SUJET + CORRIGÉ

OLYMPIADES DE MATHÉMATIQUES

ACADÉMIE DE LYON

Classes de première S • 2012

session 2012

OLYMPIADES ACADÉMIQUES

DE MATHÉMATIQUES

CLASSE DE PREMIÈRE

MERCREDI 21 MARS 2012

Durée de l'épreuve : 4 heures

Les quatre exercices sont indépendants.
L'usage de la calculatrice est autorisé.

Ce sujet comporte 4 pages numérotées de 1/4 à 4/4.

Dans ces quatre exercices, toute idée ou élément de démonstration, s'ils sont intéressants et clairement rédigés, seront pris en compte même s'ils ne conduisent pas à une solution. Les exercices sont indépendants et peuvent être traités dans n'importe quel ordre.

Exercice 1 : nombres *digisibles*. Sujet national

On dit qu'un nombre entier est *digisible* lorsque les trois conditions suivantes sont vérifiées :

- aucun de ses chiffres n'est nul ;
- il s'écrit avec des chiffres tous différents ;
- il est divisible par chacun d'eux.

Par exemple,

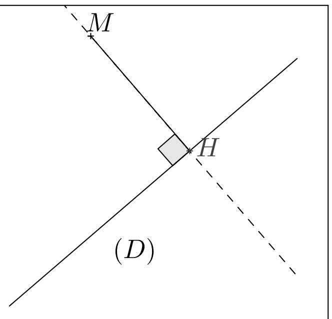
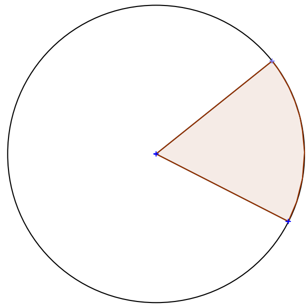
- 24 est *digisible* car il est divisible par 2 et par 4.
- 324 est *digisible* car il est divisible par 3, par 2 et par 4.
- 32 n'est pas *digisible* car il n'est pas divisible par 3.

On rappelle qu'un nombre entier est divisible par 3 si et seulement si la somme de ses chiffres est divisible par 3.

1. Proposer un autre nombre *digisible* à deux chiffres.
2. Proposer un nombre *digisible* à quatre chiffres.
3. Soit n un entier *digisible* s'écrivant avec un 5.
   (a) Démontrer que 5 est le chiffre de ses unités.
   (b) Démontrer que tous les chiffres de n sont impairs.
   (c) Démontrer que n s'écrit avec au plus quatre chiffres.
   (d) Déterminer le plus grand entier *digisible* s'écrivant avec un 5.
4. Soit n un entier *digisible* quelconque.
   (a) Démontrer que n s'écrit avec au plus sept chiffres.
   (b) Si n s'écrit avec sept chiffres, dont un 9, déterminer les chiffres de n.
   (c) Déterminer le plus grand entier *digisible*.

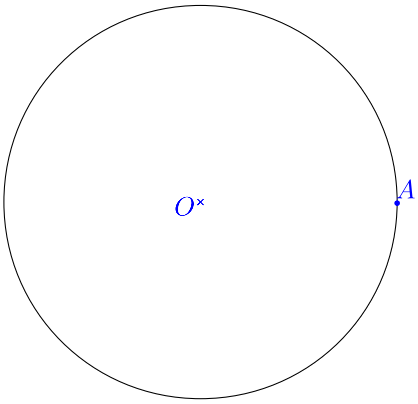
Exercice 2 : cibles. Sujet national

Rappels

• *On appelle* ***distance entre un point*** M ***et une droite*** (D) *la distance* MH*, où* H *est le point d'intersection de* (D) *avec la droite perpendiculaire à* (D) *passant par* M*.*	
• *Dans la figure ci-contre, si le rayon du disque est* R*, et si l'angle du secteur angulaire grisé mesure* α *(en degrés), alors* ***l'aire de la portion de disque*** *grisée vaut* $\pi\alpha R^2/360$*.* *Dans la partie II de l'exercice, on considérera la distance d'un point* M *à* ***un segment*** $[BC]$ *comme étant la distance du point* M *à la droite* (BC)*.*	

Partie I

Soit C un cercle de centre O, A un point de ce cercle et D le disque délimité par ce cercle.



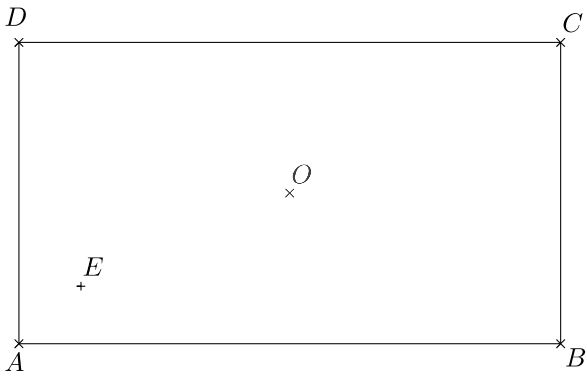
1. Reproduire la figure, et représenter l'ensemble des points du disque équidistants de O et de A.
2. Hachurer l'ensemble des points du disque plus proches de O que de A.
3. Soit M un point déterminé aléatoirement de manière équiprobable sur la surface du disque D. Quelle est la probabilité que M soit plus proche de O que de A ?

