OLYMPIADES MATHÉMATIQUES LYCÉE, PREMIÈRE

ACADÉMIE DE GRENOBLE 2020

SUJET + CORRIGÉ

20e OLYMPIADES DE MATHÉMATIQUES

Mercredi 11 mars 2020[1], 2 énoncés (national et académique) en 4 heures, élèves de première générale et technologique[2] et de début de terminale[3], inscription auprès de votre professeur de mathématiques avant les vacances d'hiver selon académie.

Liberté • Égalité • Fraternité
RÉPUBLIQUE FRANÇAISE

MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE

Sujet et Corrigé vous sont présentés par freemaths.fr . . .

MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE ET DE LA JEUNESSE

Olympiades nationales de mathématiques 2020

Exercices Académiques

Les calculatrices sont autorisées selon la réglementation en vigueur.

L'épreuve se déroule par groupes de 1 à 4 élèves, chaque groupe rédige une seule copie, sans limitation du nombre de pages.

Il est conseillé aux groupes de candidats qui ne pourraient formuler une réponse complète à une question d'exposer le bilan des initiatives qu'ils ont pu prendre.

Les énoncés doivent être rendus au moment de quitter définitivement la salle de composition, ils pourront être restitués aux candidats le lendemain.

Chaque groupe de candidats traite **deux exercices.**

- Les candidats de voie générale ayant suivi l'enseignement de spécialité de mathématiques doivent traiter les exercices 1 et 2.
- Les autres candidats doivent traiter les exercices 1 et 3.

Exercice académique 1 (à traiter par tous les candidats)

Les grandes puissances

La cryptologie permet d'assurer la confidentialité des messages et de garantir leur authenticité. Les méthodes modernes nécessitent des calculs avec de très grands nombres, notamment des calculs de grandes puissances très coûteux en temps. On étudie dans cet exercice un algorithme qui permet de diminuer de manière significative le nombre d'opérations à effectuer lors de calculs de grandes puissances d'un nombre réel.

N.B. Les multiplications par 1 ne seront pas prises en compte dans le dénombrement des opérations effectuées. On ne prendra pas non plus en compte la division par 2 ou la soustraction par 1, qui sont effectuées très rapidement par l'ordinateur.

1. Le calcul « habituel » de a^n (a nombre réel, n entier naturel supérieur ou égal à 2) peut-être obtenu à l'aide de l'algorithme suivant écrit en langage naturel ou écrit sous forme de fonction en langage Python :

<table>
<tr><td>Langage naturel</td><td>Fonction Python</td></tr>
<tr><td>saisir a
saisir n
r ← a
pour i allant de 1 à n−1
    r ← r x a
fin pour
afficher r</td><td>def puissance (a,n) :
    r=a
    for i in range (n-1) :
        r=r*a
    return r</td></tr>
</table>

a) Calculer ainsi 3^{17}. Combien de multiplications avez-vous effectuées ?

b) Avec cette méthode, combien faudrait-il effectuer de multiplications pour calculer 3^{2020} ?

2. On propose une amélioration du calcul de grandes puissances. En remarquant que $17 = 2^4 + 1$, proposer un calcul de 3^{17} nécessitant seulement 5 multiplications à partir du nombre 3.

3. On souhaite, à l'aide de l'algorithme ci-dessous, généraliser et automatiser la méthode utilisée à la question précédente pour calculer a^n où a est un nombre réel et n est un entier naturel non nul.

```
saisir a, saisir n
p=1
b=a
m=n
tant que m>0
        si m est impair
            p=pxb
            m=m-1
        fin si
        b=bxb
        m=m/2
fin tant que
afficher p
```

a) Faire tourner cet algorithme avec a = 5 et n = 4 ; indiquer les valeurs successives de p, de b et de m.

b) Pourquoi peut-on affirmer que le programme se termine toujours ?

c) Combien de multiplications devrait-on effectuer pour calculer 3^{2020} avec le programme ci-dessus ?

4. On suppose dans cette question que n est un entier naturel compris entre 200 et 300. *On rappelle que les multiplications par 1 ne sont pas prises en compte.*

a) Pour quelle valeur de n le nombre minimal de multiplications à effectuer lors de l'utilisation de cet algorithme est-il atteint pour le calcul de 3^n ? Quel est ce nombre minimal ?

b) Pour quelle valeur de n le nombre maximal de multiplications à effectuer lors de l'utilisation de cet algorithme est-il atteint pour le calcul de 3^n ? Quel est ce nombre maximal ?

