SUJET + CORRIGÉ

OLYMPIADES DE MATHÉMATIQUES

ACADÉMIE DE LIMOGES

Classes de première S • 2018

Olympiades académiques de mathématiques 2018

Académie de Limoges

Les calculatrices sont autorisées selon la législation en vigueur.

Il est conseillé aux candidats qui ne pourraient formuler une réponse complète à une question d'exposer le bilan des initiatives qu'ils ont pu prendre.

Les candidats indiqueront leur nom, prénom, classe, série et établissement sur la copie. Les énoncés doivent être rendus au moment de quitter définitivement la salle de composition.

Exercices académiques

Mercredi 14 mars de 10h10 à 12h10

Tous les candidats traitent **deux exercices.** Chaque candidat doit résoudre individuellement les deux exercices. Les élèves de la série S doivent traiter les exercices 1 et 2 dans leur intégralité. Ceux des autres séries doivent traiter l'exercice 1 dans son intégralité et uniquement les questions 1 à 4 de l'exercice 2.

Exercice académique 1 (à traiter par tous les candidats)

Opérations sur tableaux et matrices de Leslie

Partie 1 : Opérations sur des tableaux

Dans cette partie, nous allons définir le « produit » d'un tableau 2 × 2 (c'est-à-dire 2 lignes et 2 colonnes) par un tableau 2 × 1 comme suit :

$$\begin{pmatrix} \alpha & \gamma \\ \lambda & \kappa \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \mu \\ \nu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha\mu + \gamma\nu \\ \lambda\mu + \kappa\nu \end{pmatrix}$$

1) Effectuer le produit

$$\begin{pmatrix} 3 & -5 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

2) Trouver les valeurs de x et y vérifiant :

$$\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Partie 2 : La population d'hirondelles de cheminée (*Hirundo Rustica*) de Pierre-Buffière présente les caractéristiques suivantes. En premier lieu, elles font toutes leur retour dans le village le 31 mars exactement, pour s'accoupler.

En outre :

- Les femelles, nées le printemps précédent, âgées ainsi de 1 an, donnent toutes naissance à 2 individus ;
- Les autres femelles, âgées de 2 ans et plus, donnent naissance à 4 individus ;
- Seulement 20% des nouveau-nés de l'année précédente atteignent l'âge de 1 an et font ainsi leur retour au village ;
- 80% des jeunes d'un an atteignent l'âge de 2 ans ;
- 60% des oiseaux de 2 ans et plus survivent d'une année sur l'autre.

On suppose, pour simplifier, que le nombre de femelles est égal au nombre de mâles.

Un chercheur en dynamique des populations de l'université de Limoges vient chaque 31 mars à Pierre-Buffière et dénombre les individus de 1 an d'une part, et ceux de 2 ans et plus d'autre part (notons que les nouveau-nés ne sont pas encore nés).

En 2010, ce chercheur décompte 200 jeunes hirondelles de 1 an, et 800 hirondelles de 2 ans et plus. Il note J_0 le nombre de jeunes en 2010, et A_0 le nombre d'hirondelles de 2 ans et plus : $J_0 = 200$ et $A_0 = 800$.

I. En 2011 :
   1) On s'intéresse ici au nombre de jeunes hirondelles en 2011 :
      a) À combien d'oisillons vont donner naissance les jeunes hirondelles de 2010 ? Combien feront leur retour à Pierre-Buffière en 2011 ?
      b) À combien d'oisillons vont donner naissance les hirondelles de 2 ans et plus de 2010 ? Combien feront leur retour à Pierre-Buffière en 2011 ?
      c) Combien, de ce fait, le chercheur comptera-t-il de jeunes hirondelles en 2011 ? Il note cette valeur J_1.

   2) On s'intéresse ici au nombre d'hirondelles de 2 ans et plus en 2011 :
      a) Déterminer le nombre de jeunes individus de l'année 2010 qui atteignent l'âge de 2 ans en 2011.
      b) Déterminer le nombre d'oiseaux de 2 ans et plus de l'année 2010 qui rejoignent Pierre-Buffière en 2011.
      c) Combien, de ce fait, le chercheur comptera-t-il d'hirondelles de 2 ans et plus en 2011 ? Il note cette valeur A_1.

II. Pour l'année 2012, en procédant de la même manière, déterminer le nombre d'hirondelles de 1 an, noté J_2, et le nombre d'hirondelles de 2 ans et plus, noté A_2, observées par le chercheur.

