SUJET + CORRIGÉ

OLYMPIADES DE MATHÉMATIQUES

ACADÉMIE DE LYON

Classes de première S • 2014

session 2014

OLYMPIADES ACADÉMIQUES

DE MATHÉMATIQUES

CLASSE DE PREMIÈRE

MERCREDI 19 MARS 2014

Durée de l'épreuve : 4 heures

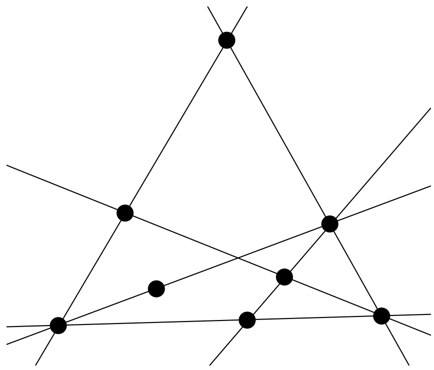
Les quatre exercices sont indépendants.
L'usage de la calculatrice est autorisé.

Ce sujet comporte 6 pages numérotées de 1/5 à 5/5.

Dans ces quatre exercices, toute idée ou élément de démonstration, s'ils sont intéressants et clairement rédigés, seront pris en compte même s'ils ne conduisent pas à une solution. Les exercices sont indépendants et peuvent être traités dans n'importe quel ordre.

Exercice 1. Figures équilibrées. Sujet national

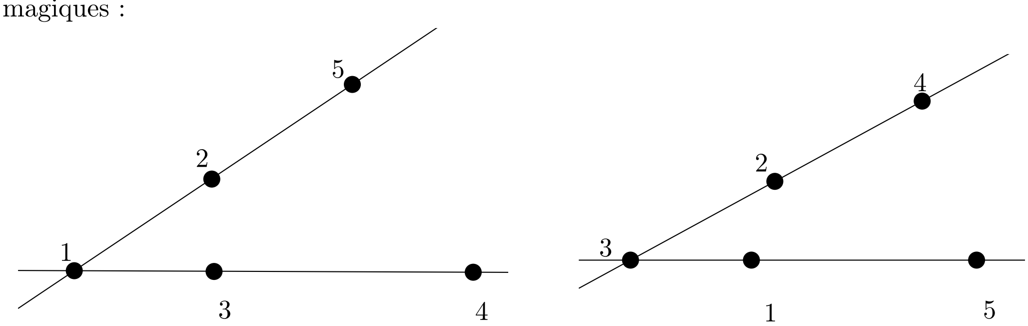
La figure ci-contre est constituée d'un ensemble de droites (ici, 6 droites) et de points marqués (ici, 8 points).
Elle possède la propriété suivante :
Sur chacune de ces droites, il y a exactement trois points marqués.
Une figure vérifiant cette propriété est dite ***équilibrée***.



1. Construire une figure équilibrée constituée :
   (a) de 7 points marqués et 5 droites ;
   (b) de 9 points marqués et 8 droites.

   Dans la suite, on considère une figure équilibrée comportant p points marqués qu'on a numérotés par les entiers de 1 à p.

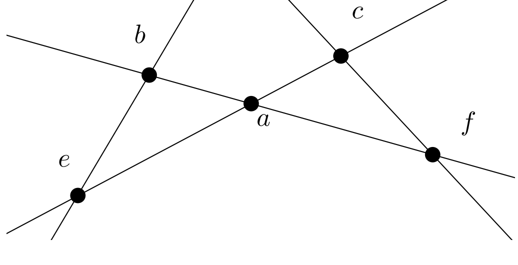
   Cette numérotation est alors dite **magique** s'il existe un entier K, tel que la somme des trois entiers (correspondant à la numérotation des points marqués) de chaque droite de la figure est égale à K. Cet entier K est appelé **constante magique** de la numérotation.
2. Voici par exemple une figure équilibrée (avec 2 droites et 5 points marqués) ayant plusieurs numérotations magiques :



$K = 8$ $K = 9$

   Trouver une numérotation de cette figure qui ne soit pas magique.
   Trouver une numérotation magique de cette figure dont la constante magique n'est ni 8 ni 9.
3. La figure équilibrée ci-dessous est constituée de 6 points et 4 droites. Les entiers 1, 2, 3, 4, 5, 6, affectés aux points marqués dans un certain ordre sont notés a, b, c, d, e, f sur la figure.

