OLYMPIADES MATHÉMATIQUES
LYCÉE, PREMIÈRE

ACADÉMIE DE LIMOGES
2020

SUJET + CORRIGÉ

20e OLYMPIADES DE MATHÉMATIQUES

Mercredi 11 mars 2020[1], **2 énoncés (national et académique) en 4 heures, élèves de première générale et technologique**[2] **et de début de terminale**[3]**, inscription auprès de votre professeur de mathématiques avant les vacances d'hiver selon académie.**

Liberté • Égalité • Fraternité
RÉPUBLIQUE FRANÇAISE
MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE

Olympiades académiques de mathématiques 2020

Académie de Limoges

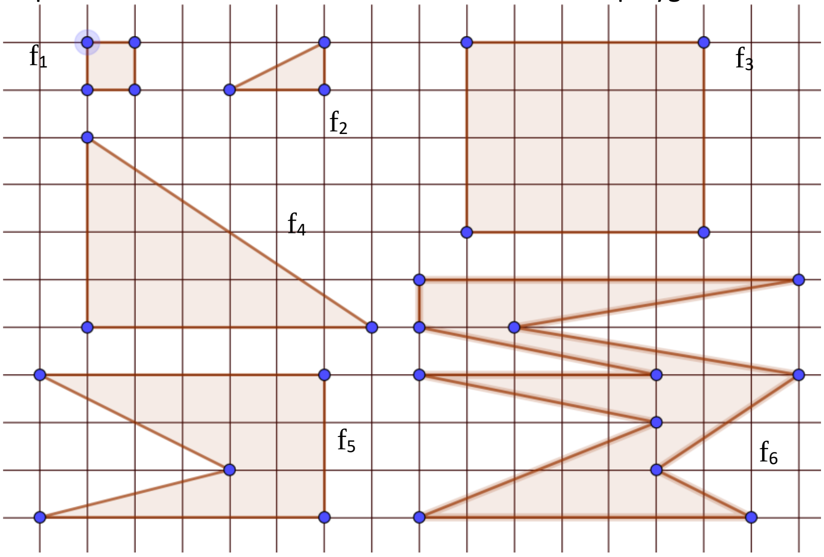
Les calculatrices sont autorisées selon la législation en vigueur.
Il est conseillé aux candidats qui ne pourraient formuler une réponse complète à une question d'exposer le bilan des initiatives qu'ils ont pu prendre.
Les candidats indiqueront leur nom, prénom, classe, série et établissement sur la copie. Les énoncés doivent être rendus au moment de quitter définitivement la salle de composition.

Exercices académiques

Mercredi 11 mars de 10h10 à 12h10

Le théorème de Pick.
On se place dans un repère orthonormé et **tous les polygônes considérés ont leurs sommets à coordonnées entières**.
Ils seront également non-croisés, autrement dit deux côtés non consécutifs ne se coupent pas.

1) Pour un polygone de grande taille, le nombre de points à coordonnées entières (appelés points entiers dans la suite) situés à l'intérieur du polygône donne une approximation grossière de l'aire du polygône.
En ajoutant à ce nombre la moitié du nombre de points entiers situés sur le bord du polygône, on obtient une meilleure approximation. En effet, ces points sont « à moitié dans et à moitié hors » du polygone.



Pour chacune des figures f_1 à f_6 ci-dessus :
a) compter le nombre I de points entiers se trouvant à l'intérieur du polygône et le nombre B de points entiers se trouvant sur le bord du polygone.
b) Calculer $I+\dfrac{B}{2}$.
c) Calculer l'aire du polygone.
d) Recopier et compléter le tableau suivant :

