SUJET + CORRIGÉ

OLYMPIADES DE MATHÉMATIQUES

ACADÉMIE DE GRENOBLE

Classes de première S • 2017

Olympiades académiques de mathématiques

Académie de Grenoble

Exercices académiques

Chaque candidat traite **deux exercices.**

- Les candidats de la série S traitent les exercices numéros 1 (*À la recherche de pi*)
et 2 (*Des histoires de bicyclettes*).

- Les candidats des séries L, ES et STMG traitent les exercices numéros 3 (*Jeu de la Vie*)
et 4 (*Trapèze*).

- Les candidats des séries STI2D, STL, ST2A traitent les exercices numéros *2 (Des histoires de bicyclettes*) *et 4 (Trapèze).*

Exercice académique numéro 1 (candidats de la série S)

À la recherche d'une valeur approchée de π

Trouver des approximations du nombre π constitue depuis l'antiquité une préoccupation première des mathématiciens. Les Babyloniens et les Égyptiens furent précurseurs en la matière avec respectivement $3+\frac{1}{8}=3{,}125$ et $\left(\frac{16}{9}\right)^2 \approx 3{,}16049$. Dans cet exercice on se propose de déterminer une valeur approchée de π avec la méthode des isopérimètres imaginée par René Descartes (1596-1650).

Partie A

Montrer que si ABC est un triangle rectangle en C et H le pied de la hauteur issue de A alors $\mathrm{AH}^2=\mathrm{BH}\times\mathrm{BC}$.

C

On pourra calculer de deux façons différentes $\mathrm{AB}^2+\mathrm{AC}^2$.

A H B

Partie B

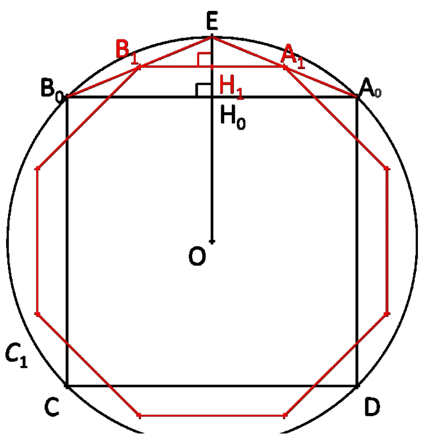


Figure 1

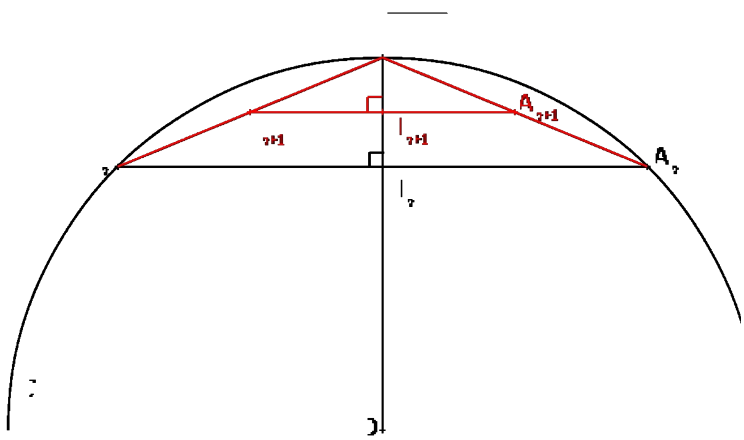


Figure 2

À partir d'un carré $\mathrm{A_0B_0CD}$ de côté 4 inscrit dans un cercle, on construit successivement le point $\mathrm{H_0}$ milieu de $[\mathrm{A_0B_0}]$, E l'intersection de la droite $(\mathrm{OH_0})$ et du cercle, $\mathrm{A_1}$et $\mathrm{B_1}$les milieux respectifs de $[\mathrm{EA_0}]$ et $[\mathrm{EB_0}]$, un octogone régulier comme indiqué dans la figure 1.

1. Justifier que l'octogone ainsi construit a même périmètre que le carré soit 16.
   On réitère le processus comme indiqué sur la figure 2.
   Le *n*-ième polygone a 2^{n+2}côtés et comme périmètre 16.

2. Montrer que $\mathrm{OH}_{n+1}\times\mathrm{EH}_{n+1}=\mathrm{A}_{n+1}\mathrm{H}_{n+1}^2$.

3. Exprimer $\mathrm{A}_{n+1}\mathrm{H}_{n+1}$en fonction de *n*.

On note r_n la distance OH_n.