   (a) Démontrez que si la figure est magique, de constante magique K, alors $4 \times K = 42$.
   (b) Peut-on trouver une numérotation magique de cette figure ? Si oui, la donner ; si non, expliquer pourquoi.

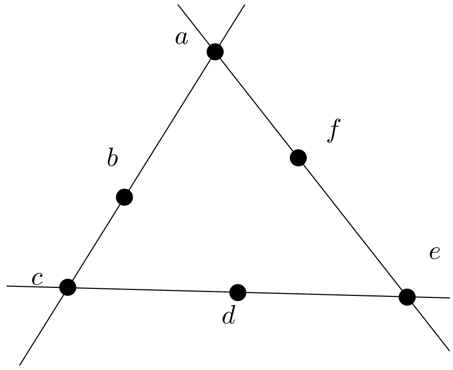


4. La figure équilibrée ci-dessous est constituée de 6 points et 3 droites. Les entiers 1, 2, 3, 4, 5, 6, affectés aux points dans un certain ordre, sont notés à nouveau a, b, c, d, e, f sur la figure.

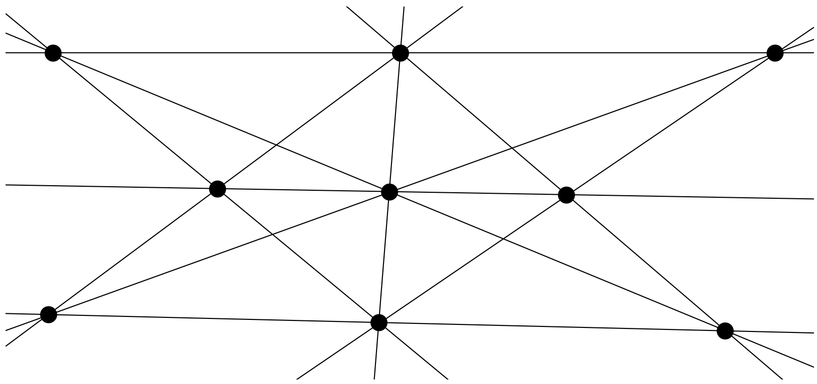
   (a) Démontrer que $a + c + e$ est compris entre 6 et 15.

   (b) Démontrer que si la numérotation de cette figure est magique, de constante K, alors $a + c + e = 3(K - 7)$.

   (c) Déterminer la (les) constante(s) magique(s) pour cette figure.



5. La figure équilibrée ci-dessous est constituée de 9 points et 10 droites.
   Cette figure admet-elle une numérotation magique ?



Exercice national 2 : le plus court possible

Quatre villes - Alençon, Bélançon, Célançon et Délançon - sont situées aux quatre sommets d'un carré dont le côté mesure 100 km.

La Direction Départementale de l'Équipement souhaite les relier les unes aux autres par le réseau routier le plus court possible.

Partie A

« On pourrait construire des routes allant d'Alençon à Bélançon, puis Célançon, puis Délançon » dit l'assistant n°1.

« Ou alors, on pourrait construire deux routes diagonales : une d'Alençon à Célançon et l'autre de Délançon à Bélançon » propose l'assistant n°2.

« Et pourquoi pas, construire une route semi-circulaire complétée par deux segments ? » propose l'assistant n°3.