Partie II

Soit $ABCD$ un rectangle de longueur $AB = 20$ cm et de largeur $BC = 12$ cm, de centre O.

Soit E un point situé à l'intérieur du rectangle, proche de A, à 2 cm de chaque bord (comme sur la figure ci-après, qui n'est toutefois pas à l'échelle).

Soit M un point déterminé aléatoirement de manière équiprobable à l'intérieur du rectangle $ABCD$.

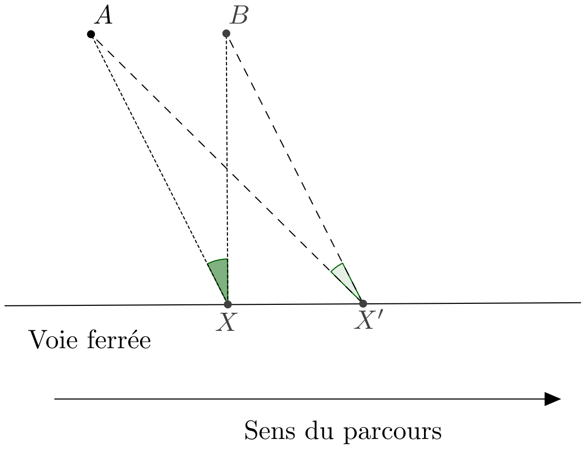


1. Quelle est la probabilité que M soit plus proche du côté $[BC]$ que du côté $[AD]$?
2. (a) Reproduire le rectangle, et représenter l'ensemble des points intérieurs au rectangle et équidistants des côtés $[AB]$ et $[BC]$.
   (b) Hachurer l'ensemble des points intérieurs au rectangle et plus proches du côté $[BC]$ que du côté $[AB]$.
   (c) Quelle est la probabilité que M soit plus proche du côté $[BC]$ que du côté $[AB]$?
3. Quelle est la probabilité que M soit plus proche du côté $[AB]$ que des trois autres côtés $[BC]$, $[CD]$ et $[DA]$?
4. Quelle est la probabilité que M soit plus proche de O que de E ?
5. Quelle est la probabilité que M soit plus proche de O que des quatre sommets A, B, C et D ?

Exercice 3 : les éoliennes. Sujet académique

Xavier voyage dans un train en compagnie de ses deux amies Yasmina et Zoé. La voie ferrée est rectiligne et le train circule à une vitesse constante de 90 km/h.

1. Combien de secondes le train met-il pour parcourir 100 m ?
2. D'un côté de la voie, à une distance de 200m de celle-ci, se trouvent deux éoliennes A et B distantes l'une de l'autre de 100m (A se trouve avant B dans le sens du parcours). Lorsque Xavier se trouve exactement à 200 m de l'éolienne B, c'est à dire lorsque l'angle $\widehat{ABX}$ est droit, il mesure l'angle $\widehat{AXB}$. 4 secondes plus tard, il se trouve dans une position X' et mesure à nouveau l'angle $\widehat{AX'B}$, comme illustré sur la figure ci-dessous.



Montrer que la somme des mesures des angles $\widehat{AXB}$ et $\widehat{AX'B}$ vaut 45°.

3. Sa camarade, Yasmina, a observé avant lui ces deux éoliennes. Toutes les 4 secondes, elle a mesuré l'angle $\widehat{AYB}$, Y étant sa position sur la voie ferrée. Elle a commencé ses mesures 8 secondes avant la première mesure de Xavier et a terminé en même temps que Xavier.
   (a) Faire une figure.
   (b) Calculer la somme des mesures de tous les angles que Yasmina a mesurés.
4. Zoé a effectué ses mesures bien longtemps en avance : elle a commencé 10 minutes avant la première mesure de Xavier et a renouvelé toutes les 4 secondes la mesure de l'angle $\widehat{AZ_0B}$, $\widehat{AZ_1B}$, ... Z_0, Z_1, ... étant les positions de Zoé sur la voie ferrée. Elle a continué ses calculs longtemps après que Xavier s'est arrêté. Démontrer que la somme des mesures de tous les angles qu'elle a mesurés est inférieure à 180°.

Exercice 4 : duels tétraédriques. Sujet académique

Un dé tétraédrique comporte quatre faces comme le dé représenté ci-contre. Lorsqu'on jette un tel dé, le résultat est le nombre inscrit au plus près de la base du tétraèdre. Dans notre exemple, le dé tétraédrique est tombé sur la face 4.

Antoine, Baptiste, Cyril et Diane jouent avec quatre dés tétraédriques réguliers et équilibrés mais qui ne sont pas numérotés de façon habituelle. Ainsi, le dé d'Antoine compte quatre faces numérotées 1, 6, 6 et 6. Avec ce dé, le nombre 1 est obtenu avec la probabilité $\frac{1}{4}$ et le nombre 6 avec la probabilité $\frac{3}{4}$. Le dé de Baptiste est numéroté 4, 4, 5 et 5, celui de Cyril, 3, 3, 3 et 8, et enfin, celui de Diane, 2, 2, 7 et 7.