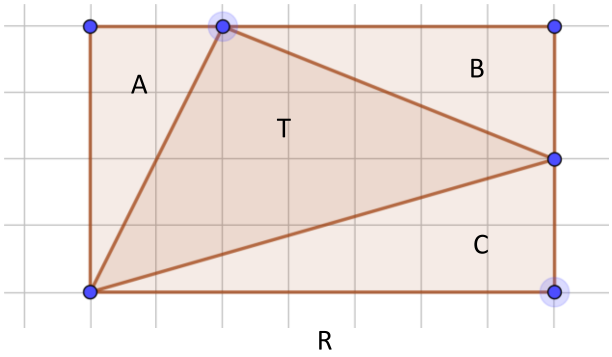
Figure	I	$B/2$	$I + B/2$	Aire
f_1				
f_2				
f_3				
f_4				
f_5				
f_6				

e) Quelle formule peut-on conjecturer permettant de calculer l'aire d'un polygône à partir de I et B ?

2) Considérons un rectangle de largeur λ et de longueur L et dont les côtés sont parallèles aux axes de coordonnées (comme l'est le rectangle de la figure 3).
a) Quelle est son aire ?
b) Quel est le nombre I de points entiers intérieurs au rectangle ?
c) Quel est le nombre *B* de points entiers situés sur le bord du rectangle ?
d) Vérifier la conjecture pour ce rectangle.

3) Considérons un triangle rectangle dont les côtés de l'angle droit sont parallèles aux axes de coordonnées (comme l'est le triangle de la figure 4), et ont pour longueur *m* et *n* respectivement. Soit *k* le nombre de points entiers situés sur l'hypoténuse.
a) Quelle est l'aire de ce triangle ?
b) Quel est le nombre de point entiers situés sur le bord du triangle ?
c) Quel est le nombre de points entiers intérieurs au triangle ?
d) Vérifier la conjecture pour ce triangle.

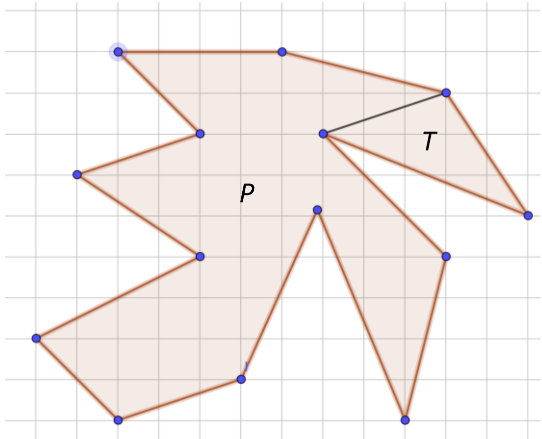
4) Considérons un triangle quelconque *T*. Toutes les situations peuvent plus ou moins se ramener à la figure suivante dans laquelle le triangle *T* est complété pour former un rectangle *R* dont les côtés sont parallèles aux axes en rajoutant jusqu'à trois triangles rectangles *A*, *B* et *C* dont les côtés de l'angle droit sont également parallèles aux axes.



On note I_A, I_B, I_C, I_T, I_R, le nombre de points entiers intérieurs aux triangle *A*, *B*, *C*, au triangle *T* et au rectangle *R*, respectivement.
De même, on note B_A, B_B, B_C, B_T, B_R le nombre de points entiers situés sur le bord des polygônes de la figure.
Enfin, notons $\mathrm{a}(T)$ l'aire du triangle *T*.

a) Etablir une relation entre B_A, B_B, B_C, B_T et B_R.
b) Exprimer I_R en fonctions des données de la question.
c) Démontrer que $\mathrm{a}(T) = I_T + \frac{B_T}{2} - 1$.

5) Nous admettrons qu'on polygône quelconque peut être découpé en un nombre fini de triangles dont les sommets sont des sommets du polygône. D'après 4) la formule marche pour tous les triangles.



Démontrer que, si la formule marche pour un polygône *P*, elle marche également en lui adjoignant un triangle *T* avec lequel *P* a un côté commun.

www.freemaths.fr

OLYMPIADES MATHÉMATIQUES
LYCÉE, PREMIÈRE

CORRECTION !