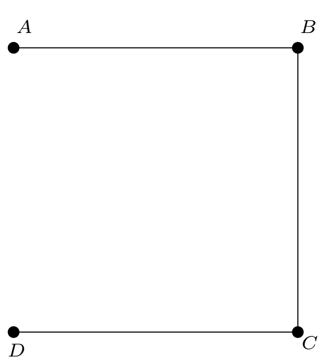


fig. 1
assistant n° 1

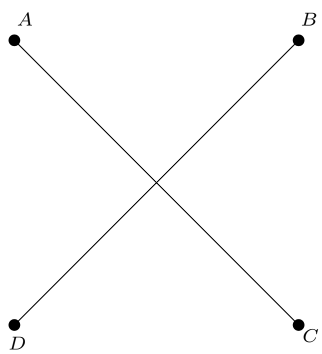


fig. 2
assistant n°2

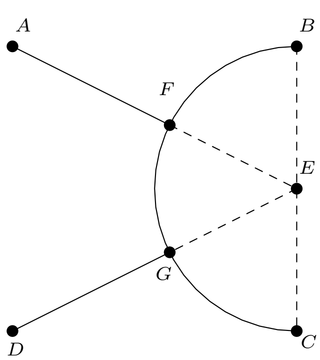


fig. 3
assistant n°3

1. Quel assistant propose le réseau routier le plus court ?

2. Un mathématicien qui était présent propose une autre solution :

« On pourrait relier Alençon et Délançon par un triangle isocèle (triangle AED de la fig. 4), puis Bélançon et Célançon par un triangle isocèle de même forme (triangle BFC) et relier les deux sommets E et F comme le suggère la figure ci-contre » :

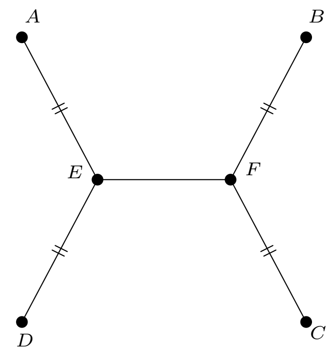


fig. 4

Si $EF = 20$ km, le réseau routier envisagé sur la figure 4 est-il plus court que ceux proposés par les assistants ?

Partie B

Dans cette partie, on souhaite prouver que le réseau routier le plus court est effectivement du modèle proposé par le mathématicien. On cherchera par la suite la longueur EF qui réalise ce plus court chemin.

Rappels de géométrie :

Si A, B, C sont trois points du plan, en notant AB la distance entre A et B :
on a toujours $AB + BC \geq AC$;
on a l'égalité $AB + BC = AC$ si, et seulement si, B appartient au segment $[AC]$.

On admettra aussi que si on trace une courbe quelconque entre A et B, la longueur de la courbe est toujours supérieure ou égale à la longueur du segment $[AB]$ (le plus court chemin étant la ligne droite).

1. Revenons à notre réseau routier.
On admettra qu'on peut sans restreindre la généralité supposer que le réseau solution est formé de deux courbes joignant les sommets opposés (A et C d'une part, B et D d'autre part), et que ces courbes sont à l'intérieur du carré de 100 km de coté, comme dans le dessin suivant.

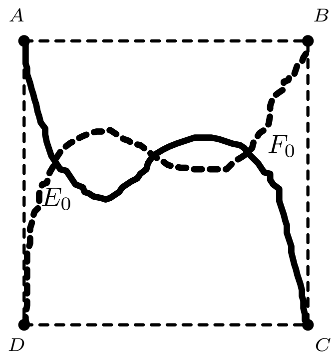


fig. 5

On considère un réseau formé de deux courbes comme sur la figure 5.
En parcourant la route entre Alençon et Célançon en partant d'Alençon, on appelle E_0 le premier point d'intersection rencontré et F_0 le dernier point d'intersection rencontré (ces deux points pouvant être confondus). (fig. 5).
Montrer qu'alors la longueur du réseau de la fig. 5 est supérieure ou égale à celle du réseau suivant, constitué de segments (fig. 6).