Partie 3 : On s'intéresse dans cette partie à l'évolution de la répartition des âges des hirondelles de cette population.

Pour cela, on reprendra les notations précédentes :

- J_n est le nombre de jeunes hirondelles de l'année 2010+n ; J_{n+1} est ainsi le nombre de jeunes hirondelles de l'année suivante ;
- A_n est le nombre d'hirondelles de 2 ans et plus de l'année 2010+n ; A_{n+1} est, de même, le nombre d'hirondelles de 2 ans et plus de l'année suivante.

1) Montrer, en suivant le même raisonnement que dans la partie 2, que : $J_{n+1} = 0{,}2J_n + 0{,}4A_n$.

2) Montrer, de même, que : $A_{n+1} = 0{,}8J_n + 0{,}6A_n$.

3) Recopier sur la copie et compléter en utilisant le « produit » défini dans la partie 1 :

$$\begin{pmatrix} J_{n+1} \\ A_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} J_n \\ A_n \end{pmatrix}$$

On note M_1 le tableau 2 × 2 obtenu.

4) Vérifier successivement que :

$$\begin{pmatrix} J_{n+2} \\ A_{n+2} \end{pmatrix} = M_1 \times \begin{pmatrix} J_{n+1} \\ A_{n+1} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} J_{n+2} \\ A_{n+2} \end{pmatrix} = M_1 \times M_1 \times \begin{pmatrix} J_n \\ A_n \end{pmatrix}$$

5) On définit un second « produit » de deux tableaux 2 × 2 cette fois, de la manière suivante :

$$\begin{pmatrix} \alpha & \gamma \\ \lambda & \kappa \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \mu & \varphi \\ \upsilon & \psi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha\mu + \gamma\upsilon & \alpha\varphi + \gamma\psi \\ \lambda\mu + \kappa\upsilon & \lambda\varphi + \kappa\psi \end{pmatrix}$$

Déterminer M_2 le tableau 2 × 2 vérifiant : $M_2 = M_1 \times M_1$
On a ainsi :

$$\begin{pmatrix} J_{n+2} \\ A_{n+2} \end{pmatrix} = M_2 \times \begin{pmatrix} J_n \\ A_n \end{pmatrix}$$

6) Déterminer, de manière analogue, $M_3 = M_1 \times M_1 \times M_1$

7) Rappelons que $J_0 = 200$ et $A_0 = 800$ (Partie 2). Effectuer les 3 produits suivants et dire ce que représente chacun de ces résultats.

$M_1 \times \begin{pmatrix} J_0 \\ A_0 \end{pmatrix}$ $M_2 \times \begin{pmatrix} J_0 \\ A_0 \end{pmatrix}$ $M_3 \times \begin{pmatrix} J_0 \\ A_0 \end{pmatrix}$

8) Quelle sera la répartition du nombre de jeunes hirondelles et d'hirondelles de 2 ans et plus dans cette population en 2018 ? Comment semble évoluer la population ?

Exercice académique 2

(À traiter dans son intégralité par les candidats de la série S)

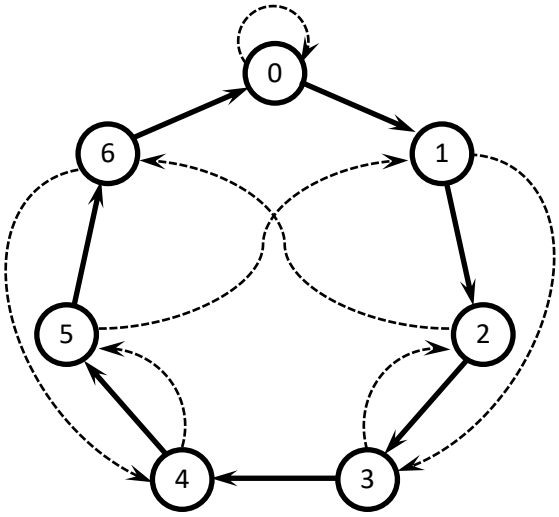
(Les candidats des séries autres que S ne traitent que les questions 1 à 4)

Le jeu de l'oie de la divisibilité

(D'après Tangente Magazine n° 174 page 36).

On se propose d'étudier la divisibilité d'un entier par un autre à travers un « jeu de l'oie » dont voici la règle.

Supposons par exemple que l'on souhaite savoir si un nombre est divisible par 7.



Étape 1 : Placez-vous sur la case 0.