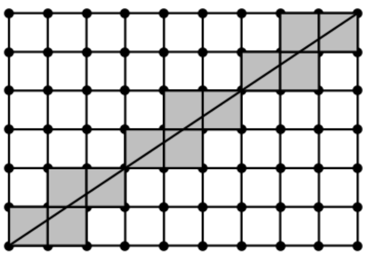
Exercice académique 2 (à traiter par les candidats de voie générale ayant choisi la spécialité mathématiques)

Les diagonales

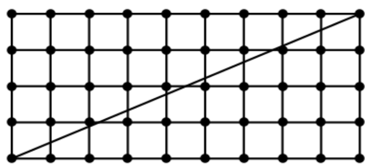
On rappelle qu'un rationnel est un réel qui s'écrit sous la forme $\frac{a}{b}$ où a et b sont des entiers relatifs avec $b \neq 0$.

Partie 1 : diagonale dans un quadrillage

Soit n et p deux entiers naturels non nuls. On considère un rectangle qui admet un quadrillage $n \times p$ (c'est-à-dire de n carrés par p carrés) et on trace une diagonale de ce rectangle.



Chaque carré traversé par la diagonale est grisé et le résultat est une représentation "pixellisée" de cette diagonale. Dans un quadrillage 9×6, on obtient le résultat ci-contre.

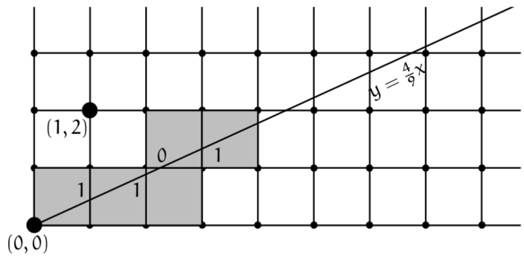


1) Combien de carrés faut-il griser avec une diagonale dans un quadrillage 9×4 ?

2) Combien de carrés faut-il griser avec une diagonale dans un quadrillage 45×20 ?

Partie 2 : un algorithme

On se place dans un repère d'origine le point en bas à gauche du quadrillage. Les points du quadrillage sont les points à coordonnées entières. On a dessiné ci-contre la droite D_α d'équation $y = \alpha x$ dans le cas où $\alpha = \frac{4}{9}$. On appellera pixel un carré grisé.



En partant du pixel en bas à gauche repéré par (0 ; 0), on applique les règles suivantes pour le faire «glisser » le long de la droite :

- si D_α traverse une verticale (sans passer par un nœud du quadrillage), le pixel glisse vers la droite (déplacement noté "1")
- si D_α traverse une horizontale (sans passer par un nœud du quadrillage), le pixel glisse vers le haut (déplacement noté "0")
- si D_α passe par un nœud de quadrillage, le pixel glisse vers le haut et vers la droite (déplacement "2").

La suite de 0,1 ou 2 obtenue est appelée chemin de la droite D_α.

1) Compléter l'algorithme donné **en annexe (à rendre avec la copie),** qui construit la suite des k premiers déplacements le long d'une droite D_α..

Par exemple, pour $\alpha = \frac{4}{9}$ et k=20, l'algorithme renvoie les 20 premières étapes du chemin de la droite $D_{\frac{4}{9}}$: 11011011011211011011

2) La suite de nombres : 0010001002 est le début du chemin d'une droite de pente α . Combien vaut α ?

3) La suite de nombres : 0010 est le début du chemin d'une droite. Pourquoi ne peut-il pas se continuer avec 0000 ?

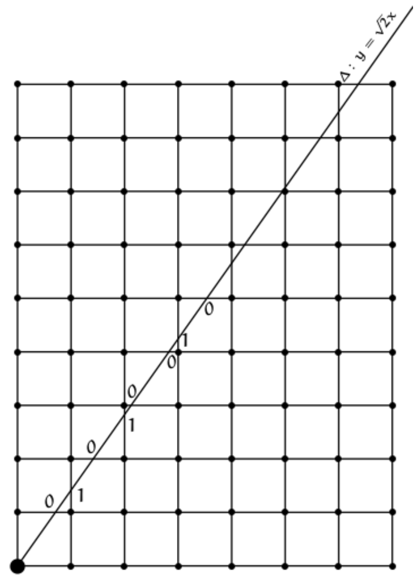
Partie 3 : cas $\boldsymbol{\alpha = \sqrt{2}}$

On rappelle que le réel $\sqrt{2}$ est un nombre irrationnel.