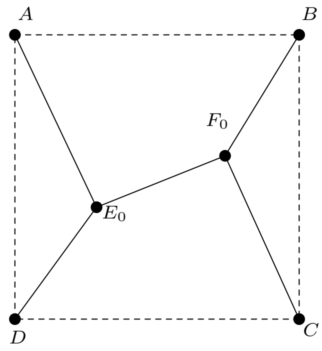


fig. 6

2. On considère les droites Δ_E et Δ_F, parallèles à (AD) passant par E_0 et F_0 (voir figure 7 ci-dessous).

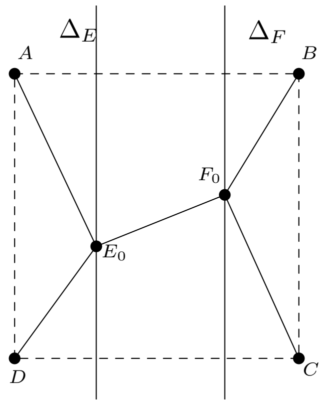


fig. 7

   (a) Déterminer le point E de Δ_E tel que la somme des distances $DE + EA$ soit minimale. On appelle F le point trouvé en faisant le même raisonnement pour F_0.
   (b) Montrer que $EF \leq E_0F_0$.
   (c) Déduire de ce qui précède que le réseau recherché est nécessairement de la forme suivante où E et F sont sur la médiatrice du segment $[AD]$ (fig. 8).

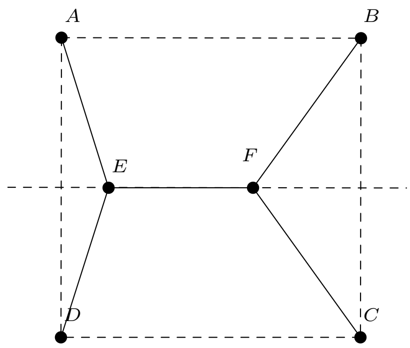


fig. 8

3. On admettra que dans le réseau recherché, les points E et F doivent être de part et d'autre de la médiatrice de $[AB]$.
   (a) Justifier que le réseau recherché doit être symétrique par rapport à la médiatrice de $[AB]$.
   (b) D'après ce qui précède, le réseau recherché a donc la même forme que celui que proposait le mathématicien (fig. 4).
   Pouvez-vous l'aider à déterminer la longueur EF pour laquelle ce type de réseau routier sera le plus court possible ?
   (c) Quelle est alors la valeur de l'angle $\widehat{DEA}$?

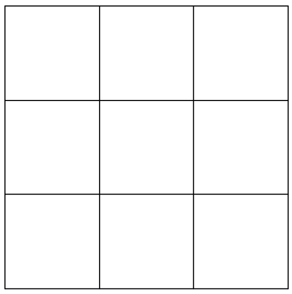
Exercice 3 : Nombres premiers permutables

Un nombre entier, supérieur ou égal à 2 est premier lorsqu'il admet exactement deux diviseurs distincts : 1 et lui-même.

1. Les nombres 51, 67, 779 sont-ils premiers ?
   On dit qu'un nombre entier, supérieur ou égal à 2 est premier permutable lorsque les deux conditions suivantes sont vérifiées :
   – ses chiffres non forcément distincts sont écrits de gauche à droite dans l'ordre croissant et aucun n'est nul,
   – il est premier et tous les nombres obtenus en changeant l'ordre des chiffres sont également premiers.
2. Montrer que 13 est un nombre premier permutable.
3. Montrer que 137 n'est pas un nombre premier permutable.
4. Soit $N > 2$ un nombre premier permutable. Démontrer que tous ses chiffres sont impairs.
5. On appelle E l'ensemble des nombres premiers permutables à un, deux ou trois chiffres.
   Quel est le plus grand élément de E ? Justifier la réponse.
6. On appelle F l'ensemble des nombres premiers permutables dont les chiffres **distincts deux à deux** sont écrits de gauche à droite dans l'ordre strictement croissant.
   Quel est le plus grand élément de F ? Justifier la réponse.