Étape 2 : En suivant les flèches pleines, déplacez-vous dans le sens des aiguilles d'une montre d'autant de cases que le premier chiffre du nombre (par exemple, le premier chiffre de 973 est 9). Si ce chiffre est 0, ne vous déplacez pas.

Étape 3 : À partir de cette case, suivez la flèche en pointillés qui mène à une nouvelle case ; par exemple, le 2 mène au 6 et le 0 mène à lui-même.

Étape 4 : Répétez les opérations des étapes 2 et 3 pour le deuxième chiffre du nombre puis pour les suivants jusqu'à l'**avant-dernier chiffre inclus**.

Étape 5 : Pour le dernier chiffre du nombre, réaliser uniquement l'étape 2.

Étape 6 : Votre nombre est divisible par 7 si et seulement si vous terminez votre parcours sur la case 0.

Exemple : 902 est-il divisible par 7 ?

On part de 0. On parcourt 9 flèches pleines, ce qui nous mène en 2. La flèche pointillée nous emmène en 6.

Le chiffre suivant est 0, donc on reste en 6. Du 6, nous allons au 4. Enfin le dernier chiffre qui est 2 nous envoie en 6.

902 n'est pas divisible par 7.

En revanche, si le dernier chiffre avait été 3 plutôt que 2, le parcours précédent se serait terminé sur la case 0.

Le nombre 903 est divisible par 7.

Le **parcours du nombre 902** est donc le suivant : 0 → 2 → 6 → 6 → 4 → 6.

1) a) Donner le parcours de chacun des nombres suivants : 45, 91, 1207 et 2513.

b) Lesquels sont divisibles par 7 ?

2) Soit A un entier constitué de chiffres tous égaux à 1 (ex : 11, 111, 111, etc.)

À quelle condition portant sur le nombre de chiffres de A celui-ci est-il divisible par 7 ?

3) Le nombre B = 2 000 000 000 000 000 005 est-il divisible par 7 ?

4) a) Proposer un nombre ayant le parcours suivant : 0 → 2 → 6 → 6 → 4 → 5 → 1 → 2.

b) Y en a-t-il d'autres ? Si oui, combien ?

La suite de l'exercice est à traiter seulement par les candidats de la série S

Pour construire d'autres jeux de l'oie, voici comment les flèches pointillées sont construites pour la divisibilité par 7 :

- La flèche partant de la case 1 conduit à la case égale au reste de la division de 1×10 par 7, soit la case 3.
- La flèche partant de la case 2 conduit à la case égale au reste de la division de 2×10 par 7, soit la case 6.
- De même pour les autres cases : la case partant d'un nombre n conduit à la case égale au reste de la division de n×10 par 7.

5) Construire le jeu de l'oie de la divisibilité par 8.

6) Construire le jeu de l'oie de la divisibilité par 11.

7) a) Construire le jeu de l'oie de la divisibilité par 5.

b) On rappelle le critère de divisibilité par 5 : un entier est divisible par 5 si et seulement si son chiffre des unités est 0 ou 5. Expliquer comment ce critère peut se déduire du jeu de l'oie.

CORRECTION OLYMPIADES

EXERCICES ACADÉMIQUES

LIMOGES 2018

Exercice 1 : Opérations sur les tableaux et matrices de Leslie

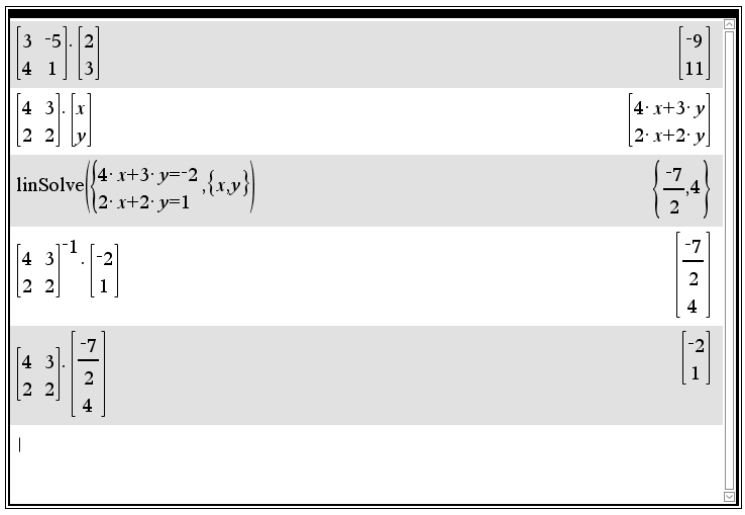
Cet exercice fournit l'occasion de s'initier à la pratique du « calcul matriciel », notion qui semble, dans les nouveaux programmes, avoir été repoussée à l'année de Terminale. Le « produit » d'un tableau 2x2 par un tableau 2x1 tel qu'il est défini dans l'énoncé de cet exercice n'est autre qu'un produit matriciel qui obéit à ce que l'on appelle parfois la « règle LICO » (LICO pour LIgne-COlonne), consistant à effectuer les produits terme à terme des éléments d'une ligne par les éléments d'une colonne puis ajouter les nombres obtenus.