4. Déduire de ce qui précède que $r_{n+1}^2-r_{n+1}r_n-\frac{1}{4^n}=0$.

5. Calculer alors r_{n+1}en fonction de r_n.

6. Écrire alors un algorithme qui permet de calculer r_{10}. En donner la valeur arrondie à 10^{-6}.

7. Après avoir expliqué ce qu'il advient lorsque les valeurs de *n* augmentent, donner une valeur approchée de π à 10^{-6} près obtenue à partir de r_{10}.

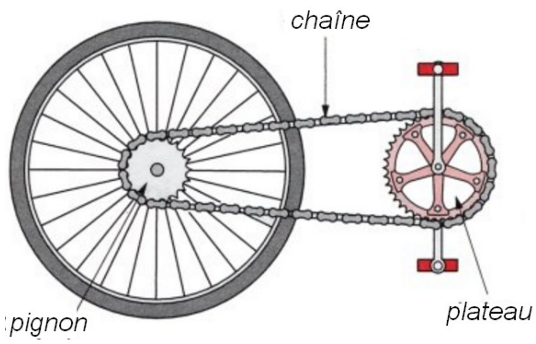
Exercice académique numéro 2
(à traiter par les candidats des séries S, STI2D, STL, ST2A)
Des histoires de bicyclettes

Partie A L'ascension d'un col

8. Un cycliste grimpe un col de longueur 19 km à la vitesse moyenne de 12 kmh^{-1}, il descend l'autre versant de 33 km à la vitesse moyenne de 35 $km.h^{-1}$.
   Quelle est sa vitesse moyenne sur l'ensemble du parcours ?
9. Il redescend le même versant à la vitesse de 36 $km.h^{-1}$.
   Sa vitesse moyenne est-elle de 24 $km.h^{-1}$?

Partie B Un peu de technique

Les roues d'un vélo ont un diamètre de 70 cm.
Le compteur de ce vélo affiche la fréquence de pédalage du cycliste en tours par minute ainsi que sa vitesse en kilomètres par heure.



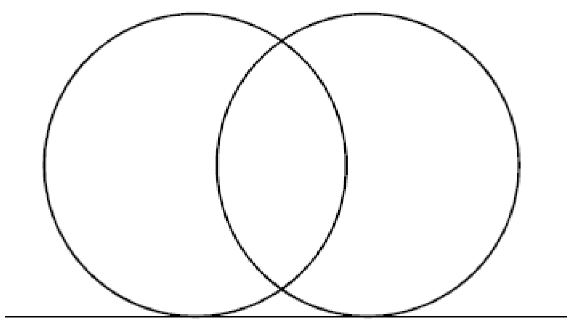
On suppose dans cette partie que la chaîne est positionnée sur le plateau comportant 41 dents et le pignon comportant 18 dents.

Quelle est la vitesse affichée sur le compteur lorsque la fréquence de pédalage est de 80 tours par minute ? On donnera une valeur arrondie à 0,1 $km.h^{-1}$.

Partie C Dans une course

1. Deux coureurs se disputent âprement la victoire. Le coureur B arrive au sommet du dernier col avec une minute de retard sur le coureur A. Il sait que dans la dernière partie de la course, il peut rouler à 2 kmh^{-1} de plus que A.
   Quelle doit être la distance minimale restant à parcourir pour qu'il ait une chance de gagner si son concurrent roule à au moins 50 $km.h^{-1}$. ?

2. Le haut-parleur annonce « A gagne avec 0,02 seconde d'avance ».
   À l'aide du schéma à l'échelle ci-dessous tiré de la photo finish, donner une estimation de la vitesse à laquelle s'est déroulé le sprint ?
   On rappelle que la roue a un diamètre de 70 cm.



Exercice académique numéro 3
(à traiter par les candidats des séries L, ES et STMG)

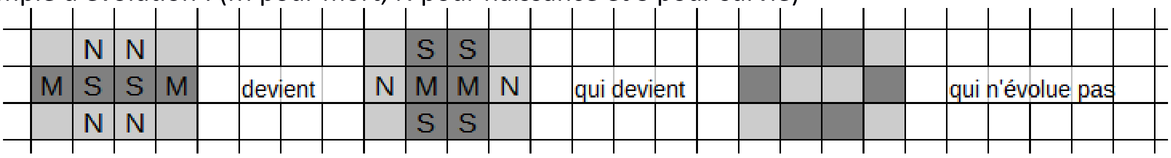
Le jeu de la vie

Le mathématicien américain John Conway a imaginé vers 1970 un jeu, appelé "**Jeu de la vie**" qui met en scène des cellules susceptibles de se reproduire, de disparaître ou de survivre.
Les cellules vivantes sont représentées dans ce qui suit par des cases foncées sur un quadrillage supposé illimité.

