{n}{2}} - 2$$

Or $2^n \leq x < 2^{n+1} \iff 2^{\frac{n}{2}} \leq \sqrt{x} < 2^{\frac{n+1}{2}}$.

De plus $\frac{3}{\sqrt{2}} \text{ x } 2^{\frac{n}{2}} - 2 - 2^{\frac{n+1}{2}} = 2^{\frac{n}{2}} \text{ x } (\frac{3}{\sqrt{2}} - \sqrt{2}) - 2 = 2^{\frac{n}{2}} \text{ x } \frac{\sqrt{2}}{2} - 2.$

Or $2^{\frac{n}{2}} \text{ x } \frac{\sqrt{2}}{2} - 2 \geq 0 \iff n \geq 3$.

Donc $\sqrt{x} < F(x)$ si $n \geq 3$ et $x \geq 2^3$.

Par ailleurs $2^{\frac{n}{2}} \leq \sqrt{x}$ et $F(x) < 3 \text{ x } 2^{\frac{n}{2}} - 2$ impliquent $F(x) < 3\sqrt{x}$.

On en déduit donc que si n est impair et $n \geq 3$ alors :

$$\sqrt{x} < F(x) < 3\sqrt{x}$$

Les seuls cas restant sont $n = 1$ et $n = 2$ ce qui correspond à deux entiers supérieurs à 5 : $x = 6$ et $x = 7$.

Or $1 = (1)_2$, $2 = (10)_2$, $3 = (11)_2$, $4 = (100)_2$, $5 = (101)_2$, $6 = (110)_2$ et $7 = (111)_2$, donc on a $F(6) = 3$ et $F(7) = 3$.

On vérifie bien que $\sqrt{6} < F(6) < 3\sqrt{6}$ et $\sqrt{7} < F(7) < 3\sqrt{7}$.

Pour tout entier $x > 5$, on a $\sqrt{x} < F(x) < 3\sqrt{x}$.

Autre Correction

CORRECTION OLYMPIADES

EXERCICES ACADÉMIQUES

LYON 2017

Exercice 1 : Etude de pavages de Truchet

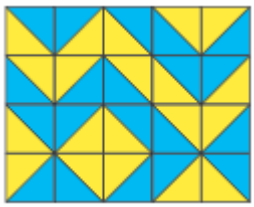
Partie 1 : Dénombrement des pavages de Truchet

1. Il existe quatre façons différentes de disposer un carreau. Il existe $4^6 = 4096$ façons différentes de réaliser un pavage de six carreaux.

2. Il existe $4^{p\times q}$ façons différentes de réaliser un pavage de $p \times q$ carreaux.

Partie 2 : Construction et dénombrement des pavages linéaires

1. En respectant les règles de connexion des couleurs jaune et bleu (les côtés bord à bord de deux carreaux contigus doivent être de la même couleur), on parvient à l'unique pavage ci-contre :



2. Le tableau ci-dessous donne le type du carreau $G(i+1)$ connaissant le type du carreau situé au dessus et celui du carreau situé à sa gauche.
Les lignes, comme les colonnes, sont identiques deux à deux.

$L(i+1)\rightarrow$ $G(i)$ $\downarrow$	**A**	**B**	**C**	**D**
A	**B**	**D**	**D**	**B**
B	**C**	**A**	**A**	**C**
C	**B**	**D**	**D**	**B**
D	**C**	**A**	**A**	**C**

Compte tenu de ce tableau, les lignes de l'algorithme doivent être complétées de la façon suivante :

Si G(i) = A ou C	ET	L(i+1) = A ou D	alors	Mettre la lettre ..B.. dans G(i+1)
Si G(i) = A ou C	ET	L(i+1) = B ou C	alors	Mettre la lettre ..D.. dans G(i+1)
Si G(i) = B ou D	ET	L(i+1) = A ou D	alors	Mettre la lettre ..C.. dans G(i+1)
Si G(i) = B ou D	ET	L(i+1) = B ou C	alors	Mettre la lettre ..A.. dans G(i+1)

3. Une ligne de carreaux est entièrement déterminée par la donnée de la ligne située au dessus et par le premier carreau de la ligne en question.
Un pavage $p \times q$ est entièrement déterminé par la donnée d'une part des carreaux de sa première ligne et d'autre part du premier carreau de chaque ligne, c'est-à-dire des carreaux de sa première colonne.

L'ensemble constitué par les q carreaux de la première ligne et les p carreaux de la première colonne contient $p+q-1$ éléments (La première ligne et la première colonne ont un carreau commun).