Quant au « modèle de Leslie » dont voici un exemple, il sert à décrire la dynamique d'une population structurée par classes d'âges (ici les jeunes hirondelles de un an et les adultes de deux ans ou plus).

Le lecteur curieux, et pourvu d'une calculatrice scientifique ordinaire, a tout intérêt à consulter le menu « Matrices » de sa calculatrice, il y trouvera la procédure de saisie d'une matrice et les procédures relatives aux opérations usuelles sur les matrices. Il ne fera qu'anticiper sur l'étude de notions fondamentales qu'il retrouvera plus tard, inexorablement, dans tout cursus scientifique.

Partie 1 : Opérations sur les tableaux

1. $\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -9 \\ 11 \end{bmatrix}$



2. $\begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4x+3y \\ 2x+2y \end{bmatrix}$.

Ce produit est égal à $\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$ si et seulement si le couple $(x,\ y)$ est solution du système d'équations à deux inconnues $\begin{cases} 4x+3y=-2 \\ 2x+2y=1 \end{cases}$, c'est-à-dire si et seulement si le couple $(x,\ y)$ est le couple : $\left(-\frac{7}{2},\ 4\right)$.

Les valeurs de x et de y qui vérifient $\begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$ sont les valeurs : $x = -\frac{7}{2}$; $y = 4$

Partie 2 : Quand 1000 hirondelles font un printemps

La situation initiale est celle de l'année 2010. Le chercheur dénombre cette année-là 200 jeunes hirondelles âgées de un an et 800 hirondelles de deux ans et plus. $J_0 = 200$; $A_0 = 800$.
Le nombre de femelles étant égal au nombre de mâles, il y a 100 femelles âgées de un an et 400 femelles de 2 ans ou plus.

I. L'année 2011

1. On dénombre dans cette question les hirondelles nées en 2010 et qui auront un an en 2011.
1.a. Il y a 100 jeunes hirondelles femelles, chacune donnant naissance à 2 oisillons. Ces hirondelles nées en 2010 vont donner naissance à 200 jeunes oisillons.
Etant donné que seulement 20 % des oisillons retournent dans le village à l'âge de un an, 40 jeunes oisillons issus de jeunes femelles feront leur retour à Pierre-Buffière.

1.b. Il y a 400 hirondelles femelles de deux ans et plus, chacune donnant naissance à 4 oisillons. Ces hirondelles adultes en 2011 vont donner naissance à 1600 jeunes oisillons, dont 20 % retourneront dans le village. $0{,}2 \times 1600 = 320$ oisillons issus de femelles de deux ans ou plus feront leur retour à Pierre-Buffière.

1.c. Le chercheur devrait dénombrer $320 + 40 = 360$ jeunes hirondelles âgées de un an en 2011. $J_1 = 360$

2. On dénombre dans cette question les hirondelles âgées de deux ans ou plus en 2011.
2.a. Il y avait 200 jeunes hirondelles en 2010, dont 80 % reviennent en 2011 à l'âge de deux ans ; le nombre d'hirondelles qui atteindront 2 ans en 2011 et reviendront est égal à $0{,}8 \times 200 = 160$.

2b. 60 % des hirondelles de deux ans ou plus reviennent l'année suivante Il y en avait 800 en 2010 ; le nombre d'oiseaux de 2 ans et plus en 2010 qui reviendront en 2011 est égal à $0{,}6 \times 800 = 480$.

2.c. Le chercheur devrait dénombrer $160 + 480 = 640$ hirondelles âgées de plus de 2 ans en 2011. $A_1 = 640$

II. L'année 2012

Il y a $\frac{360}{2} = 180$ jeunes hirondelles femelles âgées de un an, chacune donnant naissance à 2 oisillons. Les jeunes hirondelles de 2011 vont donner naissance à 360 jeunes oisillons. Etant donné que seulement 20 % des oisillons retournent dans le village à l'âge de un an, $0{,}2 \times 360 = 72$ jeunes oisillons issus de jeunes femelles feront leur retour en 2012 à Pierre-Buffière.

