SUJET + CORRIGÉ

OLYMPIADES DE MATHÉMATIQUES

ACADÉMIE DE LILLE

Classes de première S • 2011

XI$^{\text{èmes}}$ OLYMPIADES ACADÉMIQUES DE MATHÉMATIQUES

Classe de première série S

Concours 2011

Mercredi 23 Mars 2011

Durée de l'épreuve : 4 heures. Les élèves ne peuvent sortir qu'après une heure d'épreuve.

Les calculatrices sont autorisées.

Les quatre exercices sont à traiter. Les candidats sont invités à faire figurer sur les copies les résultats, même partiels, auxquels ils sont parvenus, et les idées qui leur sont venues.

Le sujet comporte 7 pages numérotées de 1 à 7.

Exercice national 1 : Essuie-glaces

Les parties 1, 2 et 3 sont indépendantes.

On se propose de calculer l'aire de la surface essuyée par plusieurs modèles de balais d'essuie-glace d'un véhicule. On considèrera que les pare-brises sont des surfaces planes.

1. Un premier véhicule est équipé d'un seul balai porté par une tige métallique de 60 cm, modélisée par un segment $[OB]$. Soit A le point de $[OB]$ tel que $OA = 15\,cm$. Le balai en caoutchouc est alors modélisé par le segment $[AB]$ (voir figure 1 ci-dessous). Déterminer la valeur exacte de l'aire de la surface essuyée par le balai, en admettant que celui-ci décrit autour du point O un angle de 180 degrés. En donner une valeur arrondie au cm^2 près

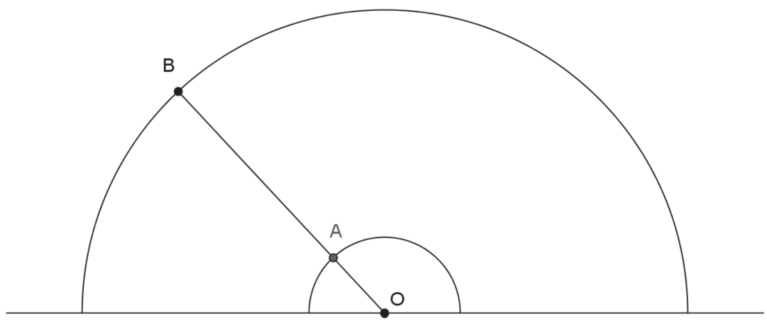


Fig. 1

2. Le pare-brise d'un second véhicule possède deux essuie-glaces modélisés par deux segments$[OB]$ et $[O'B']$ de même longueur R, l'un tournant l'un autour d'un point O, l'autre autour d'un point O', tels que $OO' = R$ (voir figure 2 ci-dessous). Ces balais en caoutchouc couvrent la longueur totale de chaque segment. L'extrémité de chaque segment décrit un demi-cercle au-dessus de la droite (OO'). Déterminer l'aire de la surface du pare-brise essuyée par les balais.

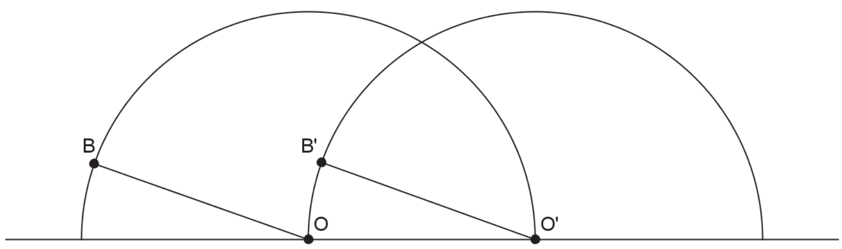


Fig 2

3. Un troisième véhicule est équipé d'un essuie-glace dont le support métallique est modélisé par la réunion de deux segments (voir la figure 3 ci-dessous) : un segment $[AB]$, qui porte le balai en caoutchouc sur toute sa longueur, et un segment$[OC]$ qui relie le centre de rotation O à un point C du segment $[AB]$ tels que $\widehat{OCA} = 30^{\circ}$, $CB = 4CA$ et $OC = \sqrt{3}CA$. On pose $CA = a$.