1. Chaque joueur jette son dé tétraédrique une fois. Qui a le plus de chances d'obtenir un nombre supérieur ou égal à 6 ?
2. Les joueurs commencent une série de duels : Antoine joue contre Baptiste, Baptiste joue contre Cyril, Cyril joue contre Diane, Diane joue contre Antoine. Le gagnant de chaque duel est le joueur qui a obtenu le résultat le plus élevé.
   (a) Montrer que dans le premier duel Antoine gagne contre Baptiste avec une probabilité de $\frac{3}{4}$.
   (b) Donner les probabilités de gain des joueurs dans les trois autres duels.
3. Antoine, Baptiste, Cyril et Diane jettent simultanément leur dé. Celui des quatre joueurs qui obtient le plus grand nombre gagne.
   (a) Montrer que la probabilité que Baptiste gagne est égale à $\frac{3}{32}$.
   (b) Qui a le plus de chances de gagner ce jeu ?
4. Antoine, Baptiste, Cyril et Diane utilisent maintenant d'autres dés, numérotés avec des entiers naturels, de sorte que celui d'Antoine a des faces numérotées a_1, a_2, a_3, a_4 avec $a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq a_4$, celui de Baptiste a des faces numérotées b_1, b_2, b_3, b_4 avec $b_1 \leq b_2 \leq b_3 \leq b_4$, celui de Cyril a des faces numérotées c_1, c_2, c_3, c_4 avec $c_1 \leq c_2 \leq c_3 \leq c_4$, celui de Diane a des faces numérotées d_1, d_2, d_3, d_4 avec $d_1 \leq d_2 \leq d_3 \leq d_4$,

   Nous savons de plus qu'aucun des numéros d'un dé tétraédrique ne se retrouve sur un autre dé tétraédrique. Par conséquent, dans chaque duel, il y a toujours un gagnant et un perdant.
   (a) Montrer que, si $a_2 \leq b_2$, la probabilité qu'Antoine gagne contre Baptiste est inférieure ou égale à $\frac{5}{8}$.
   (b) Existe-t-il des dés tétraédriques tels qu'Antoine gagne contre Baptiste, Baptiste gagne contre Cyril, Cyril gagne contre Diane et Diane gagne contre Antoine, chacun avec une probabilité strictement supérieure à $\frac{5}{8}$?
   (c) Existe-t-il des dés tétraédriques tels qu'Antoine gagne contre Baptiste, Baptiste gagne contre Cyril, Cyril gagne contre Diane et Diane gagne contre Antoine, chacun avec une probabilité égale à $\frac{5}{8}$?

OLYMPIADES ACADEMIQUES DE MATHEMATIQUES session 2012
Correction

CLASSE DE PREMIERE

Mars 2012

1 Nombres *digisibles*

1. 12, 15, 24, 36, 48… et c'est tout. En effet, si le nombre commence par :
   - 1 : le deuxième chiffre doit être un diviseur de ce nombre : 12, 15 sont les deux seuls.
   - 2 : le nombre est forcément pair, donc 24 divisible par 4, 26 n'est pas divisible par 6 et 28 n'est pas divisible par 8.
   - 3 : la somme des chiffres doit être multiple de 3, le deuxième chiffre est donc 3, 6 ou 9 ; on retiendra 36.
   - 4 : le nombre formé par les deux chiffres doit être divisible par 4 : seul 48 est à retenir.
   - 5 : le nombre doit se terminer par 0 ou 5 ; chacun est à rejeter.
   - 6 : le nombre doit être pair et la somme de ses chiffres être un multiple de 3 ; aucun nombre ne peut être retenu.
   - 7 : les seuls nombres divisibles par 7 seraient 70 et 77 qui ne peuvent être retenus.
   - 8 : les seuls nombres divisibles par 8 seraient 80 et 88, là encore à rejeter.
   - 9 : de même 90 et 99 ne peuvent être retenus.

   L'algorithme :

   Pour i allant de 11 à 99 faire

       a chiffre des dizaines de i

       b chiffre des unités de i

       si $a \neq 0$ et $b \neq 0$ et $a \neq b$ et i mod $a = 0$ et i mod $b = 0$ alors

           Retenir i

   Afficher tous les i retenus

   Son implémentation en Python donne bien le résultat attendu :

   ```
    from math import *
   l=[]
   for i in range(11,100):
       a=i%10
       b=(i-i%10)/10
       if a!=0 and b!=0:
           if a!=b:
               if i%a==0 and i%b==0:
                   l.append(i)
   print(l)
   ```

   [12, 15, 24, 36, 48]

2. Pour en trouver un, on peut commencer par 1 comme chiffre des milliers, puis compléter progressivement par les chiffres suivants :

   12.. le nombre doit se terminer par 4, 6 ou 8 ;

   12.4 : le nombre formé par les deux derniers chiffres doit être un multiple de 4 : seul 1284 répond à cette condition, mais n'étant pas divisible par 8 est à rejeter.

   12.6 : le nombre doit être divisible par 3, donc le chiffre manquant doit être multiple de 3 : 3 ou 9 ; comme 1236 est divisible par 1, 2, 3 et 6, il convient.