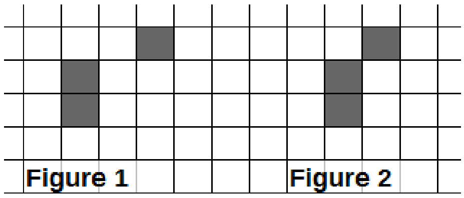
Chaque cellule est entourée de huit cases, dites adjacentes, susceptibles d'accueillir d'autres cellules ;
elles sont représentées en gris clair sur la figure ci-contre.
Les règles d'évolution des cellules sont les suivantes :
* **La survie** : chaque cellule vivante ayant deux ou trois cellules adjacentes vivantes survit.
* **La mort** :
    - par surpopulation : chaque cellule vivante ayant quatre cellules adjacentes vivantes ou plus disparaît.
    - par isolement : chaque cellule n'ayant qu'une ou aucune cellule voisine vivante meurt d'isolement.
* **La naissance** : chaque emplacement adjacent ayant exactement trois cellules vivantes fait naître une nouvelle cellule vivante pour la génération suivante.

Toutes les naissances et toutes les morts ont lieu en même temps au cours d'une génération.

Un exemple d'évolution : (M pour mort, N pour naissance et S pour survie)

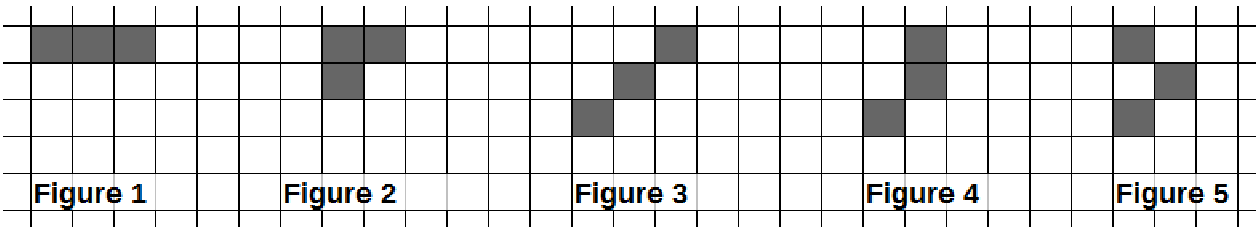


On appellera « motif » un ensemble de cellules « regroupées ».
Ainsi la figure 2 est composée d'un seul motif alors que la figure 1 est composée de deux motifs :



1 - Quel est le destin à long terme des motifs composés d'une ou deux cellules vivantes ? Expliquer.

2 - A une symétrie ou une rotation près, les motifs à trois cellules vivantes sont les suivants :

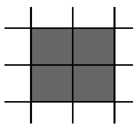


Représenter l'évolution de chacun de ces motifs.

On utilisera désormais le vocabulaire suivant :
- un motif « stable » s'il est inchangé d'une génération à la suivante,
- un motif « presque stable » s'il se transforme en un motif stable en un nombre fini d'étapes,
- un motif est « à durée de vie limitée » s'il disparaît en un nombre fini d'étapes.

3 – Trouver, parmi les motifs à quatre cellules vivantes, deux motifs stables, deux motifs à durée de vie limitée et deux motifs presque stables.

4 – Déterminer tous les motifs se transformant en une seule étape en :



Exercice académique numéro 4
(à traiter par les candidats des séries L, ES et STMG)

Des écarts sur le trapèze

On appelle trapèze de largeur L et de hauteur H une configuration contenant L emplacements sur la première ligne, L-1 sur la suivante et ainsi de suite jusqu'à la dernière ligne qui en contient L-H+1.

Un entier naturel N est dit trapézien si on peut disposer les entiers 1 à N dans les emplacements d'un trapèze de hauteur H supérieure ou égale à 2, de telle sorte qu'à partir de la deuxième ligne, tout entier soit égal à l'écart entre les deux entiers situés au-dessus de lui.

Exemples : 5 et 14 sont trapéziens :

2 5 4
3 1

9 13 1 11 14
4 12 10 3
8 2 7
6 5

1. Vérifier que les entiers 6, 7 et 9 sont trapéziens.

2. Justifier que les entiers 4 et 8 ne sont pas trapéziens.

3. Déterminer une égalité entre N, H et L.

On pourra utiliser sans justification la formule suivante : $1+2+3+...+n=\frac{n(n+1)}{2}$.