On note Δ la droite d'équation $y = \sqrt{2}x$ dessinée dans le quadrillage ci-contre. Dans toute la suite, on considère le chemin de la droite $D_{\sqrt{2}}$.

Pour $\alpha = \sqrt{2}$, l'algorithme précédent fournit un chemin dont on donne le début :

0101001010010...



1) Démontrer que l'algorithme ne produira jamais aucun « 2 ».

2) Démontrer qu'il ne peut pas y avoir deux "1" consécutifs.

3) Démontrer qu'il ne peut pas y avoir plus de deux « 0 » consécutifs.

4) Voici les 41 premières valeurs du chemin de la droite Δ :

01010010100101010010100101010010100101001

A partir de cette suite, comment obtenir la fraction de dénominateur 17 la plus proche de $\sqrt{2}$?

Exercice académique 3 (à traiter par les candidats n'ayant pas suivi la spécialité de mathématiques de voie générale)

Les disques de Rubik

On considère un jeu constitué de deux disques pouvant tourner chacun autour d'un axe et fixés sur un support de jeu et de 9 pièces disposées sur ces disques.

<u>Présentation du jeu :</u> deux disques, un à gauche et un à droite permettent de faire tourner 9 pièces ellipsoïdales notées : 0, 1, 2, 3, 4, a, b, c, d, parmi lesquelles une pièce est commune aux deux disques (voir figure 1 par exemple). On a gravé sur le support de jeu les positions fixes : I,II,III, IV, α, β, γ et δ.

Le but du jeu est de retrouver la configuration de la figure 4 à partir d'une configuration donnée au départ en faisant tourner les disques dans le sens des aiguilles d'une montre ou dans le sens inverse.

<u>Exemple :</u> on suppose que la configuration initiale est celle de la figure 1 ; on a montré les configurations intermédiaires (figure 2 et figure 3) pour parvenir à la position voulue (figure 4).

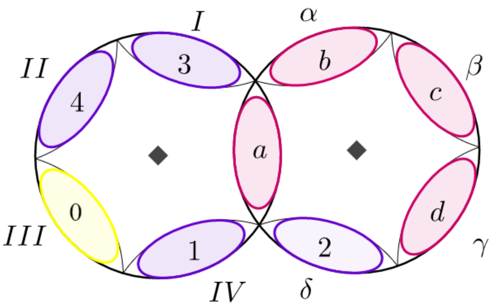


Figure 1

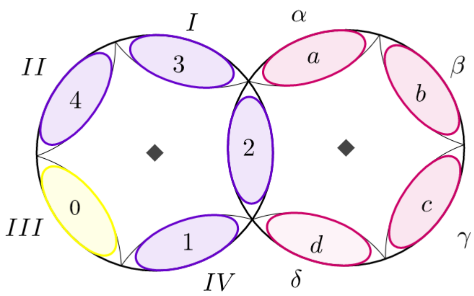


Figure 2

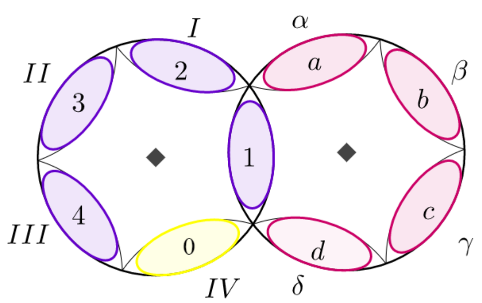


Figure 3

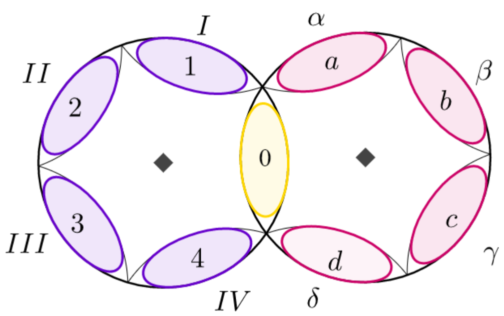


Figure 4

Ainsi, dans la figure 1, les pièces notées b, c, d, 2 sont sur le disque de droite, les pièces 0, 1, 3, 4 sont sur le disque de gauche et la pièce notée a est commune aux deux disques.