Épreuve ▪ 2020

1)

Figure	I	$B/2$	$I + B/2$	Aire
$\mathcal{F}_1$	0	2	2	1
$\mathcal{F}_2$	0	2	2	1
$\mathcal{F}_3$	12	9	21	20
$\mathcal{F}_4$	7	6	13	12
$\mathcal{F}_5$	4	9	13	12
$\mathcal{F}_6$	6	14	20	19

Le calcul de la dernière aire vaut plus de points que le reste de la question.

e) Conjecture : $\mathcal{A} = I + \dfrac{B}{2} - 1$

2) a) $\mathcal{A} = \ell \times \mathrm{L}$

b) $I = (\ell - 1) \times (\mathrm{L}\text{-}1)$

c) $B = 2\ell + 2L$

d) $I + \dfrac{B}{2} - 1 = (\ell - 1)(L-1) + \dfrac{2\ell + 2L}{2} - 1 = \ldots = \ell L = \mathcal{A}$

3) a) $\mathcal{A} = \dfrac{m \times n}{2}$

b) $B = m + n + k - 1$

c) Il faut prendre le nombre de points intérieurs au rectangle obtenu en « complétant » le triangle.
A ce nombre, on enlève les points entiers intérieurs au rectangle et se trouvant sur l'hypoténuse ; il y en a k-2.
On divise par 2 pour retrouver les points intérieurs au triangle.

$I = \dfrac{(m-1) \times (n-1) - (k-2)}{2}$

d) $I + \dfrac{B}{2} - 1 = \dfrac{(m-1) \times (n-1) - (k-2)}{2} + \dfrac{m+n+k-1}{2} - 1 = \ldots = \dfrac{mn}{2} = \mathcal{A}$

4) a) $B_R = B_A + B_B + B_C - B_T$

b) $I_R = I_A + I_B + I_C + I_T + B_T - 3$

c) $\mathcal{A}_T = \mathcal{A}_R - \mathcal{A}_A - \mathcal{A}_B - \mathcal{A}_C$

On applique ce que l'on a démontré aux questions 2 et 3 pour les rectangles et triangles rectangles particuliers :

$$\mathcal{A}_T = \left(I_R + \frac{B_R}{2} - 1\right) - \left(I_A + \frac{B_A}{2} - 1\right) - \left(I_B + \frac{B_B}{2} - 1\right) - \left(I_C + \frac{B_C}{2} - 1\right) = I_R - I_A - I_B - I_C + \frac{B_R - B_A - B_B - B_C}{2} + 2$$

$$\underset{\substack{\text{on remplace} \\ I_R \text{ et } B_R \text{ en} \\ \text{utilisant a) et b)}}}{=} \left(\cancel{I_A} + \cancel{I_B} + \cancel{I_C} + I_T + B_T - 3\right) - \cancel{I_A - I_B - I_C} + \frac{\left(\cancel{B_A + B_B + B_C} - B_T\right) - \cancel{B_A - B_B - B_C}}{2} + 2 = I_T + \frac{B_T}{2} - 1$$

On a démontré la conjecture.

5) Notons *F* le grand polygone (P+T). Utilisons les notations usuelles de cet exercice :
B_F, B_P, B_T, I_F, I_P, I_T, $\mathcal{A}_F$, $\mathcal{A}_P$ et $\mathcal{A}_T$.

On a $\mathcal{A}_F = \mathcal{A}_P + \mathcal{A}_T = I_P + \dfrac{B_P}{2} - 1 + I_T + \dfrac{B_T}{2} - 1 = I_P + I_T + \dfrac{B_P + B_T}{2} - 2$

Soit *k* le nombre de points entiers se trouvant sur le côté commun à P et T, sans côté les 2 sommets.

Alors $I_F = I_P + I_T + k$ et $B_F = B_P + B_T - 2k - 2$.

Donc $\mathcal{A}_F = I_F - k + \dfrac{B_F + 2k + 2}{2} - 2 = I_F + \dfrac{B_F}{2} - 1$.