Exercice 4 : Colorier la grille

Une grille $a \times b$ est un quadrillage d'un rectangle qui comporte a cases sur une dimension et b cases sur l'autre.



Une grille 3×3

Dans une telle grille deux cases sont dites voisines si elles se touchent par un côté ou par un sommet.

On appelle case intérieure, toute case qui n'est pas en contact avec un bord de la grille.

On veut colorier les cases de telles grilles en noir ou blanc en utilisant la règle suivante :

– toute case noire intérieure doit avoir exactement cinq cases voisines blanches,
– et toute case blanche intérieure doit avoir exactement quatre cases voisines noires.

1. Réaliser un tel coloriage sur une grille 3×3 avec une case noire au centre, puis avec une case blanche au centre.
2. Montrer qu'une grille 3×3 coloriée en utilisant la règle comporte exactement 4 cases noires.
3. Réaliser un tel coloriage **avec un nombre minimal de cases noires**
   – sur une grille 3×4.
   – sur une grille 3×5.
   – sur une grille 9×9.
   – sur une grille 8×9.
   Justifier dans chacun des cas pourquoi le nombre de cases noires trouvé est minimal.
4. Réaliser un tel coloriage **avec un nombre maximal de cases noires**
   – sur une grille 3×4.
   – sur une grille 3×5.
   – sur une grille 9×9.
   – sur une grille 8×9.
   Justifier dans chacun des cas pourquoi le nombre de cases noires trouvé est maximal.

CORRECTION, LYON 2014

Premier exercice Académique (exo 3)

Olympiades mathématiques, S

1. $51 = 3 \times 17$ donc 51 n'est pas premier.
Pour déterminer si un entier n est premier on peut appliquer l'un des critères suivants :
Critère 1 : Un entier $n > 2$ est premier si et seulement s'il n'est divisible par aucun entier compris entre 2 et $\frac{n}{2}$.
Critère 2 : Un entier $n > 2$ est premier si et seulement s'il n'est divisible par aucun entier compris entre 2 et $\sqrt{n}$. *Critère 3* : Un entier $n > 2$ est premier si et seulement s'il n'est divisible par aucun entier premier compris entre 2 et $\sqrt{n}$.

Programmation du critère 2 pour une calculatrice TI 82

```
Prompt N
1 → T
2 → I
int(√ N)→ B
while I≤B and
T=1
N/I → Q
If Q=int(Q)
Then
0 → T
End
I+1 → I
End
If T=1
Then
Disp "PREMIER"
Else
DISP "PAS PREMIER"
End
```

La liste des entiers premiers dans l'ordre commence par : 2 ; 3 ; 5 ; 7 ; 11 ; 13 ; 17 ; 19 ; 23 ; ...

67 est un entier premier car il n'est divisible par aucun entier compris entre 2 et $\sqrt{67} \approx 8,2$.
779 n'est pas premier car il est divisible par 19 puisque $779 = 19 \times 41$.