4. Justifier que les puissances de 2 ne sont pas trapéziens.

5. Démontrer que tout nombre impair supérieur ou égal à 3 est trapéziens.
On pourra considérer un trapèze de hauteur 2 et y placer les entiers pairs en bas.

Académique 1 (candidats de la serie S)

A la recherche d'une valeur approchée de π

Une rédaction possible

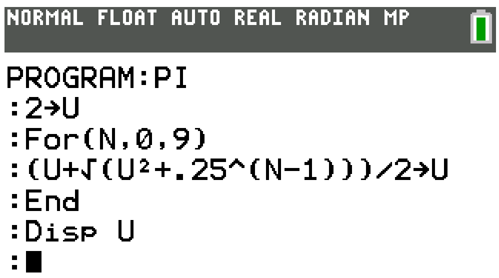
Partie A

En appliquant le théorème de Pythagore, on peut écrire : $AB^2+AC^2=BC^2=(AB^2+AH^2)+(AC^2+AH^2)$.
Donc $BC^2=(BA+AC)^2=AB^2+AC^2+2AH^2$ donc $BA^2+2BA\times AC+AC^2=AB^2+AC^2+2AH^2$.
Après simplification : $AH^2=AB\times AC$.

Partie B

1. La propriété des milieux dans le triangle A_0EB_0 donne $A_1B_1=\frac{1}{2}A_0B_0$.
   Donc $16A_1B_1=4A_0B_0=16$.
2. Le triangle OA_{n+1} est rectangle en A_{n+1} et H_{n+1} est le pied de la hauteur issue de A_{n+1}.
   La propriété démontrée en A donne le résultat.
3. Le théorème des milieux donne $A_{n+1}H_{n+1}=\frac{1}{2}A_nH_n$. La suite de terme général A_nH_n est donc géométrique de raison $\frac{1}{2}$ et de premier terme 2. Donc $A_{n+1}H_{n+1}=2\times\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}=\frac{1}{2^n}$.
4. H_{n+1} est le milieu de $[EH_n]$, on remplace dans le résultat du 2.
   EH_{n+1} par H_nH_{n+1} et on obtient alors $r_{n+1}(r_{n+1}-r_n)=\left(\frac{1}{2^n}\right)^2=\frac{1}{4^n}$, d'où le résultat.
5. On résout l'équation du second degré d'inconnue r_{n+1}. $\Delta=r_n^{\;2}-4\times\left(-\frac{1}{4}^{n}\right)=r_n^2+\frac{1}{4^{n-1}}$.

   Et donc $r_{n+1}=\dfrac{r_n+\sqrt{r_n^2+\frac{1}{4^{n-1}}}}{2}$.
6.

Variables **Initialisation** **Traitement** **Sortie**	*U* est un réel, *N* un entier *U* prend la valeur 2 Pour N allant de 0 à 9 Faire U prend la valeur de $\dfrac{U+\sqrt{U^2+\frac{1}{4^{N-1}}}}{2}$ Fin Pour Afficher *U*	 

On obtient $r_{10}\approx 2{,}546479$.

7. Lorsque *n* augmente indéfiniment, le polygone est de « plus en plus proche » du cercle de centre O et de rayon r_n. En comparant les périmètres on obtient $2\pi r_n \approx 16$ donc $\pi \approx \frac{8}{r_n}$.

$\pi \approx \frac{8}{r_{10}}$ donc $\pi \approx \frac{8}{2,54647859} \approx 3,141593$.

Académique 2 (candidats des series S, STI2D, STL, ST2A)

Des histoires de bicyclettes

Une rédaction possible

Partie A

1. $t=\frac{19}{12}+\frac{35}{33}$ $v=\frac{19+33}{t}\approx 19{,}7$ kmh^{-1}.
2. Faux : la vitesse moyenne est alors de 18 kmh^{-1} : $t=\frac{19}{12}+\frac{19}{36}$ $v=\frac{19\times 2}{t}=18$ kmh^{-1}.

Partie B

La vitesse est alors $v=80\times\frac{41}{18}\times 0{,}7\times\pi\approx 401$m/min donc $\mathrm{V}=\frac{v\times 60}{1000}\approx 24$ kmh^{-1}.

Partie C

1. Si d est la distance qui reste à parcourir, on doit avoir $\frac{d}{v+2}+\frac{1}{60}\leqslant\frac{d}{v}$ soit $d\left(\frac{1}{v}-\frac{1}{v+2}\right)\geq\frac{1}{60}$ soit $d\geq\frac{v(v+2)}{120}$.

   La distance minimale est donc $\frac{50\times 52}{120}=\frac{65}{3}\approx 21{,}7$km.
2. De la photo, on peut déduire que l'écart entre les bicyclettes est de 0,4 m.