Il y a $\frac{640}{2} = 320$ hirondelles femelles de deux ans et plus, chacune donnant naissance à 4 oisillons. Les hirondelles de plus de 2 ans en 2011 vont donner naissance à 1280 jeunes oisillons, dont 20 % retourneront dans le village. 256 oisillons issus de femelles de deux ans ou plus feront leur retour à Pierre-Buffière.
Le chercheur devrait dénombrer $72 + 256 = 328$ jeunes hirondelles âgées de un an en 2012. $J_2 = 328$

Il y avait 360 jeunes hirondelles en 2011, dont 80 % atteindront l'âge de deux ans et reviendront l'année suivante. Le nombre de jeunes individus qui atteindront 2 ans et reviendront en 2012 est égal à $0{,}8 \times 360 = 288$.

Il y avait 640 hirondelles de plus de deux ans en 2011, dont 60 % reviendront en 2012.
Le nombre d'oiseaux de 2 ans et plus en 2011 qui reviendront en 2012 est égal à $0{,}6 \times 640 = 384$

Le chercheur devrait dénombrer $288 + 384 = 672$ hirondelles âgées de plus de 2 ans en 2012. $A_2 = 672$

Partie 3 : Un modèle d'évolution

1. Soit J_n le nombre d'hirondelles âgées de un an au cours de l'année $2010+n$ et A_n le nombre d'hirondelles de deux ans ou plus en $2010+n$. Le nombre d'oisillons issus des jeunes femelles est égal à : $\left(\frac{1}{2}J_n\right)\times 2 = J_n$. Le nombre d'oisillons issus des femelles de deux ans ou plus est égal à : $\left(\frac{1}{2}A_n\right)\times 4 = 2A_n$. Le nombre total de naissances est égal à $J_n + 2A_n$. Puisque 20 % des oisillons reviennent l'année d'après, le nombre J_{n+1} d'hirondelles qui reviendront l'année $2010+n+1$ à l'âge de un an est :

$$J_{n+1} = 0{,}2\times(J_n + 2A_n) = 0{,}2J_n + 0{,}4A_n$$

2. 80 % des J_n hirondelles âgées de un an au cours de l'année $2010+n$ et 60 % des A_n hirondelles plus âgées reviendront l'année suivante. Le nombre d'hirondelles de deux ans ou plus qui reviendront en $2010+n+1$ est : $0{,}8J_n + 0{,}6A_n$ (parmi elles, $0{,}8J_n$ auront exactement 2 ans et $0{,}6A_n$ auront 3 ans ou plus).

$$A_{n+1} = 0{,}8J_n + 0{,}6A_n$$

3. $\begin{bmatrix} J_{n+1} \\ A_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}2 & 0{,}4 \\ 0{,}8 & 0{,}6 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} J_n \\ A_n \end{bmatrix}$. Le « tableau » M_1 est : $M_1 = \begin{bmatrix} 0{,}2 & 0{,}4 \\ 0{,}8 & 0{,}6 \end{bmatrix}$.

NB. Il s'agit là d'un exemple de « matrice de Leslie », matrice qui va nous servir à étudier la dynamique de la population d'hirondelles structurée en deux classes d'âges.

4. Dès lors que l'on suppose que les conditions d'évolution sont les mêmes chaque année, les expressions des populations des jeunes hirondelles et des hirondelles plus âgées en fonction des populations de l'année précédente ne dépendent pas de l'indice de l'année. Il n'y a aucune « vérification » à faire à propos de la relation : $\begin{bmatrix} J_{n+2} \\ A_{n+2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}2 & 0{,}4 \\ 0{,}8 & 0{,}6 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} J_{n+1} \\ A_{n+1} \end{bmatrix}$.