2. 13 est un entier premier, de même que 31 donc 13 est un entier premier permutable.
3. 137 est un entier premier mais $371 = 7 \times 53$ donc 137 n'est pas un entier premier permutable.
4. Supposons que $N > 2$ soit premier permutable et que au moins un des chiffres soit pair. En changeant l'ordre des chiffres, on obtiendrait un nombre dont le chiffre des unités serait ce chiffre pair et N ne serait plus un nombre premier. En conclusion si $N > 2$ est un nombre premier permutable tous ses chiffres sont impairs.
5. Supposons que $N > 5$ soit premier permutable et que au moins un des chiffres soit égal à 5 . En changeant l'ordre des chiffres, on obtiendrait un nombre dont le chiffre des unités serait 5 et N ne serait plus un nombre premier. En conclusion les chiffres d'un entier $N > 5$, premier permutable, sont 1, 3, 7 ou 9.
Soit N un nombre premier permutable à trois chiffres. On pose $N = \overline{abc}$ avec $0 < a \leqslant b \leqslant c \leqslant 9$.
   - Si $a = b = c, N = a \times 111$ et N n'est pas premier.
   - Si $a = b$ et $b < c$, les valeurs possibles de N sont 113 ; 117 ; 119 ; 337 ; 339 ; 779. Or 779 n'est pas premier d'après le 1. et 339 n'est pas premier car $339 = 3 \times 113$. Par contre 337 ; 373 et 733 sont des nombres premiers donc 337 est un nombre premier permutable.
   - Si $a < b$ et $b = c$, les valeurs possibles de N sont 133 ; 177 ; 199 ; 377 ; 399 ; 799. $377 = 13 \times 29$, $399 = 3 \times 133$ et $799 = 17 \times 47$ donc 377 ; 399 et 799 ne sont pas des nombres premiers.
   - Si $a < b < c$, les valeurs possibles de N sont 137 ; 139 ; 179 ; 379 . Or 793 n'est pas premier car $793 = 13 \times 61$ donc 379 n'est pas premier permutable.

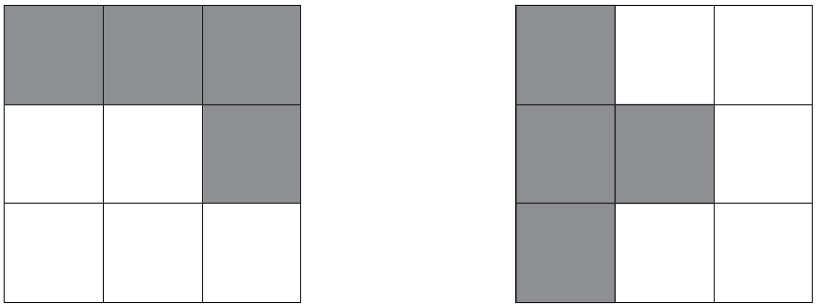
   En conclusion le plus grand élément de **E** est 337.
6. L'ensemble **F** ne contient pas de nombres à cinq chiffres et plus car les chiffres, qui ne peuvent être que 1 ; 3 ; 7 et 9, sont écrits dans un ordre strictement croissant.
L'ensemble F ne contient pas de nombres à quatre chiffres. En effet le seul élément de **F** à quatre chiffres serait 1379. Or 1379 n'est pas premier car $1379 = 7 \times 197$.
L'ensemble **F** ne contient pas de nombre à trois chiffres. Les seuls éléments de **F** à trois chiffres seraient 137 ; 139 ; 179 ; 379. Or 137 n'est pas premier permutable d'après le 3. et 319 ; 791 ; 793 ne sont pas premiers car $319 = 11 \times 29$, $791 = 7 \times 113$ et $793 = 13 \times 61$. Ainsi 139 ; 179 ; 379 ne sont pas premiers permutables non plus.
79 et 97 sont des nombres premiers : le plus grand élément de **F** est 79.

CORRECTION, LYON 2014

Second exercice Académique (exo 4)

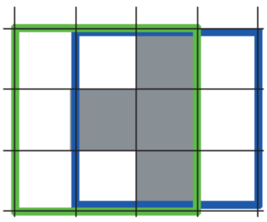
Olympiades mathématiques, S

1.



2. Dans une grille 3×3 il n'y a qu'une case intérieure, la case centrale. Si elle est blanche il faut 4 voisines noires que l'on peut choisir parmi les huit cases du bord. Si elle est noire, cinq de ses voisines sont blanches et il reste 3 cases à colorier en noir. Dans les deux cas, il y a quatre cases noires.
   De façon générale, il faut et il suffit que chaque sous-grille 3×3 contienne exactement quatre cases noires. Pour cela, on peut utiliser des colorations doublement périodiques vérifiant : la case (a,b) est noire $\Leftrightarrow$ la case (a+3,b) est noire $\Leftrightarrow$ la case (a,b+3) est noire.
   Pour de telles colorations, il suffit de vérifier qu'elles sont correctes pour une seule sous-grille de taille 3×3, qui doit donc contenir exactement quatre cases noires.