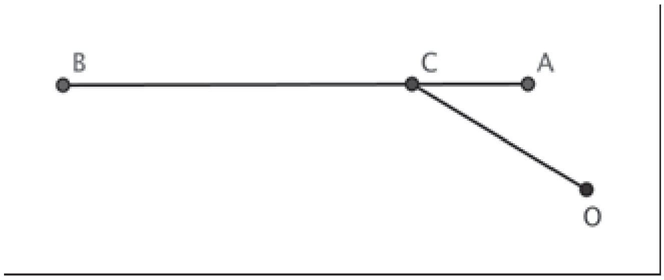


Fig. 3

   (a) Démontrer que le triangle AOC est isocèle.

   (b) Lorsqu'il essuie le pare-brise du véhicule, l'essuie-glace tourne autour du point$O$. En début de course le balai en caoutchouc est en position horizontale : les points A, B et C coïncident respectivement avec les points M, N et P du pare-brise tels que $[MN]$ est horizontal (voir la figure 4 ci-dessous). En fin de course A, B, C coïncident respectivement avec les points M', N' et P' du pare-brise tels que le segment $[OM']$ est horizontal.

Déterminer l'angle dont a tourné le dispositif autour du point O pour passer d'une position à l'autre, puis exprimer en fonction de a l'aire de la surface essuyée par le balai.

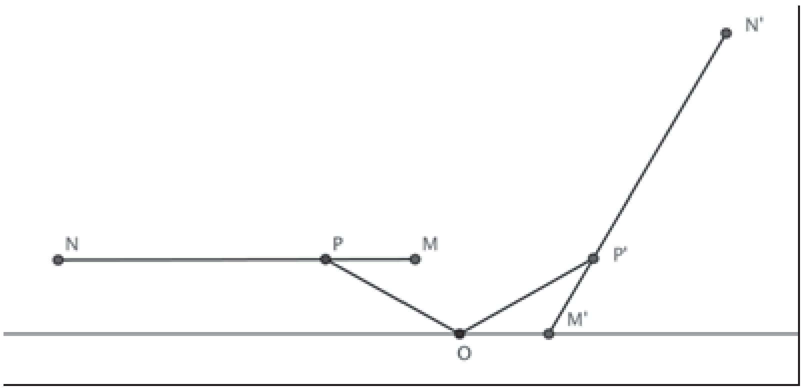


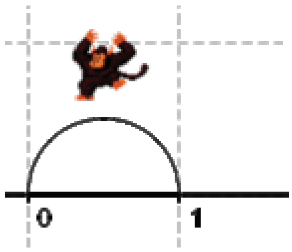
Fig. 4

Exercice national 2 : Le singe sauteur

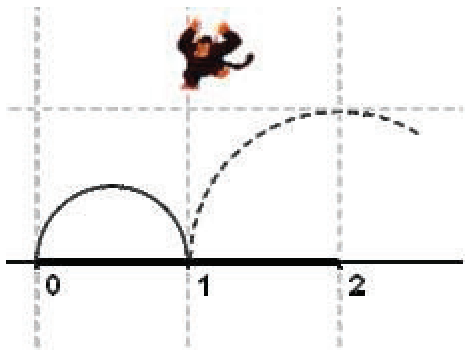
J'ai un petit singe sauteur qui passe son temps à faire des bonds sur une demi-droite graduée en choisissant d'aller vers l'avant ou vers l'arrière.

Le nombre n est dit ***atteignable*** si le singe peut, en partant de l'**origine** (position d'abscisse 0), atteindre la position d'abscisse n en **exactement** n bonds successifs (en avant ou en arrière) de longueurs 1, 2, ..., n (**effectués** dans cet ordre) et sans **jamais** sortir du segment $[0\,;\,n]$.