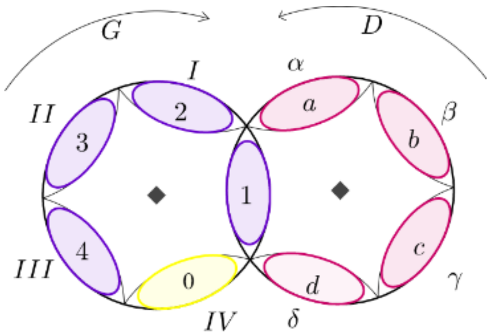
Pour passer à la configuration de la figure 2, on fait tourner le disque de droite dans le sens des aiguilles d'une montre : ainsi, toutes les pièces du disque de droite ont bougé tandis que les pièces du disque de gauche n'ont pas bougé (excepté la pièce notée a remplacée par la pièce notée 2).

Pour passer de la figure 2 à la figure 3, on fait tourner le disque de gauche dans le sens inverse des aiguilles d'une montre tandis que le disque de droite n'a pas bougé.

1. Déterminer le disque qui a tourné et le mouvement effectué pour passer de la configuration de la figure 3 à celle de la figure 4 (fin du jeu).

Notations :

- L'opération consistant à faire tourner d'un cran le disque de gauche dans le sens des aiguilles d'une montre sera notée G. L'opération consistant à faire tourner d'un cran le disque de droite dans le sens inverse des aiguilles d'une montre sera notée D.



- On notera G^{-1} et D^{-1} les opérations dans le sens inverse.
- On pourra enchainer les opérations en écrivant les évènements dans l'ordre chronologique. On obtient ainsi un déplacement.

Ainsi le déplacement GD correspond à faire tourner le cercle de gauche dans le sens des aiguilles d'une montre d'un cran puis celui de droite dans le sens inverse des aiguilles d'une montre d'un cran.

2. A l'aide des notations G^{-1} et D^{-1}, écrire les trois opérations permettant de passer de la configuration de la figure 1 à celle de la figure 4.

3. On part d'une configuration quelconque puis on effectue le déplacement GDDG^{-1}.

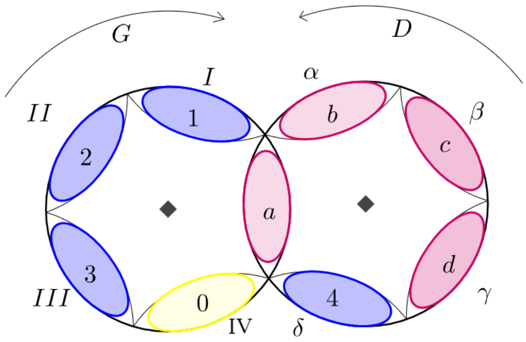
   a) Proposer un déplacement utilisant G, G^{-1} et D^{-1} permettant de revenir à la configuration avant déplacement.

   b) Proposer un autre déplacement n'utilisant ni G^{-1} ni D^{-1} permettant de revenir à la configuration avant déplacement.

4. Le déplacement $\mathrm{GD}^{-1}\mathrm{G}^{-1}\mathrm{D}$ permet le déplacement suivant : la pièce en δ va à la position I, la pièce en I va à la position commune aux deux disques, la pièce qui était à la position commune va à la position δ, les autres pièces sont revenues à leur position de départ. Que se passe-t-il si l'on effectue deux fois ce déplacement ? Trois fois ?

5. On considère dans cette question le déplacement : $\mathrm{DGD^{-1}G^{-1}}$. Si toutes les pièces sont, au départ, à leur place (figure 4), quelles sont celles qui n'ont pas été affectées par ce déplacement ? Quel est l'effet de ce déplacement ?

6. Quelles opérations faut-il réaliser, si l'on part de la position ci-dessous, pour arriver dans la configuration de la figure 4 ?



7. Combien y a-t-il de déplacement de quatre opérations permutant seulement trois pièces (c'est-à-dire à l'issue de ces quatre opérations, trois pièces ont bougé et les six autres pièces sont à la même place) ? Lister ces déplacements.