   Ou bien : le premier nombre à quatre chiffres qui peut prétendre à être digisible est 1234 (qui ne convient pas puisque non divisible par 4) le suivant 1235 ne convient pas puisque non divisible par 3 mais le suivant 1236 est digisible !

   L'algorithme précédent peut être complété :

   Pour i allant de 1234 à 9876 faire

       a chiffre des milliers de i

b chiffre des centaines de i

c chiffre des dizaines de i

d chiffre des unités de i

si $a \neq 0$ et $b \neq 0$ et $c \neq 0$ et $d \neq 0$ et $a \neq b$ et et $a \neq c$ et $a \neq d$ et $b \neq c$ et $b \neq d$ et $c \neq d$ et i mod $a = 0$ et i mod $b = 0$ et i mod $c = 0$ et i mod $d = 0$ alors

afficher i

Afficher le premier i retenu

3. (a) Si le nombre digisible s'écrit avec un 5, il doit être divisible par 5 donc se terminer par 5 ou 0 ; comme 0 ne peut pas être un chiffre d'un nombre digisible, il doit nécessairement se terminer par 5.
   (b) Comme ce nombre se termine par un 5, il est impair et ne sera divisible par aucun nombre pair. Ses chiffres sont donc tous impairs.
   (c) Les chiffres qui peuvent être utilisés sont donc 1, 3, 7 et 9 (et le 5 comme chiffre des unités) ; il a donc au plus 5 chiffres. Supposons qu'il existe un nombre digisible de cinq chiffres se terminant par 5, alors la somme de ses chiffres sera 25 qui n'est ni un multiple de 3 ni de 9 ; ce qui est contradictoire avec le fait qu'il soit digisible. Un nombre digisible contenant un 5 a donc au plus quatre chiffres.
   (d) Pour obtenir le nombre le plus grand, on peut commencer avec 9 comme chiffre des milliers. Le nombre s'écrirait $9ab5$, a et b étant à choisir dans l'ensemble $\{1, 3, 7\}$. Comme pour être divisible par 9 la somme des chiffres doit être un multiple de 9, $a + b + 5$ doit être un multiple de 9 : comme 18 ne pourra être atteint, $a + b + 5 = 9$, par conséquent $a + b = 4$ et $a = 3$ et $b = 1$; 9315 est la solution cherchée.

   Une petite modification de l'algorithme précédent donne tous les nombres digisibles à quatre chiffres et confirme ce résultat :

```
  from math import *
l=[]
for i in range(1234,9876):
    a=(i-i%1000)/1000
    b=(i-a*1000-(i-a*1000)%100)/100
    c=(i-a*1000-b*100-(i-a*1000-b*100)%10)/10
    d=i-a*1000-b*100-c*10
    if a!=0 and b!=0:
        if c!=0 and d!=0:
            if a!=b and a!=c:
                if a!=d and b!=c:
                    if b!=d and c!=d:
                        if i%a==0 and i%b==0:
                            if i%c==0 and i%d==0:
                                l.append(i)
print(l)
```

   [1236, 1248, 1296, 1326, 1362, 1368, 1395, 1632, 1692, 1764, 1824, 1926, 1935, 1962, 2136, 2184, 2196, 2316, 2364, 2436, 2916, 3126, 3162, 3168, 3195, 3216, 3264, 3276, 3492, 3612, 3624, 3648, 3816, 3864, 3915, 3924, 4128, 4172, 4236, 4368, 4392, 4632, 4872, 4896, 4932, 4968, 6132, 6192, 6312, 6324, 6384, 6432, 6912, 6984, 8136, 8496, 8736, 9126, 9135, 9162, 9216, 9315, 9324, 9432, 9612, 9648, 9864]

4. (a) D'après la question précédente, un nombre digisible ayant plus de quatre chiffres ne peut contenir de 5. Il reste 8 chiffres disponibles : 1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 9. Supposons qu'un nombre digisible s'écrive avec 8 chiffres, il faudra tous les utiliser. Or la somme 1+2+3+4+6+7+8+9=40 n'est pas un multiple de 3, ce qui est en contradiction avec le fait qu'il soit digisible.

   Conclusion : un nombre digisible a au plus 7 chiffres.
   (b) Soit n un nombre digisible à 7 chiffres comportant un 9. La somme des six chiffres restant est un multiple de 9. Or :
   - 1+2+3+4+6+7 = 23
   - 1+2+3+4+6+8=24
   - 1+2+3+4+7+8=25

- 1+2+3+6+7+8=27
- 1+2+4+6+7+8=28
- 1+3+4+6+7+8=29
- 2+3+4+6+7+8=30

La seule somme qui soit un multiple de 9 est composée des chiffres : 1, 2, 3, 6, 7, et 8 ; ce sont donc les six chiffres manquants.

Une autre preuve, plus rapide peut aussi être proposée : $1+2+3+4+6+7+8+9=40$ n'est pas divisible par 9, et pour que cette somme devienne divisible par 9, il faut enlever au moins 4, car 36 est divisible par 9.

(c) Il s'agit de bien placer les sept chiffres 1, 2, 3, 6, 7, 8 et 9.