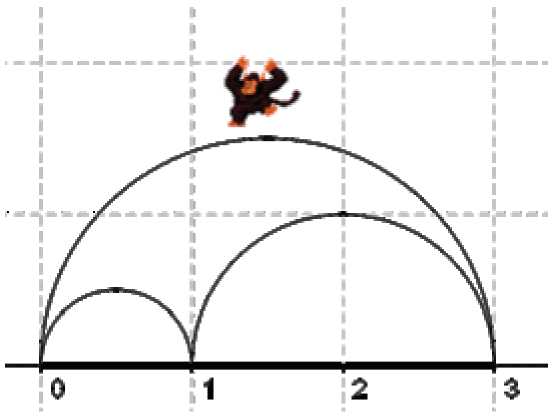
Par exemple : Le nombre 1 est atteignable en un bond.



Mais le nombre 2 ne l'est pas car, après avoir fait le bond de longueur 1 (qu'il est obligé de faire vers l'avant), s'il fait un bond de longueur 2 en avant ou en arrière il sort de l'intervalle $[0\,;\,2]$.



Le nombre 3 n'est pas atteignable pour une autre raison : après avoir fait un bond de longueur 1 et un autre de longueur 2 vers l'avant, il est obligé de faire un bond de longueur 3 vers l'arrière (sinon il sort de l'intervalle $[0\,;\,3]$) et se trouve sur le nombre 0 au lieu de 3.



Questions

1. Montrer que le nombre 4 est atteignable et ceci d'une seule façon.
2. Montrer que le nombre 5 n'est pas atteignable. On peut montrer de la même façon que les nombres 6, 7 et 8 ne sont pas atteignables ; ce résultat est admis.
3. Le nombre 9 est-il atteignable ?

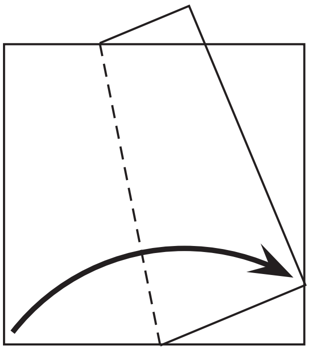
Pour la suite, on rappelle que, pour tout nombre entier m, on a :$1+2+3+\cdots+m=\dfrac{m\,(m+1)}{2}$

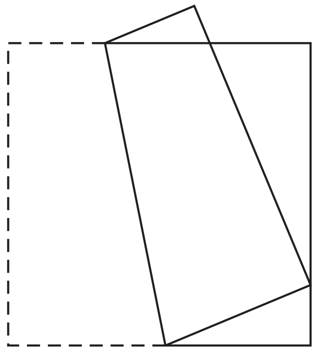
4. Montrer que tous les nombres entiers qui sont des carrés sont atteignables.
5. (a) Montrer que si le nombre entier n est atteignable alors le produit $n\,(n-1)$est divisible par 4. En déduire une condition sur l'entier n pour qu'il soit atteignable.

   (b) La réciproque de cette proposition est-elle vraie ?
6. On suppose $N \geqslant 6$ et atteignable par une séquence qui commence par $1+2+3\cdots$ Montrer que $N+4$ est aussi atteignable.

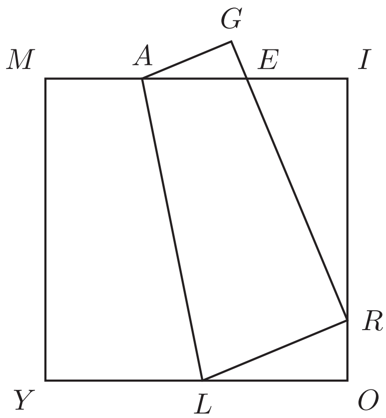
Exercice 3 (Série S) : Les triangles de Lorie Gamy

Lorie Gamy adore plier des feuilles de papier. Aujourd'hui, elle a plié une feuille carrée (de côté 1) en amenant un sommet sur un point d'un côté opposé, comme indiqué sur la figure.





Lorie nomme alors chaque sommet en utilisant les lettres de son nom et de son prénom, puis s'intéresse aux deux triangles LOR et RIE.