Etablissement :

Numéro du groupe :

ANNEXE à rendre avec la copie (exercice 2 pour les candidats de voie générale ayant choisi la spécialité mathématiques) :

```
Entrée :
Saisir le réel α > 0
Saisir l'entier naturel k
Traitement :
x ← 0
y ← 0
Pour i allant de 1 à k faire
    Si .......... alors :
        x ← x + 1
        Afficher("1")
    Sinon si .......... alors :
        ..........
        Afficher("0")
    Sinon :
        ..........
        ..........
        Afficher("2")
Fin Pour
```

www.freemaths.fr

OLYMPIADES MATHÉMATIQUES
LYCÉE, PREMIÈRE

CORRECTION !

Épreuve ▪ 2020

Les grandes puissances

Eléments de correction

1 – Calcul « habituel » de a^n .

a) Calculer ainsi 3^{17}. Combien de multiplications avez-vous effectué ?

3^{17} = 3x3x … x 3 il faudrait effectuer 16 multiplications.

b) Avec cette méthode, combien faudrait-il effectuer de multiplications pour calculer 3^{2020} ?

Il faudrait de même 2019 multiplications

2 – Une amélioration : on remarque que $17 = 2^4 + 1$.

En déduire un calcul de 3^{17} nécessitant seulement 5 multiplications.

On calcule 3x3 = 9 (=3^2), puis 9x9 = 81 (=3^4), puis 81x81 = 6561 (=3^8),
puis 6561x6561 = 43046721 et enfin 3x 43046721 = 129140163.

Nous avons bien effectué 5 multiplications.

3 – On souhaite généraliser et automatiser la méthode utilisée à la question précédente pour calculer a^n où n est un entier naturel non nul.

a) Faire tourner cet algorithme avec a = 5 et n = 4

	p	b	m
	1	5	4
multiplication par 5	1	25	2
multiplication par 25	1	625	1
	625	625	0

on obtient $5^4 = 625$ en seulement deux multiplications (la dernière étape est une multiplication par 1)

b) Pourquoi peut-on affirmer que le programme se termine toujours ?

L'entier naturel m diminue strictement à chaque étape puisqu'il est diminué de 1 s'il est impair et divisé par 2 s'il est pair. On obtiendra donc en un nombre fini d'étapes m=2, puis m=1 et enfin m= 0, qui provoque l'arrêt du programme.

c) Combien de multiplications devrait-on effectuer pour calculer 3^{2020} avec l'algorithme ci-dessus ?

Les valeurs successives de m sont 2020, 2019, 2018, 1009, 1008, 504, 252, 126, 63, 62, 31, 30, 15, 14, 7, 6, 3, 2, 1, 0, il faut donc effectuer 18 multiplications (une à chaque nouvelle valeur de m, sauf pour la dernière).

4 – On suppose dans cette question que n est un entier naturel compris entre 200 et 300.

a) Quel est le nombre minimal de multiplication à effectuer lors de l'utilisation de cet algorithme ?

Le cas le plus favorable correspond à une diminution la plus rapide possible de m, ce qui a lieu quand m est divisé par 2 jusqu'à atteindre 1, c'est à dire lorsque n est une puissance de 2.

Pour n compris entre 200 et 300, ce minimum est atteint pour $n=2^8=256$, et seulement 8 multiplications seront effectuées.

b) Quel est le nombre maximal de multiplications ?

Cela correspond aux cas où les valeurs de m sont le plus souvent impaires : en « remontant », on obtient 1, 3, 7, 15, 31 … et plus généralement tous les nombres de la forme 2^n-1.

Entre 200 et 300, la situation la plus défavorable est atteinte pour n=255.

L'algorithme donne les résultats suivants, après 14 multiplications :

p	b	m
1	3	255
3	3	254
3	9	127
27	9	126
27	81	63
2187	81	62
2187	6561	31
14348907	6561	30
14348907	43046721	15
617673396283947	43046721	14
617673396283947	1853020188851841	7
1,1445612734308E+30	1853020188851841	6
1,1445612734308E+30	3,43368382029E+30	3
3,9300615259129E+60	3,43368382029E+30	2
3,9300615259129E+60	1,17901845777E+61	1
4,633615079238E+121	1,17901845777E+61	0

Diagonales

Partie 1 :

1) 12 carrés à griser (9+4-1)

2) $45 \times 20 = 5 \times 9 \times 5 \times 4$ donc 12×5 carrés grisés

Partie 2 :

1) Voir ci-dessous

2) Pour rejoindre le nœud de quadrillage, on a 3 déplacements vers la droite et 8 déplacements vers le haut. Donc$\alpha = \frac{8}{3}$.