Ce nombre doit évidemment être pair donc se terminer par 2, 6 ou 8.

Pour obtenir le plus grand, si on commence par 9876..., il doit se terminer par 2 : 9876..2 : 9876312 (non divisible par 7) ou 9876132 (non divisible par 8).

Au mieux il peut commencer par 987.... et se terminer par 2 ou 6. On doit donc tester :

9871326 (non divisible par 7)
9871236 (non divisible par 7)
9871362 (non divisible par 7)
9871632 (non divisible par 7)
9872316 (non divisible par 7)
9872136 (non divisible par 7)
9873126 (non divisible par 7)
9873162 (non divisible par 7)
9873216 (non divisible par 7)
9873612 (non divisible par 8)

Le nombre cherché peut donc commencer par 986 ; il reste à placer : 1, 2, 3, 7

Le plus grand serait : 9867312 ; comme il est bien divisible par tous ses chiffres, c'est le plus grand nombre digisible.

Il faut un peu améliorer l'algorithme pour obtenir la liste de tous les nombres digisibles :

```
 from math import *

def Anp(n,p,l=None,rep=None):
    if l is None:l=[]
    if rep is None:rep=[]
    if p==0:
        rep.append(l)
        return
    for k in range(1,n+1):
        if k not in l:
            l1=list(l)
            l1.append(k)
            Anp(n,p-1,l1,rep)
    return rep

def digisible(n):
    mot_n=str(n)
    for i in range(0,len(mot_n)):
        if n%int(mot_n[i])!=0:
            return 1
    return 0
def lance():
    l=[]
    for i in range(2,8):
        for k in Anp(9,i):
            nb=0
```

```
            for j in range(0,len(k)):
                nb=nb+10**j*k[j]
            if digisible(nb)==0:
                l.append(nb)
    return l
resultat=lance()
print sorted(resultat)
```

[12, 15, 24, 36, 48, 124, 126, 128, 132, 135, 162, 168, 175, 184, 216, 248, 264, 312, 315, 324, 384, 396, 412, 432, 612, 624, 648, 672, 728, 735, 784, 816, 824, 864, 936, 1236, 1248, 1296, 1326, 1362, 1368, 1395, 1632, 1692, 1764, 1824, 1926, 1935, 1962, 2136, 2184, 2196, 2316, 2364, 2436, 2916, 3126, 3162, 3168, 3195, 3216, 3264, 3276, 3492, 3612, 3624, 3648, 3816, 3864, 3915, 3924, 4128, 4172, 4236, 4368, 4392, 4632, 4872, 4896, 4932, 4968, 6132, 6192, 6312, 6324, 6384, 6432, 6912, 6984, 8136, 8496, 8736, 9126, 9135, 9162, 9216, 9315, 9324, 9432, 9612, 9648, 9864, 12384, 12648, 12768, 12864, 13248, 13824, 13896, 13968, 14328, 14728, 14832, 16248, 16824, 17248, 18264, 18432, 18624, 18936, 19368, 21384, 21648, 21784, 21864, 23184, 24168, 24816, 26184, 27384, 28416, 29736, 31248, 31824, 31896, 31968, 32184, 34128, 36792, 37128, 37296, 37926, 38472, 39168, 39816, 41328, 41832, 42168, 42816, 43128, 43176, 46128, 46872, 48216, 48312, 61248, 61824, 62184, 64128, 68712, 72184, 73164, 73248, 73416, 73962, 78624, 79128, 79632, 81264, 81432, 81624, 81936, 82416, 84216, 84312, 84672, 87192, 89136, 89712, 91368, 91476, 91728, 92736, 93168, 93816, 98136, 123648, 123864, 123984, 124368, 126384, 129384, 132648, 132864, 132984, 134928, 136248, 136824, 138264, 138624, 139248, 139824, 142368, 143928, 146328, 146832, 148392, 148632, 149328, 149832, 162384, 163248, 163824, 164328, 164832, 167328, 167832, 168432, 172368, 183264, 183624, 184392, 184632, 186432, 189432, 192384, 193248, 193824, 194328, 194832, 198432, 213648, 213864, 213984, 214368, 216384, 218736, 219384, 231648, 231864, 231984, 234168, 234816, 236184, 238416, 239184, 241368, 243168, 243768, 243816, 247968, 248136, 248976, 261384, 263184, 273168, 281736, 283416, 284136, 291384, 293184, 297864, 312648, 312864, 312984, 314928, 316248, 316824, 318264, 318624, 319248, 319824, 321648, 321864, 321984, 324168, 324816, 326184, 328416, 329184, 341928, 342168, 342816, 346128, 348192, 348216, 348912, 349128, 361248, 361824, 361872, 362184, 364128, 364728, 367248, 376824, 381264, 381624, 382416, 384192, 384216, 384912, 391248, 391824, 392184, 394128, 412368, 413928, 416328, 416832, 418392, 418632, 419328, 419832, 421368, 423168, 423816, 427896, 428136, 428736, 431928, 432168, 432768, 432816, 436128, 438192, 438216, 438912, 439128, 461328, 461832, 463128, 468312, 469728, 478296, 478632, 481392, 481632, 482136, 483192, 483216, 483672, 483912, 486312, 489312, 491328, 491832, 493128, 498312, 612384, 613248, 613824, 613872, 614328, 614832, 618432, 621384, 623184, 623784, 627984, 631248, 631824, 632184, 634128, 634872, 641328, 641832, 643128, 648312, 671328, 671832, 681432, 684312, 689472, 732648, 732816, 742896, 746928, 762384, 768432, 783216, 789264, 796824, 813264, 813624, 814392, 814632, 816432, 819432, 823416, 824136, 824376, 831264, 831624, 832416, 834192, 834216, 834912, 836472, 841392, 841632, 842136, 843192, 843216, 843912, 846312, 849312, 861432, 864312, 873264, 891432, 894312, 897624, 912384, 913248, 913824, 914328, 914832, 918432, 921384, 923184, 927864, 931248, 931824, 932184, 934128, 941328, 941832, 943128, 948312, 976248, 978264, 981432, 984312, 1289736, 1293768, 1369872, 1372896, 1376928, 1382976, 1679328, 1679832, 1687392, 1738296, 1823976, 1863792, 1876392, 1923768, 1936872, 1982736, 2137968, 2138976, 2189376, 2317896, 2789136, 2793168, 2819376, 2831976, 2931768, 2937816, 2978136, 2983176, 3186792, 3187296, 3196872, 3271968, 3297168, 3298176, 3619728, 3678192, 3712968, 3768912, 3796128, 3816792, 3817296, 3867192, 3869712, 3927168, 3928176, 6139728, 6379128, 6387192, 6389712, 6391728, 6719328, 6719832, 6731928, 6893712, 6913872, 6971328, 6971832, 7168392, 7198632, 7231896, 7291368, 7329168, 7361928, 7392168, 7398216, 7613928, 7639128, 7829136, 7836192, 7839216, 7861392, 7863912, 7891632, 7892136, 7916328, 7916832, 7921368, 8123976, 8163792, 8176392, 8219736, 8312976, 8367912, 8617392, 8731296, 8796312, 8912736, 8973216, 9163728, 9176328, 9176832, 9182376, 9231768, 9237816, 9278136, 9283176, 9617328, 9617832, 9678312, 9718632, 9723168, 9781632, 9782136, 9812376, 9867312]