Il y a 4 façons de choisir le carreau commun, celui de la première ligne et première colonne. Les couleurs de ses côtés contigus aux carreaux suivants sont dès lors déterminées. Reste à choisir les autres carreaux.

Le pavage est linéaire si et seulement si les côtés bord à bord de deux carreaux contigus sont de la même couleur. Parmi les 4 carreaux possibles, 2 et 2 seulement ont un bord déterminé d'une couleur déterminée.

Il y a donc 2^{q-1} façons de choisir les autres carreaux de la première ligne en respectant la contiguïté de couleur.
Il y a de même 2^{p-1} façons de choisir les autres carreaux de la première colonne en respectant la contiguïté de couleur.

Au total, il y a $4 \times 2^{q-1} \times 2^{p-1}$ de choisir la première ligne et la première colonne d'un pavage linéaire. Le nombre de pavages linéaires est : $4 \times 2^{q-1} \times 2^{p-1} = 2^{p+q}$.

Partie 3 : Composition des pavages linéaires

1.a. Chaque élément d'un tableau linéaire correspond à deux carreaux différents. Il y a $2^4 = 16$ pavages 2×2, donc deux fois moins de tableaux linéaires : il y a 8 tableaux linéaires 2×2.

1.b. Les huit tableaux linéaires 2×2 que l'on peut extraire du tableau proposé par l'énoncé. Le tableau proposé par l'énoncé mobilise au moins une fois chacun des tableaux linéaires 2×2 possibles.

1

1	1
0	0

2

0	0
1	1

3

1	0
0	1

4

0	1
1	0

5

1	0
1	0

6

0	1
0	1

7

1	1
1	1

8

0	0
0	0

Les tableaux 1, 2, 7, 8ont leurs deux colonnes consécutives identiques.
Les tableaux 3, 4, 5 et 6 ont leurs deux colonnes consécutives complémentaires.

1.c. Les deux éléments d'une même colonne d'un tableau à deux lignes sont ou bien identiques ou bien complémentaires.

- Supposons que les deux éléments d'une colonne soient identiques. Dans ce cas, cette colonne et la suivante forment l'un des tableaux linéaires 2×2 numéros 5, 6, 7 ou 8 : Les deux éléments de la colonne suivante sont aussi identiques.
- Supposons que les deux éléments d'une colonne soient complémentaires. Dans ce cas, cette colonne et la suivante forment l'un des tableaux linéaires 2×2 numéros 1, 2, 3 ou 4 : Les deux éléments de la colonne suivante sont aussi complémentaires.

Chacune des deux propriétés, identité et complémentarité, sont héréditaires. Ainsi, l'identité des deux termes de la première colonne implique l'identité des deux termes homologues de toutes les autres et la complémentarité des deux termes de la première colonne implique celle des deux termes homologues de toutes les autres : les deux lignes d'un tableau linéaire $2 \times q$ sont ou bien identiques ou bien complémentaires.

2.a. Deux bords opposés d'un carreau sont toujours de couleurs différentes. Une translation d'un carreau provoque l'adjacence de deux côtés de couleurs différentes : la règle de connexion de couleurs n'est pas respectée. On ne peut pas juxtaposer deux carreaux identiques.

2.b. Il en résulte que si deux carreaux adjacents ont un même code diagonal, alors ils sont de couleurs différentes.

La mise en correspondance entre les codes diagonaux et les pavages coloriés des huit tableaux linéaires 2×2 montre que les tableaux 7 et 8 mobilisent l'un deux carreaux A et deux carreaux B, et l'autre deux carreaux C et deux carreaux D, tandis que les six autres tableaux mobilisent une fois et une seule un carreau de chaque sorte.

2.c. Les deux entiers p et q étant supposés pairs, il existe une partition du tableau en tableaux linéaires 2×2. Quel que soit le type de tableau linéaire 2×2, un tel tableau contient le même nombre de carreaux A que de carreaux B et le même nombre de carreaux C que de carreaux D. En conséquence, le tableau $p \times q$ contient lui aussi le même nombre de carreaux A que de carreaux B et le même nombre de carreaux C que de carreaux D.

On suppose que la première ligne contient y cases 1 et que la première colonne contient x cases 1.

Le tableau $p \times q$ contient ainsi x lignes dont la première case est 1 et $(p - x)$ lignes dont la première case est 0.

Les lignes étant ou bien identiques ou bien complémentaires, les x lignes dont la première case est 1 sont identiques de même que les $(p - x)$ lignes dont la première case est 0.