En revanche, une justification s'impose concernant les relations entre $\begin{bmatrix} J_{n+2} \\ A_{n+2} \end{bmatrix}$ et $\begin{bmatrix} J_n \\ A_n \end{bmatrix}$:

D'après les relations obtenues en questions **1** et **2** : $\begin{bmatrix} J_{n+1} \\ A_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}2J_n + 0{,}4A_n \\ 0{,}8J_n + 0{,}6A_n \end{bmatrix}$

Ainsi : $\begin{bmatrix} J_{n+2} \\ A_{n+2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}2 & 0{,}4 \\ 0{,}8 & 0{,}6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0{,}2J_n + 0{,}4A_n \\ 0{,}8J_n + 0{,}6A_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}2(0{,}2J_n + 0{,}4A_n) + 0{,}4(0{,}8J_n + 0{,}6A_n) \\ 0{,}8(0{,}2J_n + 0{,}4A_n) + 0{,}6(0{,}8J_n + 0{,}6A_n) \end{bmatrix}$

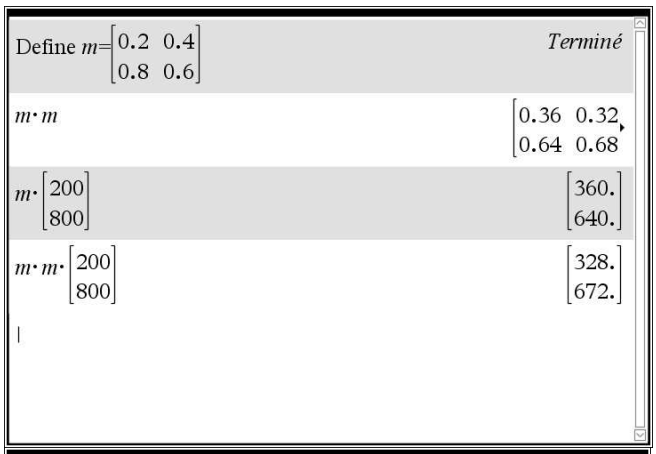
Ce qui donne : $\begin{bmatrix} J_{n+2} \\ A_{n+2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (0{,}04+0{,}32)J_n + (0{,}08+0{,}24)A_n \\ (0{,}16+0{,}48)J_n + (0{,}32+0{,}36)A_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}36J_n + 0{,}32A_n \\ 0{,}64J_n + 0{,}68A_n \end{bmatrix}$

5. $\begin{bmatrix} 0{,}2 & 0{,}4 \\ 0{,}8 & 0{,}6 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0{,}2 & 0{,}4 \\ 0{,}8 & 0{,}6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}2\times 0{,}2 + 0{,}4\times 0{,}8 & 0{,}2\times 0{,}4 + 0{,}4\times 0{,}6 \\ 0{,}8\times 0{,}2 + 0{,}6\times 0{,}8 & 0{,}8\times 0{,}4 + 0{,}6\times 0{,}6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}04+0{,}32 & 0{,}08+0;24 \\ 0{,}16+0{,}48 & 0{,}32+0{,}36 \end{bmatrix}$

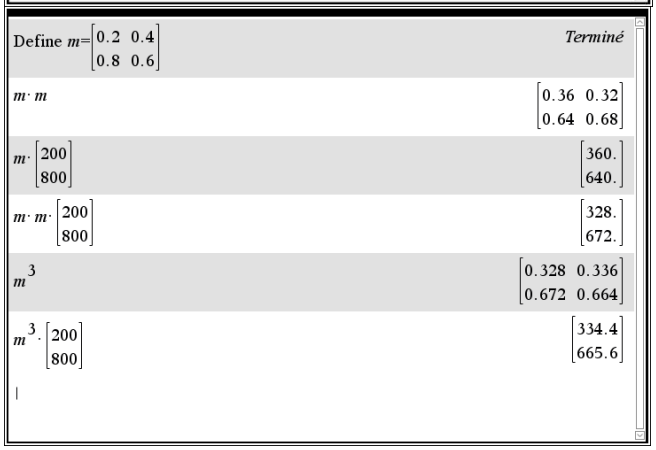
Soit : $M_2 = M_1 \times M_1 = \begin{bmatrix} 0{,}36 & 0{,}32 \\ 0{,}64 & 0{,}68 \end{bmatrix}$.

Il est conseillé de déléguer, autant que possible, les calculs à une calculatrice.

Nous vérifions ci-contre que l'action de M_1 (respectivement M_2) sur la colonne $\begin{bmatrix}200\\800\end{bmatrix}$ fournit les mêmes résultats que ceux calculés dans la **partie 1** pour l'année 2011 (respectivement, 2012)