1. Démontrer que les deux triangles de Lorie ont leurs angles de même mesure.
2. Lorie amène le sommet nommé Y sur le milieu de $[OI]$.
   (a) Faire une figure. *R doit être situé au milieu de $[OI]$.*
   (b) Quelle est alors la position de E sur $[MI]$?
   On pourra poser $OL = x$.
3. Où doit-être situé le point R sur le segment $[OI]$ pour que E soit le milieu de $[MI]$?
   On pourra poser $IR = y$.
4. Lorie est curieuse de savoir comment le périmètre du triangle RIE varie quand R parcourt le segment $[OI]$. Pouvez-vous l'aider à répondre à cette question ?

Exercice 4 (Série S) : Des couples parfaits

Le couple d'entiers (25 ; 36) possède deux propriétés remarquables :

– Ce sont des carrés parfaits.
– Le deuxième nombre s'écrit avec les chiffres du premier augmentés de 1, dans le même ordre.

Bernard et Cécile cherchent d'autres couples vérifiant ces deux propriétés.

Partie I

Dans un premier temps, ils se limitent aux entiers inférieurs à 100 pour tester leur méthode.

1. Existe-t-il d'autres couples d'entiers à deux chiffres (compris entre 10 et 99) vérifiant ces deux propriétés ?
2. Pour vérifier leurs résultats, Bernard propose l'algorithme suivant.

Pour i allant de 10 à 88
  Si $\sqrt{i}$ est un entier et $\sqrt{i+11}$ est un entier
    Alors écrire i et $i+11$
  Fin du Si
Fin du Pour

Cécile propose l'algorithme suivant.

Pour i allant de 4 à 9
  Si $\sqrt{i^2+11}$ est un entier
    Alors écrire i^2 et i^2+11
  Fin du Si
Fin du Pour

Pour chaque algorithme, on appellera temps de l'algorithme le nombre de fois que le programme correspondant rencontrera une condition (**Si**) ; par exemple, le temps de l'algorithme de Bernard est 79.

(a) Pour chaque algorithme proposé, expliquer ce que représente la variable i.
(b) Quel est le temps de l'algorithme de Cécile ?

Partie II

Bernard et Cécile cherchent maintenant les couples d'entiers naturels à quatre chiffres (compris entre 1000 et 9999) vérifiant les deux propriétés.

1. Comment chacun peut-il transformer son algorithme pour résoudre le problème ?
   Quel sera alors le temps de chaque algorithme ?
2. Quelle est la réponse au problème posé ?
3. René ne sait pas écrire d'algorithme. Comment peut-il résoudre le problème malgré tout ?

Partie III

Dans le cas des couples d'entiers à trois chiffres (compris entre 100 et 999), que vont donner les algorithmes adaptés de Bernard et Cécile ?

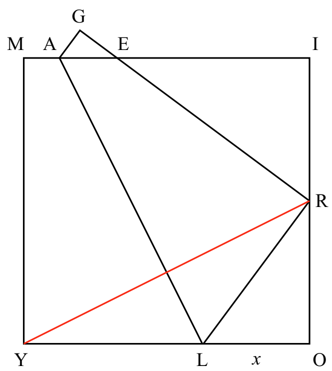
Quelle est la réponse au problème posé ?

CORRECTION, LILLE 2011

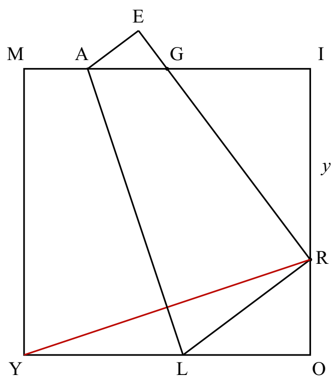
Premier exercice Académique (exo 3)