(i) Si la première case est 1 : il y a x lignes identiques contenant chacune y cases 1 et $(q - y)$ cases 0 et $(p - x)$ lignes complémentaires, contenant chacune $(q - y)$ cases 1 et y cases 0.
Le nombre total de cases 1 est : $x \times y + (p - x) \times (q - y) = p\,q - p\,x - q\,y + 2\,x\,y$. Le nombre de A et celui de B est $\frac{p\,q - p\,x - q\,y}{2} + x\,y$ et celui de C comme celui de D est : $\frac{p\,x + q\,y}{2} - x\,y$.

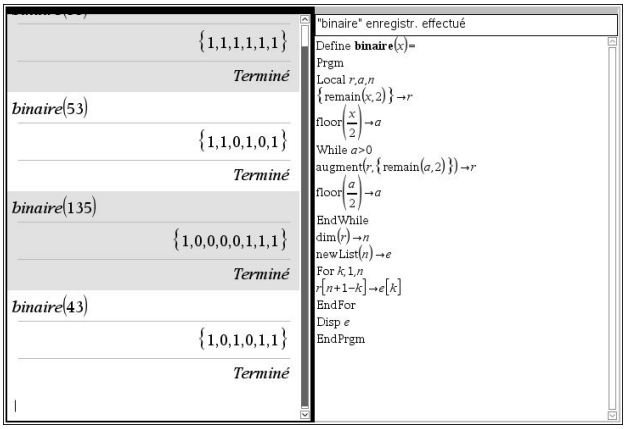
(ii) Si la première case est 0 : il y a x lignes identiques contenant chacune $(q - y)$ cases 1 et y cases 0 et $(p - x)$ lignes complémentaires, contenant chacune y cases 1 et $(q - y)$ cases 0.
Le nombre total de cases 1 est : $x \times (q - y) + (p - x) \times y = q\,x + p\,y - 2\,x\,y$. Le nombre de A et celui de B est $\frac{p\,x + q\,y}{2} - x\,y$ $\frac{p\,q - p\,x - q\,y}{2} + x\,y$ et celui de C comme celui de D est : $\frac{p\,q - p\,x - q\,y}{2} + x\,y$

Exercice 2 : Palindromes binaires

Partie 1

Les chiffres de l'écriture d'un nombre x en base deux sont, dans l'ordre inverse, les restes des divisions successives par 2 de ce nombre.

Le programme **binaire** construit la liste **r** des restes successifs puis inverse l'ordre des termes de cette liste pour afficher, sous forme de liste, les chiffres de l'écriture en base deux de x. La fonction **remain** calcule le reste de la division par 2, et la fonction **floor** calcule le quotient. L'algorithme est arrêté lorsque le quotient obtenu est nul.



1. L'écriture en base deux de 135 est $\overline{10000111}$ car $135 = 1 + 2 + 2^2 + 2^7$

2. $\overline{101011} = 2^0 + 2^1 + 2^3 + 2^5 = 1 + 2 + 8 + 32 = 43$ (vérification sur la copie d'écran ci-dessus)

3. On rappelle l'identité : $q^n - 1 = (q-1)\left(q^{n-1} + q^{n-2} + ... + q + 1\right)$ pour tout entier $n \geq 1$ et tout réel q.

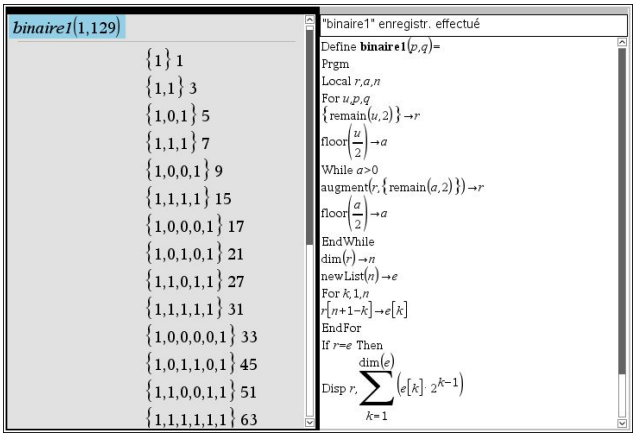
En attribuant à q la valeur 2 : $2^n - 1 = (2-1)\left(2^{n-1} + 2^{n-2} + ... + 2 + 1\right) = 2^{n-1} + 2^{n-2} + ... + 2 + 1$

Le nombre $2^n - 1$ étant la somme de toutes les puissances de 2, depuis la puissance zéro jusqu'à la puissance $(n-1)$, son écriture en base deux est $\overbrace{111....11}^{n \text{ chiffres } 1}$.