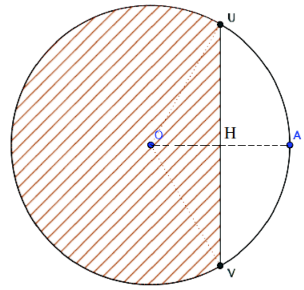
2 Cibles

Partie I

1.

2. On représente le segment $[UV]$ intersection de la médiatrice du segment $[OA]$ avec le disque. Noter que les points du segment $[UV]$ ne sont pas dans l'ensemble hachuré.

3. On cherche le rapport de l'aire hachurée à celle du disque.



$$OU = OV = AU = AV = R$$

Donc les angles $\widehat{UOA}$ et $\widehat{AOV}$ mesurent $60°$.

D'où $OH = \frac{1}{2}R$, $UH = \frac{\sqrt{3}}{2}R$ et $UV = \sqrt{3}R$

Aire du grand secteur angulaire UOV : $\frac{2}{3}\pi R^2$

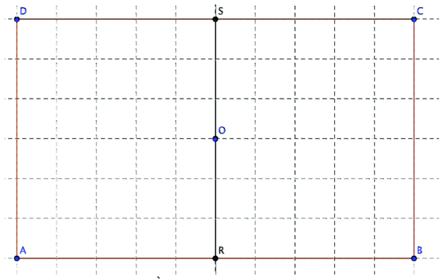
Aire du triangle OUV : $\frac{1}{4}\sqrt{3}R^2$

Aire de la zone hachurée : $\frac{2}{3}\pi R^2 + \frac{1}{4}\sqrt{3}R^2$

Probabilité cherchée : $\frac{2}{3} + \frac{\sqrt{3}}{4\pi}$ environ 0,8044...

Partie II

1. Le rectangle $RBCS$ est l'ensemble des points plus proches du côté $[BC]$ que du côté $[AD]$ et son aire est la moitié de celle du rectangle $ABCD$; la probabilité cherchée est $\frac{1}{2}$.



2. (a)

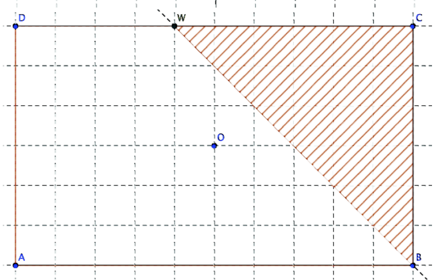
   (b)

   (c) La bissectrice de l'angle droit en B coupe le segment $[CD]$ en W. Le segment $[BW]$ représente l'ensemble des points du rectangle équidistants des côtés $[BC]$ et $[AB]$.

   Le triangle BCW est rectangle et isocèle. Ce triangle, excepté le segment $[BW]$ est l'ensemble des points plus proches du côté $[BC]$ que du côté $[AB]$.

   Aire du triangle : 72 cm^2.