3) Si le chemin débute par 0010 , il passe par un point A du segment [BC] avec B(1;3) et C(2; 3) . La pente de (OA) aura une pente $\frac{3}{2} < \alpha < 3$.

S'il se poursuit par 0000, il va passer par un point E du segment [FG] avec F(1;7) et G(2; 7) et cette partie aura une pente >4. Les points O, A, B ne peuvent pas être alignés.

```
Entrée :
Saisir le réel α > 0
Saisir l'entier k
Traitement :
x ← 0
y ← 0
Pour i allant de 1 à k faire
    Si (y + 1)/(x + 1) > α alors :
        x ← x + 1
        Afficher("1")
    Sinon si (y + 1)/(x + 1) < α alors :
        y ← y + 1
        Afficher("0")
    Sinon :
        x ← x + 1
        y ← y + 1
        Afficher("2")
Fin Pour
```

Partie 3 :

1) Si la droite passait par un point du quadrillage, par exemple (p,q) avec p et q entiers, alors sa pente serait $\alpha = \frac{q}{p}$et donc $\sqrt{2}$serait un rationnel ce qui est absurde.

2) Au premier « 1 », la droite passe entre (p,q) et (p,q+1) et au deuxième « 1 », elle devra passer entre (p+1,q) et (p+1,q+1). La pente de la droite serait <1 et donc $<\sqrt{2}$

3) Au premier « 0 », la droite passe entre (p,q) et (p+1,q) et au troisième « 0 », elle devrait passer entre (p,q+2) et (p+1,q+2). La pente de la droite serait >2 et donc $>\sqrt{2}$

Si on rajoute n « 0 » supplémentaires, elle devra passer entre (p,q+2+n) et (p+1,q+2+n) et la pente sera >2+n ce qui est impossible sur la droite Δ.

4) Le chemin se termine en traversant une ligne verticale et contient 24 « 0 » et 17 « 1 ». Donc la droite passe entre les points (17;24) et (17;25) ce qui fournit l'encadrement $\frac{24}{17} < \alpha < \frac{25}{17}$.

Une valeur approchée à la calculatrice montre que $\frac{24}{17}$ est la plus proche de $\alpha = \sqrt{2}$.

Disques de Rubik

1. C'est le disque de gauche qui a tourné d'un cran dans le sens inverse des aiguilles d'une montre.

2. En illustration, on a réalisé les déplacements $D^{-1}G^{-1}G^{-1}$

3. a) Un déplacement inversant $GDDG^{-1}$ pourrait être $GD^{-1}D^{-1}G^{-1}$.

   b) Un déplacement inversant $GDDG^{-1}$ sans utiliser ni "G^{-1}" ni "D^{-1}" pourrait être G*DDDGGGG*.

4. Etude d'un déplacement particulier : $GD^{-1}G^{-1}D$. Cela permet d'avoir une permutation des trois éléments.
   Deux fois le déplacement : la pièce en δ va à la position commune, la pièce en I va en position δ et la pièce à la position commune va en I.
   Trois fois le déplacement : on revient à la position initiale

5. Il s'agit d'une autre permutation à trois éléments : la pièce en Position commune va en I ; la pièce en I va en α et la pièce en α va en position commune, les autres pièces sont inchangées.

6. Si l'on part de la position de la question 6 pour arriver dans la configuration de la figure 4, il suffit d'effectuer $G^{-1}D^{-1}GD$.

7. Il y a 8 déplacements de quatre opérations permutant seulement trois pièces : *G*−1*D*−1*GD*, *G*−1*DGD*−1, *GD*−1*G*−1*D*,*GDG*−1*D*−1,*D*−1*GDG*−1, *DGD*−1*G*−1,*D*−1*G*−1*DG*,*DG*−1*D*−1*G* (permutation des trois pièces du bas, du haut, diagonale droite, diagonale gauche puis les permutations réciproques).