Partie 2.A

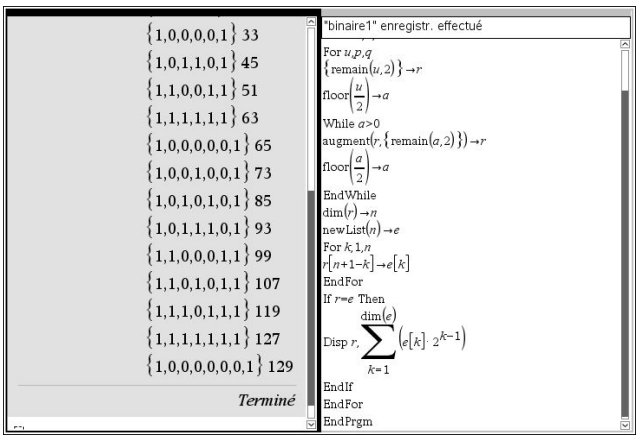
1. Le programme précédent a été modifié de façon à rechercher exhaustivement tous les palindromes binaires dans une intervalle $[p, q]$ donné et les afficher. Il est exécuté ci-contre pour obtenir les palindromes situés entre 1 et 129.

Un nombre est un palindrome binaire si et seulement si les listes **r** et **e** créées dans le programme initial sont identiques.

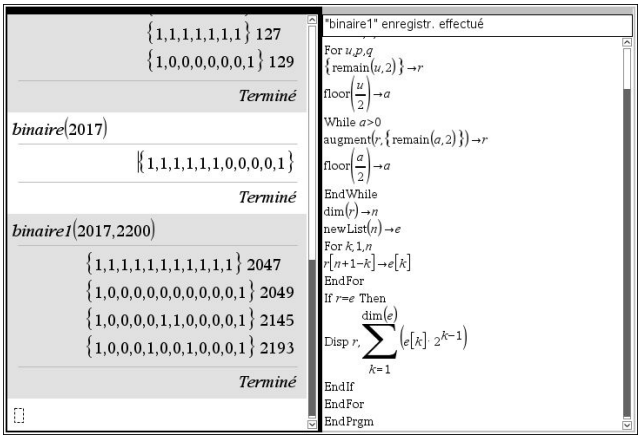


NB. Un palindrome binaire est nécessairement un nombre impair ; puisque son premier chiffre est un 1, son dernier chiffre aussi.

Voici la fin de la liste des 23 palindromes binaires recherchés.



2. L'écriture de 2017 en base deux est $\overline{11111100001}$. Ce n'est pas un palindrome binaire, ne serait-ce que parce que son deuxième et son avant-dernier chiffres sont différents.



3. Pour obtenir le prochain palindrome, il s'agit de rendre l'écriture symétrique en modifiant les chiffres dont les rangs sont les plus petits possibles. Puisque l'écriture commence par six chiffres 1, on rendra l'écriture symétrique de la façon la plus économique en remplaçant les quatre chiffres 0 par des 1. Le prochain palindrome est ainsi $2047 = \overline{11111111111}$. Le programme **binaire1** appliqué à l'intervalle $[2017, 2200]$ trouve le même nombre 2047 et indique en outre les trois palindromes suivants.

Partie 2.B

1. Le travail effectué dans la partie A permet de répondre à cette question ; il suffit d'examiner les copies d'écran ci-dessus qui affichent tous les nombres utiles.

- Les entiers qui s'écrivent avec trois chiffres en base 2 sont les entiers de 4 à 7. Parmi eux, deux sont des palindromes : les entiers 5 et 7.
- Ceux qui s'écrivent avec quatre chiffres en base 2 sont les entiers de 8 à 15. Parmi eux, deux sont des palindromes : les entiers 9 et 15.
- Ceux qui s'écrivent avec cinq chiffres en base 2 sont les entiers de 16 à 31. Parmi eux, quatre sont des palindromes : les entiers 17, 21, 27 et 31.
- Ceux qui s'écrivent avec six chiffres en base 2 sont les entiers de 32 à 63. Parmi eux, quatre sont des palindromes : les entiers 33, 45, 51 et 63.
- Ceux qui s'écrivent avec sept chiffres en base 2 sont les entiers de 64 à 127. Parmi eux, huit sont des palindromes : les entiers 65, 73, 85, 93, 99, 107, 119 et 127.