Olympiades mathématiques, S

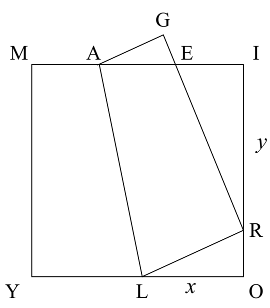
1. $\widehat{LRO} + \widehat{ERI} + \widehat{ERL} = 180^o$
   D'où $\widehat{LRO} + \widehat{ERI} = 90^o$
   et $\begin{cases} \widehat{RLO} = 90^o - \widehat{LRO} = \widehat{ERI} \\ \widehat{IER} = 90^o - \widehat{ERI} = \widehat{LRO} \end{cases}$
2. a. Construction de la figure avec R milieu de [IO]



   b. Position de E sur [MI]
   Si on pose $OL = x$ et compte tenu de $OR = RI = \frac{1}{2}$,
   on a $LR^2 = YL^2 = (1-x)^2$ et $LR^2 = LO^2 + OR^2 = x^2 + \frac{1}{4}$
   D'où $1 - 2x = \frac{1}{4}$ ou $x = \frac{3}{8}$.
   On a aussi $\frac{EI}{IR} = \frac{OR}{OL} = \frac{1}{2x}$ d'où $EI = \frac{1}{4x} = \frac{2}{3}$.
3. Si on pose $IR = y$ et si E est le milieu de [MI], $EI = \frac{1}{2}$
   et $IR = y$
   d'où $\frac{OR}{OL} = \frac{EI}{IR} = \frac{1}{2y}$ avec $OR = 1 - y$
   donc $OL = 2y(1-y)$
   et $LY^2 = (1-OL)^2 = LR^2 = LO^2 + OR^2$.
   $1 - 2OL = OR^2$ ou $1 - 4y(1-y) = (1-y)^2$
   ou $1 - 4y + 4y^2 = 1 - 2y + y^2$
   ou $3y^2 = 2y$ soit $y = \frac{2}{3}$.



4. Posons $OL = x$ et $IR = y$ et nommons p le périmètre du triangle RIE et p' celui du triangle LOR.
   On a $\frac{p}{p'} = \frac{IR}{OL} = \frac{y}{x}$, $p' = x + (1-x) + (1-y) = 2 - y$
   et $(1-x)^2 = x^2 + (1-y)^2$ soit $2x - 2y + y^2 = 0$ ou $x = \frac{y(1-y)}{2}$
   et finalement $p = \frac{y}{x}(2-y) = 2$.



source : apmep

CORRECTION, LILLE 2011

Second exercice Académique (exo 4)

Olympiades mathématiques, S

Partie I

a. Soit (a^2, b^2) le couple d'entiers cherché.
Dans l'algorithme de Bernard i représente a^2

b. Dans l'algorithme de Cécile, i représente a et le temps est 9-3=6.

Partie II

1. Bernard doit remplacer les trois premières lignes de son algorithme : :

```
Pour i allant de 1000 à 8888
        Si √i est un entier et √(i + 1111) est un entier
                Alors écrire i et i + 1111
        Fin du Si
Fin du Pour
```

Le temps de ce nouvel algorithme est 7889.
Cécile doit remplacer les trois premières lignes de son algorithme :

```
Pour i allant de 32 à 99
        Si √(i² + 1111) est un entier
                Alors écrire i² et i² + 1111
        Fin du Si
Fin du Pour
```

Le temps de ce nouvel algorithme est 68.

2. La réponse est (2025, 3136), obtenue pour $i = 45$.

3. On a $b^2 = a^2 + 1111$ ou $b^2 - a^2 = 1111 = 11 \times 101$ produit de deux nombres premiers.
D'où $b + a = 101$ et $b - a = 11$, d'où $b = 56$ et $a = 45$, puis $a^2 = 2025$ et $b^2 = 3136$; on vérifie que $3136 = 2025 + 1111$.
L'alternative $b + a = 1111$ et $b - a = 1$ qui conduirait à $b = 551$ ne convient pas car $551^2 > 10000$.

Partie III

On a maintenant $b^2 = a^2 + 111$
d'où $b^2 - a^2 = 3 \times 37$ produit de deux nombres premiers
d'où $b + a = 37$ et $b - a = 3$ d'où $b = 20$ et $a = 17$,
$b^2 = 400$ et $a^2 = 289$; on vérifie que $400 = 289 + 111$.

L'alternative $b + a = 111,\ b - a = 1$ donnerait $a = 55$ et $b = 56$ donc $b^2 = 3136$ qui a quatre chiffres et donc ne convient pas.