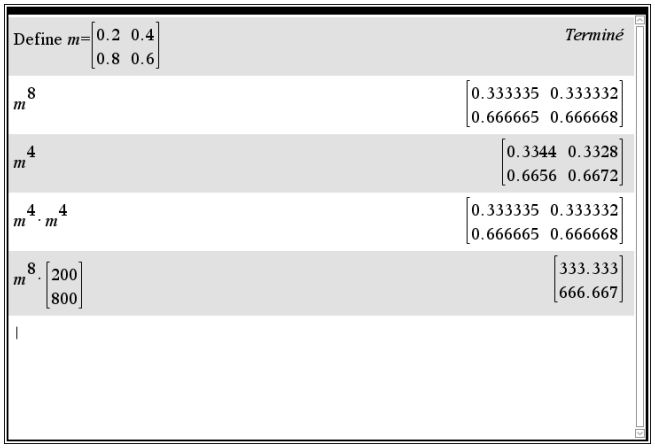


6. Ci-contre, le calcul de M_3 effectué à la calculatrice et son action sur la colonne initiale.



7. Les trois produits représentent les répartitions des années 2011, 2012 et 2013 de la population d'hirondelles suivant les jeunes hirondelles et les hirondelles adultes. Ces répartitions sont calculées conformément au modèle théorique, il nous reste à les confronter au contexte. En particulier, pour l'année 2013, la répartition calculée selon le modèle fournit deux nombres décimaux non entiers que l'on arrondira au moins à l'unité la plus proche (334 et 666).

8. L'année 2018 est l'année $2010+8$, d'indice 8.
$\begin{bmatrix}J_8\\A_8\end{bmatrix}=M_1{}^8\times\begin{bmatrix}J_0\\A_0\end{bmatrix}$. Ce qui nécessite le calcul de $M_1{}^8$, calcul délégué à la calculatrice (sinon calculer M^4 puis $M^4\times M^4$).



La répartition 2018 prévue par le modèle serait 333 jeunes hirondelles et 667 hirondelles de deux ans ou plus, c'est-à-dire à une négligeable unité près la même répartition qu'en 2013.

Nous pouvons conjecturer une stabilisation de la répartition des populations autour de ce niveau.

La coïncidence entre l'écriture des nombres figurant dans M^8 et les premières décimales de $\frac{1}{3}$ et de $\frac{2}{3}$ est cependant une conjecture majeure. Il semble bien que la matrice M^n se rapproche de la matrice $\begin{bmatrix}\frac{1}{3} & \frac{1}{3}\\\frac{2}{3} & \frac{2}{3}\end{bmatrix}$ lorsque l'indice n augmente. Notre réponse à la deuxième partie de cette question sera : « La population semble se stabiliser autour d'une répartition faite de $\frac{1}{3}$ de jeunes hirondelles et de $\frac{2}{3}$ d'hirondelles adultes ».

Exercice 2 : Le jeu de l'oie de la divisibilité

Question 1 :

45 a pour parcours : $0 \to 4 \to 5 \to 3$.
91 a pour parcours : $0 \to 2 \to 6 \to 0$.
1207 a pour parcours : $0 \to 1 \to 3 \to 5 \to 1 \to 1 \to 3 \to 3$.
2513 a pour parcours : $0 \to 2 \to 6 \to 4 \to 5 \to 6 \to 4 \to 0$. 91 et 2513 sont divisible par 7.

Question 2 :

11 a pour parcours : $0 \to 1 \to 3 \to 4$
111 a pour parcours : $0 \to 1 \to 3 \to 4 \to 5 \to 6$
1111 a pour parcours : $0 \to 1 \to 3 \to 4 \to 5 \to 6 \to 4 \to 5$
11111 a pour parcours : $0 \to 1 \to 3 \to 4 \to 5 \to 6 \to 4 \to 5 \to 1 \to 2$
111111 a pour parcours : $0 \to 1 \to 3 \to 4 \to 5 \to 6 \to 4 \to 5 \to 1 \to 2 \to 6 \to 0$
Si A comporte 6 chiffres, alors A est divisible par 7. Il ne l'est pas avec moins de 6 chiffres.
Si A comporte 6*k* chiffres (un multiple de 6) alors A est divisible par 7 car le parcours de ce nombre sera constitué de *k* fois le parcours de 111111 (chacun de ces parcours se termine sur le 0). Le parcours se termine donc sur la case 0.
Si A comporte un nombre de chiffres strictement compris entre deux multiples consécutifs de 6, (6*k*+*i*, avec i compris entre 1 et 6) alors le parcours de A est constitué de *k* fois le parcours de 111111, suivi du parcours de l'un des nombres suivants : 1, 11, 111, 1111, 11111. Le parcours ne se termine pas sur la case 0.
A est donc un multiple de 7 si et seulement si il comporte un nombre de chiffres égal à un multiple de 6.