2. Il y a un palindrome à un chiffre (0 n'est pas considéré comme un palindrome) et un palindrome à deux chiffres.

Nous avons noté 2 palindromes à 3 et à 4 chiffres, 4 palindromes à 5 et à 6 chiffres.

Une conjecture apparaît. Il semblerait que lorsque le nombre *n* de chiffres est un nombre pair, disons $n = 2p$ avec $p \geq 1$, il y ait 2^{p-1} palindromes et que lorsque le nombre *n* de chiffres est le nombre impair précédent, $n = 2p-1$, il y ait également 2^{p-1} palindromes. Peut-on généraliser ?

2.a. Considérons l'écriture d'un palindrome composé d'un nombre pair $2p$ chiffres $(p \geq 2)$.

Son premier et son dernier chiffres sont nécessairement des « 1 ».

Pour chaque entier *k* tel que $2 \leq k \leq p$, la donnée du *k*-ème chiffre c_k détermine le $(2p-k+1)$-ème chiffre qui doit nécessairement être le même chiffre.

Ce palindrome s'écrit $\overline{1c_2c_3....c_{p-1}c_pc_pc_{p-1}...c_3c_21}$ et il est déterminé par la donnée du nombre qui s'écrit $\overline{c_2c_3....c_{p-1}c_p}$ où $c_k \in \{0\,;1\}$ pour tout *k* tel que $2 \leq k \leq p$.

Ce nombre s'écrit avec au plus $p-1$ chiffres, c'est un entier naturel strictement inférieur à 2^{p-1} (c'est-à-dire qu'il appartient à $\{0\,;1\,;...;2^{p-1}-1\}$). Il y a 2^{p-1} tels nombres donc 2^{p-1} palindromes composés de $2p$ chiffres.

2.b. Considérons l'écriture d'un palindrome composé d'un nombre impair $2p-1$ chiffres $(p \geq 2)$.

Son premier et son dernier chiffres sont nécessairement des « 1 ».

Pour chaque entier *k* tel que $2 \leq k \leq p-1$, la donnée du *k*-ème chiffre c_k détermine le $(2p-k)$-ème chiffre qui doit nécessairement être le même chiffre.

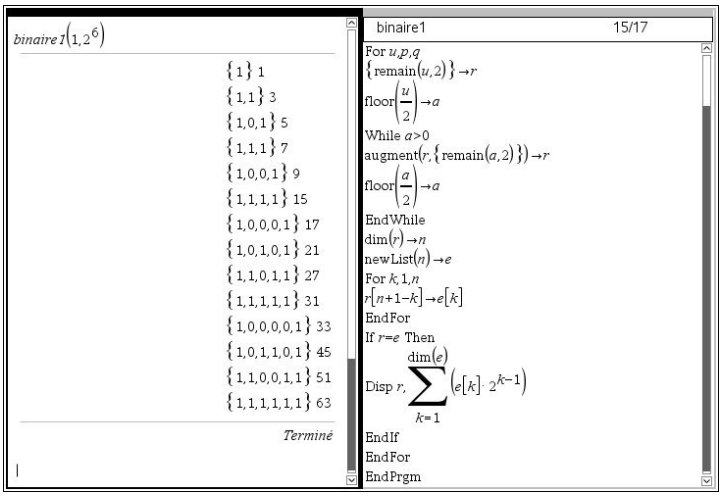
Ce palindrome s'écrit $\overline{1c_2c_3....c_{p-1}c_pc_{p-1}...c_3c_21}$ et il est déterminé par la donnée du même nombre que précédemment $\overline{c_2c_3....c_{p-1}c_p}$. (La différence avec le cas précédent est que le chiffre « central » c_p n'est pas répété). Il y a aussi 2^{p-1} palindromes composés de $2p-1$ chiffres.

En conclusion, nous allons retenir pour la **partie C** que, si u_n désigne le nombre de palindromes composés de *n* chiffres alors : $u_{2p-1} = u_{2p} = 2^{p-1}$

Partie 2.C

1. Nous avons dénombré 14 palindromes strictement inférieurs à 2^6 dont 10 sont strictement inférieurs à 2^5. Ils sont rappelés ci-contre.

$F(2^5)=10$; $F(2^6)=14$



2. Les palindromes strictement inférieurs à 2^n sont ceux qui s'écrivent avec au plus n chiffres. $F(2^n)$ est la somme des nombres de palindromes qui s'écrivent avec k chiffres, pour k allant de 1 à n. Nous allons étudier deux cas, suivant la parité de n.