   La probabilité cherchée est alors de $\frac{3}{10}$

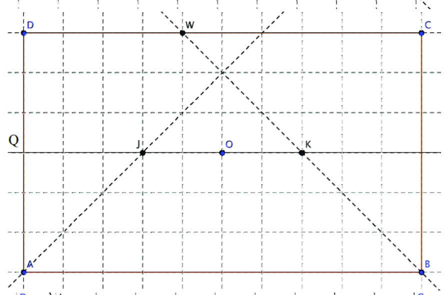


3. Les bissectrices de l'angle droit en B, de l'angle droit en A et la médiatrice du segment $[BC]$ déterminent le trapèze $ABKJ$ qui est l'ensemble des points plus proches de $[AB]$ que des trois autres côtés du rectangle, exception faite des côtés $[BK]$, $[KJ]$ et $[JA]$.

   On a $QJ = QA = 6$ donc $OJ = 10 - 6 = 4$ et $JK = 8$.

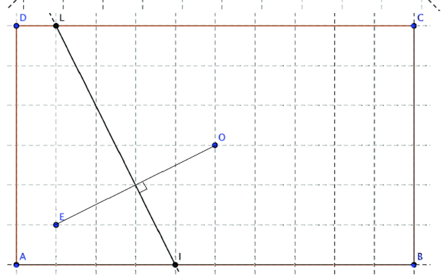
   Aire du trapèze : 84 cm^2.

   Probabilité cherchée : $\frac{7}{20}$



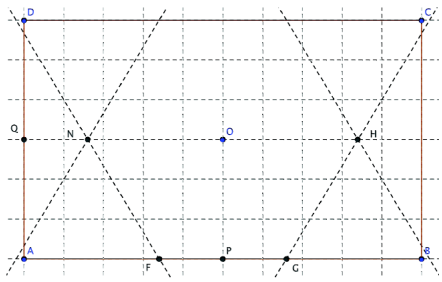
4. La médiatrice du segment $[OE]$ détermine les points I et L respectivement sur les côtés $[AB]$ et $[CD]$.

   On utilise le repère orthonormé d'origine O dans lequel $A(-10, -6)$ et $E(-8, -4)$. Le coefficient directeur de la droite (OE) est 0,5 donc la droite (LI) a une équation de la forme $y = -2x + p$ et passe par le milieu de $[OE]$; ce qui donne $p = -10$. D'où : $L(-8, 6)$ et $I(-2, -6)$. On en déduit que $CL = 18$ et $BI = 12$. L'aire du trapèze $IBCL$ est alors 180 cm^2 et la probabilité cherchée : $\frac{3}{4}$



4-5 Les médiatrices des segments $[OA]$, $[OB]$, $[OC]$ et $[OD]$ déterminent un hexagone, l'ensemble des points plus proches de O que des sommets A, B, C et D.

La médiatrice du segment $[AO]$ coupe $[AB]$ en F et coupe la médiatrice de $[OD]$ en N qui est situé sur l'axe médian du rectangle.



L'aire de l'hexagone est égale à quatre fois celle du trapèze $FPON$ pour des raisons de symétrie.

La médiatrice de $[OA]$ a une équation de la forme $y = -\frac{5}{3}x + q$ et elle passe par le milieu de $[OA]$, ce qui donne $q = -\frac{34}{3}$.

D'où l'abscisse de F : $-\frac{16}{5}$ et celle de N : $-\frac{34}{5}$.

On en déduit : $ON = \frac{34}{5}$ et $PF = \frac{16}{5}$.

$\frac{ON+PF}{2} = 5$

Aire du trapèze $OPFN$: 30 cm^2.

Aire de l'hexagone : 120 cm^2.

Probabilité cherchée : $\frac{1}{2}$

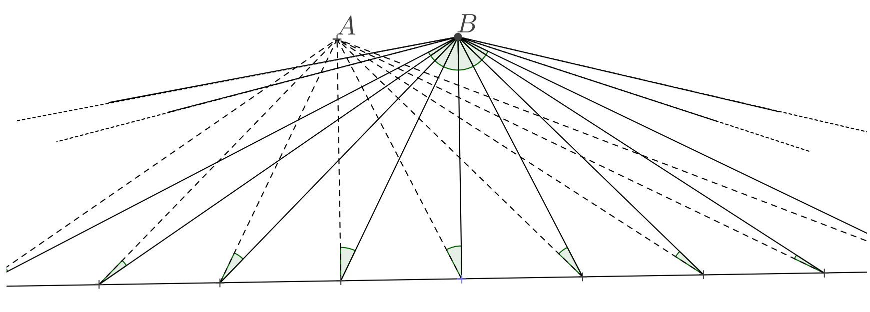
3 Les éoliennes

1. 4 s

2. Appelons C le point d'intersection des deux diagonales du parallélogramme $ABX'X$; comme $XX' = AB = \frac{1}{2}XB$, CXX' est un triangle rectangle isocèle. Donc $\widehat{XCX'}$ vaut $\frac{\pi}{4}$, donc $\widehat{BCX'}$ vaut $\frac{3\pi}{4}$; comme enfin l'angle $\widehat{AXB}$ est égal, comme angle alterne interne, à $\widehat{XBX'}$, la somme des deux angles qui nous intéresse vaut $\frac{\pi}{4}$ ou 45°.