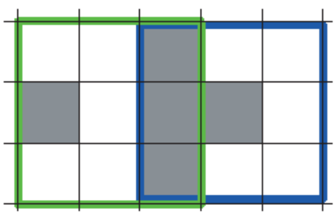
3. a) Une grille 3×4 contient une grille 3×3 et donc au moins quatre cases noires.
   D'autre part, on peut même trouver une coloration doublement périodique d'une grille 3×4 qui ne contient que quatre cases noires :



Les cases noires intérieures ont bien exactement 5 voisines blanches.

   L'idée pour trouver cette solution est la suivante : dans une grille 3×4, on peut construire deux grilles 3×3 dont l'intersection est une grille 3×2. Si on cherche à obtenir le minimum de cases noires il faut que cette intersection en comprenne le plus possible. Essayons avec 4 cases noires.
   Comme dans chaque grille 3×3 il y a exactement 4 cases noires coloriées, chacune des grilles 3×3 serait complète. Il y aurait au total 4 cases coloriées. Si une telle configuration existe, elle est minimale. On vérifie alors qu'il existe une solution comme celle ci-dessus.

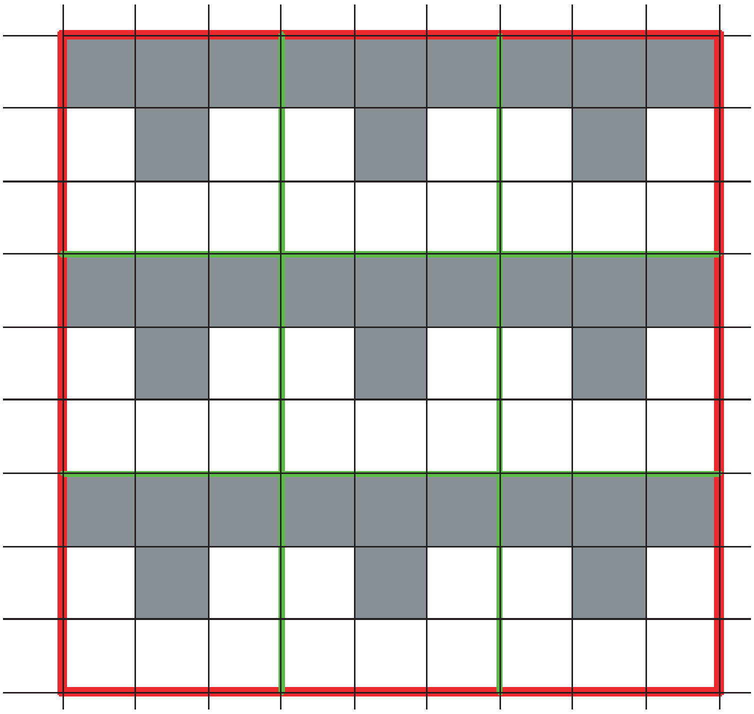
   b) Une grille 3×5 contient une première grille 3×3 contenant quatre cases noires et une seconde grille 3×3 qui n'a que trois cases en commun avec la première. Cette seconde grille 3×3 contient donc au moins une case noire supplémentaire. Au total, il y a donc au moins cinq cases noires.
   D'autre part, on peut même trouver une coloration doublement périodique d'une grille 3×5 qui ne contient que cinq cases noires :