2.a. Supposons que *n soit un entier pair :* $n=2k$

$$F(2^{2k})=\sum_{p=1}^{k}\left(u_{2p-1}+u_{2p}\right)=\sum_{p=1}^{k}\left(2^{p-1}+2^{p-1}\right)=2\sum_{p=1}^{k}2^{p-1}=2\left(2^k-1\right)=2^{k+1}-2$$

En fonction de l'entier n lui-même : $F(2^n)=2\left(2^{\frac{n}{2}}-1\right)=2^{\frac{n+2}{2}}-2$

C'est par exemple le cas de l'entier 2^6 : $F(2^6)=2\left(2^3-1\right)=2(8-1)=14$

2.b. Supposons que *n soit un entier impair :* $n=2k+1$

$$F(2^{2k+1})=F(2^k)+u_{2k+1}=2\left(2^k-1\right)+2^k=3\times 2^k-2$$

En fonction de l'entier n lui-même : $F(2^n)=3\times 2^{\frac{n-1}{2}}-2$

C'est par exemple le cas de l'entier 2^5 : $F(2^5)=3\times 2^2-2=10$

3.a. Dès lors que la fonction F dénombre des éléments qui appartiennent à des ensembles emboîtés, la fonction F est une fonction croissante (au sens large). En effet, si x et y sont deux entiers tels que $x<y$, alors tout palindrome strictement inférieur à x est aussi strictement inférieur à y : $x<y\Rightarrow F(x)\leq F(y)$.

En vertu de cette croissance large, si nous nous donnons un entier naturel n et un entier x tel que : $2^n\leq x<2^{n+1}$, alors $F(2^n)\leq F(x)\leq F(2^{n+1})$.

C'est l'implication : $x < 2^{n+1} \Rightarrow F(x) < F\left(2^{n+1}\right)$ avec inégalité stricte à droite de l'implication qu'il convient de justifier. Pour cela, nous avons vu que pour tout entier naturel *n*, le nombre $2^{n+1}-1$, prédécesseur de 2^{n+1} était un palindrome (il s'écrit avec des chiffres 1 uniquement). Ce nombre est un palindrome strictement inférieur à 2^{n+1} mais il n'est pas strictement inférieur à x : $F\left(2^{n+1}\right)$ compte au moins une unité de plus que $F(x)$. Nous obtenons l'inégalité stricte $F(x) < F\left(2^{n+1}\right)$.

3.b. Dans cette question, l'hypothèse est que $x > 5$.

Soit pour le moment *n* un entier tel que $n \geq 2$ et soit x un nombre entier tel que $2^n \leq x < 2^{n+1}$

Selon la parité de l'entier *n* : $F\left(2^n\right) = 2^{\frac{n+2}{2}} - 2$ (*n* pair) ou bien $F\left(2^n\right) = 3 \times 2^{\frac{n-1}{2}} - 2$ (*n* impair).

Pour étudier les positions relatives de $\sqrt{x}$, $F(x)$, $3\sqrt{x}$, nous allons étudier deux cas, suivant la parité de *n*.

Supposons que *n soit un entier pair :* $n = 2k$ ***avec*** $k \geq 2$

Cette hypothèse regroupe les cas $4 \leq x < 8$; $16 \leq x < 32$;....

L'entier *x* est supposé tel que : $2^{2k} \leq x < 2^{2k+1}$, c'est-à-dire que : $2^k \leq \sqrt{x} < 2^{k+\frac{1}{2}} = \sqrt{2}.2^k$

Cette double inégalité est équivalente à celle-ci : $\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{2}} < 2^k \leq \sqrt{x}$

Nous avons vu dans une question précédente que : $F\left(2^{2k}\right) = 2 \times 2^k - 2$ et $F\left(2^{2k+1}\right) = 3 \times 2^k - 2$ et nous savons que : $F\left(2^{2k}\right) \leq F(x) < F\left(2^{2k+1}\right)$, c'est-à-dire que : $2 \times 2^k - 2 \leq F(x) < 3 \times 2^k - 2$ donc *a fortiori* $2 \times 2^k - 2 \leq F(x) < 3 \times 2^k$

Compte tenu de l'encadrement : $\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{2}} < 2^k \leq \sqrt{x}$, nous obtenons : $\sqrt{2}.\sqrt{x} - 2 < F(x) < 3\sqrt{x}$

Or : $\sqrt{2}.\sqrt{x} - 2 = \sqrt{x} + \left(\sqrt{2}-1\right)\sqrt{x} - 2$.