3. $\frac{\pi}{2}$ ou 90° par symétrie.

4. Lorsque Zoé se trouve en une position Z_i, notons α_i l'angle $\widehat{AZ_iB}$. Lorsque Zoé a parcouru 100m, elle se trouve dans la position Z_{i+1} et Z_iABZ_{i+1} est un parallélogramme et l'angle α_i est égal à l'angle $\widehat{Z_iBZ_{i+1}}$. Ainsi, tous les angles α_i se retrouvent comme des angles adjacents de sommet B, comme illustré sur la figure ci-dessous. Quelque soient les points de départ et de fin des mesures, la somme de ces angles est inférieure à un angle plat. Cqfd.



Une autre solution, très élégante serait de considérer l'observateur immobile et les éoliennes se déplaçant à 90km/h dans le sens inverse du déplacement du train ; dans ce cas là, tous les angles considérés ont pour sommet Z (position immobile de Zoë) et sont adjacents ; le point Z étant à l'extérieur de la droite des éoliennes, la somme des angles est inférieure à l'angle plat.

4 Duels tétraédriques

1. Antoine !

2. (a) Un arbre ou un tableau à double entrée donnent, sur les seize résultats (a, b) possibles, deux couples (1,4), deux couples (1,5), six couples (6,4) et six couples (6,5).
   Antoine gagne donc contre Baptiste avec une probabilité égale à $\frac{12}{16} = \frac{3}{4}$.

   (b) Baptiste gagne contre Cyril avec une probabilité égale à $\frac{3}{4}$, Cyril gagne contre Diane avec une probabilité égale à $\frac{5}{8}$, et Diane gagne contre Antoine avec une probabilité égale à $\frac{5}{8}$. On peut remarquer que toutes ces probabilités sont supérieures à $\frac{1}{2}$.

3. On peut utiliser les résultats des duels Antoine-Baptiste et Cyril-Diane pour trouver le nombre de quadruplets (a, b, c, d) de chaque sorte parmi les 256 possibles.

   (a) Baptiste gagne quand les quadruplets (a, b, c, d) sont (1,4,3,2) (il y en a 12) ou (1,5,3,2) (il y en a aussi 12). Donc Baptiste gagne avec une probabilité égale à $\frac{12+12}{256} = \frac{3}{32}$.

   (b) Antoine gagne quand les quadruplets sont (6,4,3,2) (au nombre de 36) ou (6,5,3,2) (également au nombre de 36). Donc Antoine gagne avec une probabilité égale à $\frac{36+36}{256} = \frac{9}{32}$.
   Diane, quant à elle, gagne quand les quadruplets sont (1,4,3,7) ou (1,5,3,7) au nombre de 12 chacun ou (6,4,3,7) ou (6,5,3,7) au nombre de 36 chacun.
   La probabilité que Diane gagne est alors $\frac{12+12+36+36}{256} = \frac{12}{32}$.
   Finalement, on en déduit que Cyril gagne avec une probabilité égale à $1 - \left(\frac{3}{32} + \frac{9}{32} + \frac{12}{32}\right) = \frac{8}{32} = \frac{1}{4}$.
   C'est donc Diane qui a le plus de chance de gagner à ce jeu.

4. (a) $a_2 < b_2$ donc $a_1 \leq a_2 < b_2 \leq b_3 \leq b_4$. Les six résultats (a_1, b_2), (a_2, b_2), (a_1, b_3), (a_2, b_3), (a_1, b_4), (a_2, b_4) donnent Baptiste gagnant. Sur les seize résultats possibles, il y en a donc moins de dix qui donnent Antoine gagnant.
   La probabilité pour qu'Antoine gagne est donc inférieure à $\frac{10}{16} = \frac{5}{8}$.

   (b) Pour avoir cette situation, il faudrait, d'après ce qui précède que $a_2 \geq b_2$, c'est à dire $a_2 > b_2$ puisqu'un même nombre ne peut être présent sur deux dés différents. Puis, $b_2 > c_2$, $c_2 > d_2$ et $d_2 > a_2$: ce qui est impossible. De tels dés ne peuvent donc pas exister.

   (c) Les résultats de la question 2 peuvent faire penser à changer uniquement le dé de Baptiste.
   Si $b_1 > 1$, dans le duel Antoine contre Baptiste, les quatre couples $(1, b_1)$, $(1, b_2)$, $(1, b_3)$, $(1, b_4)$ donnent Baptiste gagnant. Il s'en suit que le nombre de couples qui donnent Antoine gagnant est multiple de 3, et ne peut donc pas être égal à 10. On en déduit alors que $b_1 = 0$.
   b_2 ne peut être supérieur à 6. On peut poser $b_2 = b_3 = 4$; dans ces conditions, b_4 doit être supérieur à 6, par exemple : $b_4 = 9$.
   Une dernière vérification montre que ces dés conviennent pour le duel de Baptiste contre Cyril.
   Cette configuration des quatre dés répond à la question, mais n'est bien sûr pas unique !