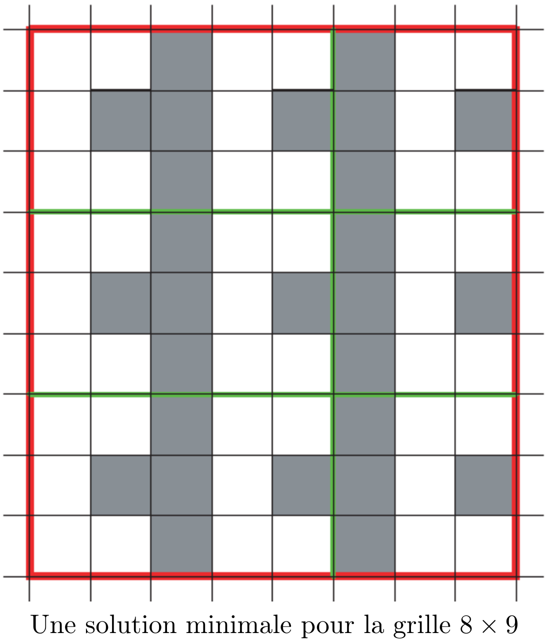
L'idée pour trouver cette solution est la suivante : la plus petite intersection de deux grilles 3×3 que l'on peut inclure dans une grille 3×5 est une grille 3×1 que l'on peut colorier entièrement.

Il reste alors une case noire à colorier dans chacune des grilles 3×3. Il suffit alors de dessiner une telle grille comme celle ci-dessus pour prouver que cette solution est minimale.

c) Pour une grille 3×9 il existe exactement 9 grilles 3×3 dont l'intersection est vide. Dans chacune de ces grilles 3×3 on colorie exactement 4 cases. Exhiber une solution suffit alors pour montrer que 36 cases noires est la solution minimale (et maximale aussi !)



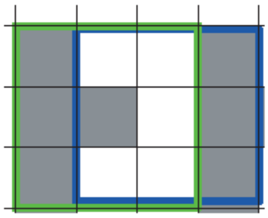
d) Une grille 8×9 est l'union disjointe de trois grilles 3×3 et de trois grilles 3×5. D'après 3.b) elle contient donc au moins $3 \times 4 + 3 \times 5 = 27$ cases noires. D'autre part, on peut même trouver une coloration doublement périodique d'une grille 8×9 qui ne contient que 27 cases noires :



Une solution minimale pour la grille 8×9

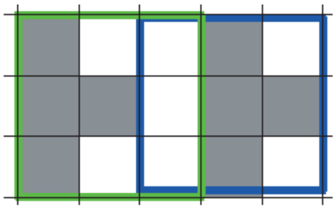
4. Pour déterminer le nombre maximal de cases noires, on procédera de la même manière mais en cherchant à minimiser le nombre de cases noires dans l'intersection, en essayant, par exemple de n'en placer aucune.

a) Une grille 3×4 contient une grille 3×3 (dont quatre cases sont noires) et trois cases supplémentaires qui, a priori, pourraient également être noires.
Il y a donc au plus sept cases noires. D'autre part, on peut même trouver une coloration doublement périodique d'une grille 3×4 qui contient bien sept cases noires :



L'idée pour trouver cette solution est la suivante : pour une grille 3×4, l'intersection est une grille 3×2, par conséquent il reste 3 cases disponibles dans chaque grille 3×3. On essaie avec une case noire dans l'intersection et on obtient la solution maximale de 7 cases noires.

b) On peut couvrir une grille 3×5 à l'aide de deux grilles 3×3. Il y a donc au plus deux fois quatre cases noires, c'est-à-dire huit cases noires. D'autre part, on peut même trouver une coloration doublement périodique d'une grille 3×5 qui contient bien huit cases noires :



L'idée pour trouver cette solution est la suivante : dans un grille 3×5 il est possible de vider de cases noires l'intersection des deux grilles 3×3 ; on obtient alors 8 cases noires au maximum.

c) Comme on l'a vu dans la question précédente, pour une grille 9×9 le minimum et le maximum se confondent à 36 cases noires.

d) Une grille 8×9 est l'union disjointe de trois grilles 3×3 et de trois grilles 3×5. D'après 4.b) elle contient donc au plus $3 \times 4 + 3 \times 8 = 36$ cases noires. D'autre part, on peut même trouver une coloration doublement périodique d'une grille 8×9 qui contient bien 36 cases noires :