Intéressons nous au nombre $\left(\sqrt{2}-1\right)\sqrt{x} - 2 = \left(\sqrt{2}-1\right)\left(\sqrt{x} - \frac{2}{\sqrt{2}-1}\right)$ qui représente la différence entre $\sqrt{2}.\sqrt{x} - 2$ et $\sqrt{x}$. Si elle est positive, alors $\sqrt{x} \leq \sqrt{2}.\sqrt{x} - 2$.

Une calculatrice indique que $4{,}82 < \frac{2}{\sqrt{2}-1} < 4{,}83$. Sachant que $4{,}83^2 < 23{,}4$, nous pouvons affirmer que $\left(\sqrt{2}-1\right)\sqrt{x} - 2 = \left(\sqrt{2}-1\right)\left(\sqrt{x} - \frac{2}{\sqrt{2}-1}\right) \geq 0$ et en conséquence que $.\sqrt{x} < F(x) < 3\sqrt{x}$ pour tout $x \geq 24$ mais nous ne pouvons pas l'affirmer pour les entiers précédents, c'est-à-dire pour $4 \leq x < 8$; $16 \leq x < 24$ cas qui restent indécis.

Supposons que *n soit un entier impair :* $n=2k-1$ ***avec*** $k\geq 2$

Cette hypothèse regroupe les cas $8\leq x<16$; $32\leq x<64$;.... ,

L'entier x est supposé tel que : $2^{2k-1}\leq x<2^{2k}$, c'est-à-dire que : $2^{k-\frac{1}{2}}=\frac{2^k}{\sqrt{2}}\leq\sqrt{x}<2^k$

Cette double inégalité est équivalente à celle-ci : $\sqrt{x}<2^k\leq\sqrt{2}.\sqrt{x}$

Compte tenu des notations choisies : $F\left(2^{2k-1}\right)=3\times 2^{k-1}-2$ et $F\left(2^{2k}\right)=2\times 2^k-2$.

Ainsi : $\frac{3}{2}\times 2^k-2\leq F(x)<2\times 2^k-2$.

Compte tenu de l'encadrement : $\sqrt{x}<2^k\leq\sqrt{2}.\sqrt{x}$, nous obtenons : $\frac{3}{2}.\sqrt{x}-2<F(x)<2\sqrt{2}.\sqrt{x}-2$ donc *a fortiori* , vu que $2\sqrt{2}<3$, nous obtenons : $\frac{3}{2}.\sqrt{x}-2<F(x)<3.\sqrt{x}-2<3.\sqrt{x}$.

Or : $\frac{3}{2}.\sqrt{x}-2=\sqrt{x}+\left(\frac{1}{2}.\sqrt{x}-2\right)=\sqrt{x}+\frac{1}{2}\left(\sqrt{x}-4\right)$

Pour $x\geq 16$, $\left(\sqrt{x}-4\right)\geq 0$ et $\sqrt{x}+\frac{1}{2}\left(\sqrt{x}-4\right)\geq\sqrt{x}$. Nous pouvons affirmer que $\frac{3}{2}.\sqrt{x}-2=\sqrt{x}=\sqrt{x}+\frac{1}{2}\left(\sqrt{x}-4\right)\geq\sqrt{x}$ et en conséquence que $.\sqrt{x}<F(x)<3\sqrt{x}$ pour tout $x\geq 16$ mais nous ne pouvons pas l'affirmer pour les entiers précédents, c'est-à-dire pour $8\leq x<16$.

En résumé notre méthode de démonstration établit que $\sqrt{x}<F(x)<3\sqrt{x}$ pour $x\geq 24$, mais non pour les entiers précédents.

Une étude exhaustive des valeurs de x de 6 à 23 (pas moins de 18 valeurs !) est en effet nécessaire pour compléter notre démonstration.

Ci-contre, les valeurs $F(x)$ figurent en colonne **C**, nommée « **suml** ». Des valeurs approchées de $\sqrt{x}$ et de $3\sqrt{x}$ figurent respectivement en colonne **D** et **E**. L'examen du tableau montre que $F(5)<\sqrt{5}$, puis que l'encadrement $\sqrt{x}<F(x)<3\sqrt{x}$ est vérifié pour $6\leq x\leq 15$.