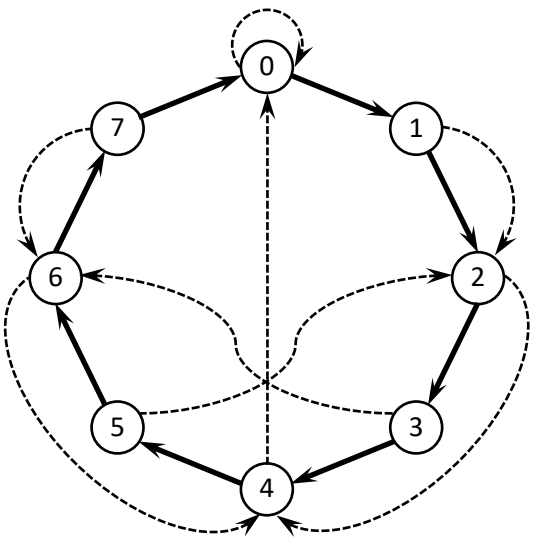
Question 3 :

Méthode 1 : autre que S
Le parcours de B est
$0 \to 2 \to 6 \to 6 \to 4 \to 4 \to 5 \to 5 \to 1 \to 1 \to 3 \to 3 \to 2 \to 2 \to 6 \to 6 \to 4 \to 4 \to 5$
$\to 5 \to 1 \to 1 \to 3 \to 3 \to 2 \to 2 \to 6 \to 6 \to 4 \to 4 \to 5 \to 5 \to 1 \to 1 \to 3 \to 3 \to 2 \to 0$.
B est divisible par 7.
Méthode 2 : S
On cherche un nombre divisible par 7 le plus proche possible de B qui mette en œuvre les résultats de la question 2 :
111 111 111 111 111 111 x 18 = 1 999 999 999 999 999 998 + 7 somme de deux nombres divisibles par 7

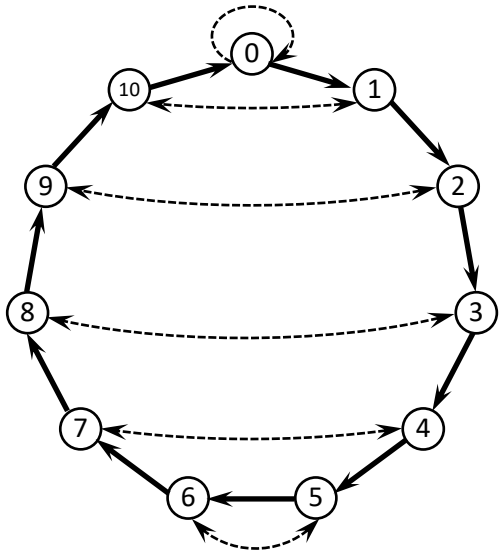
Question 4 :

Le nombre 2011 correspond au parcours proposé.
Ajouter 7 à l'un des chiffres du nombre ne change pas le parcours. Il y a 15 autres nombres ayant le même parcours, que l'on obtient en effectuant un ou plusieurs remplacements parmi les suivants : le 2 remplacé par un 9 ; le 0 remplacé par un 7 ; le ou les 1 remplacé par un 8.
2011, 2018, 2081, 2088, 2711, 2718, 2781, 2788, 9011, 9018, 9081, 9088, 9711, 9781, 9788

Question 5 :



Question 6 :



Question 7 :
Toutes les flèches en pointillés mènent à la case 0. Or dans un parcours, l'avant dernier déplacement est toujours selon une flèche en pointillé. Ainsi, dans le jeu de l'oie de la divisibilité par 5, le nombre sera divisible par 5 si et seulement si le chiffre des unités emmène du 0 au 0, ce qui équivaut à dire que le chiffre des unités est 0 ou 5.

COMPLEMENTS :
L'argument mathématique sur lequel repose la construction des graphes, et notamment celle des flèches pointillées est le suivant :
Partant de cette décomposition du nombre :
$902 = \left(9 \times 10 + 0\right) \times 10 + 2$,
on effectue le calcul en réduisant chaque étape modulo 7.
On se rend à la case 9, réduite à 2 modulo 7.
Puis on se rend à $2 \times 10 = 20$ réduit à 6 modulo 7. Le 2 conduit donc au 6 via les pointillés.
Puis on ajoute 0 donc on reste sur le 6.
$6 \times 10 = 60$ donc 4 modulo 7. Le 6 conduit donc au 4 via les pointillés.
Enfin 4 + 2 = 6.