	A num	B l	C suml	D	E	F	G	H
=	=seq('		=cumula	=√(num)	=3*√(num			
5	5.	0.	2.	2.23607	6.7082			
6	6.	1.	3.	2.44949	7.34847			
7	7.	0.	3.	2.64575	7.93725			
8	8.	1.	4.	2.82843	8.48528			
9	9.	0.	4.	3.	9.			
10	10.	1.	5.	3.16228	9.48683			
11	11.	0.	5.	3.31662	9.94987			
12	12.	0.	5.	3.4641	10.3923			
13	13.	0.	5.	3.60555	10.8167			
14	14.	0.	5.	3.74166	11.225			
15	15.	0.	5.	3.87298	11.619			

Cette copie d'écran montre que l'encadrement $\sqrt{x} < F(x) < 3\sqrt{x}$ continue à être vérifié pour $16 \le x \le 23$.

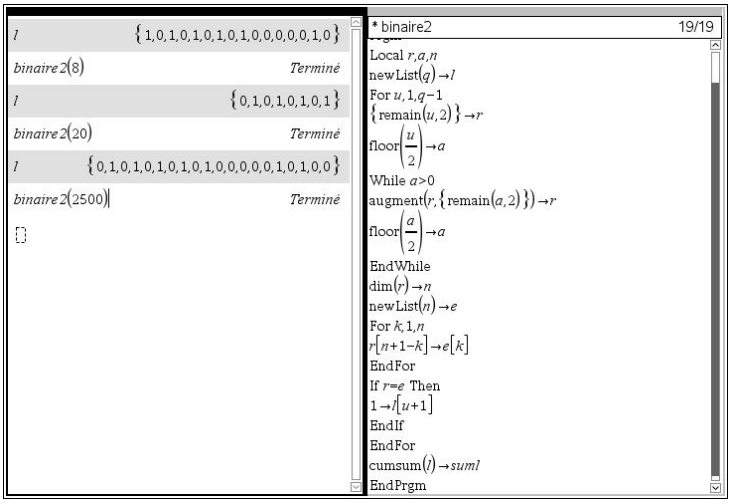
Il est donc vérifié pour tout entier $x > 5$.

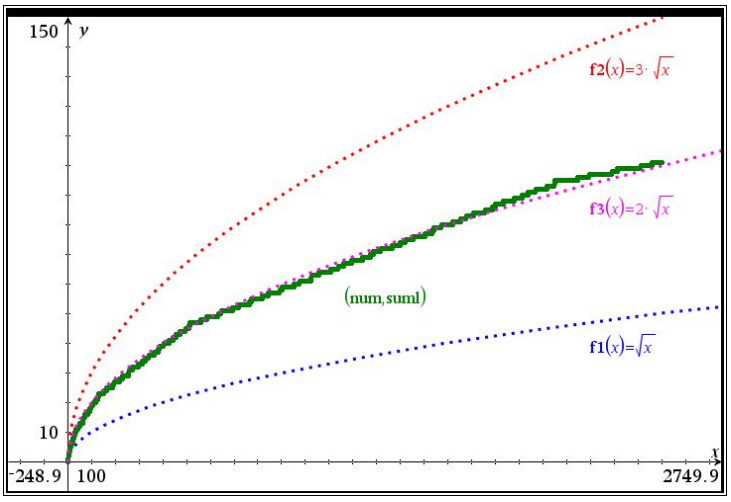
	A num	B l	C suml	D	E	F	G	H
=	=seq('		=cumula	=√(num)	=3*√(num			
13	13.	0.	5.	3.60555	10.8167			
14	14.	0.	5.	3.74166	11.225			
15	15.	0.	5.	3.87298	11.619			
16	16.	1.	6.	4.	12.			
17	17.	0.	6.	4.12311	12.3693			
18	18.	1.	7.	4.24264	12.7279			
19	19.	0.	7.	4.3589	13.0767			
20	20.	0.	7.	4.47214	13.4164			
21	21.	0.	7.	4.58258	13.7477			
22	22.	1.	8.	4.69042	14.0712			
23	23.	0.	8.	4.79583	14.3875			

Complément : Une représentation graphique de la fonction *F*

Le programme **binaire** a de nouveau été modifié, de façon à déterminer maintenant le nombre de palindromes strictement inférieurs à un entier q donné. Ces nombres sont consignés en liste **l**.

Ce programme est exécuté pour diverses valeurs, notamment $q = 2500$



Nous pouvons maintenant représenter graphiquement le nuage de points $\{(x,\ F(x))\ ;\ 1 \le x \le 2500\}$ (en vert ci-contre) et visualiser sa situation par rapport aux fonctions racines intervenant dans l'encadrement.

On remarque en outre que ce nuage semble assez bien ajusté par la fonction $x \mapsto 2\sqrt{x}$, mais la démonstration de ce résultat dépasse le cadre de l'exercice.