   Donc $v=\frac{0{,}4}{0{,}02}=20$ms^{-1} $\mathrm{V}=\frac{v\times 3600}{1000}=72$ kmh^{-1}.

Académique 3 (candidats des séries L, ES et STMG)

Le jeu de la vie

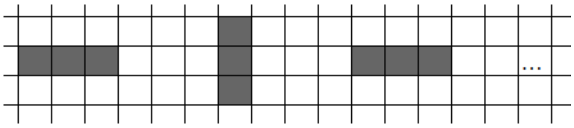
Une rédaction possible

1 - Evolution des motifs composés d'une ou deux cellules vivantes.

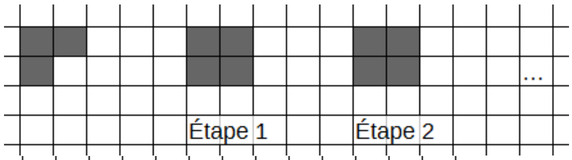
Un motif composé d'une ou deux cellules vivantes disparaît immédiatement puisque chacune de ses cellules n'a qu'une voisine au maximum, elles meurent donc par isolement et il en est de même des cellules voisines qui n'ont pas assez de cellules vivantes adjacentes pour donner naissance.

2 - Evolution des motifs composés de trois cellules vivantes.

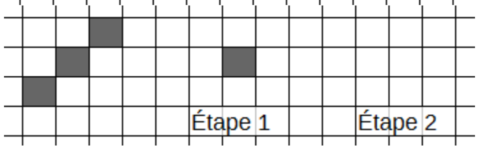
Le motif 1 est périodique, de période 2 :



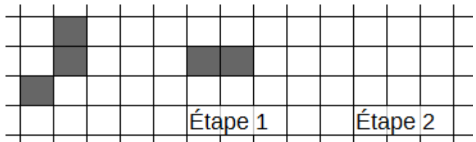
Le motif 2 se transforme en une étape en un motif stable :



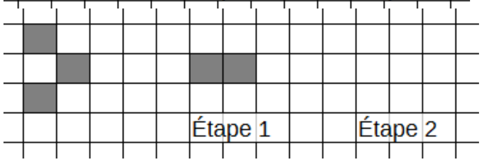
Le motif 3 disparaît en 2 étapes



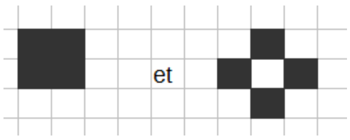
Le motif 4 disparaît également en 2 étapes



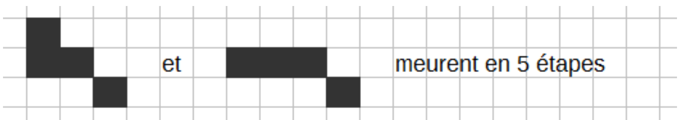
Même chose pour le motif 5 :

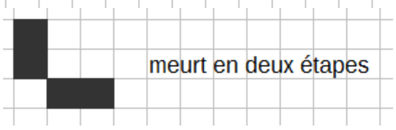


3 – Exemples de motifs stables :

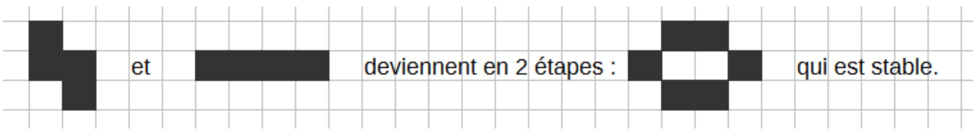


Exemples de motifs à durée de vie limitée :

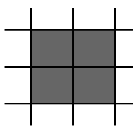




Exemples de motifs presque stables :



4 – Déterminer tous les motifs se transformant en une seule étape en :

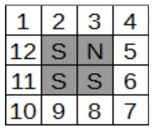


On peut ici examiner tous les motifs inscrits dans un carré de côté 4 et examiner le destin de chacun d'entre-eux ; il semble moins fastidieux de partir de la nature des cellules vivantes de ce motif (survivante ou qui vient de naître).

- Si le motif est composé de 4 cellules survivantes alors chacune des cases adjacentes avait déjà au moins 3 voisines vivantes à l'étape précédente, toutes les cases adjacentes à ce motif étaient donc vides.

Un seul antécédent dans ce cas : le motif lui-même.

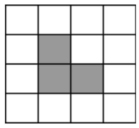
- Si le motif est composé de 3 cellules survivantes et une cellule naissante, par exemple



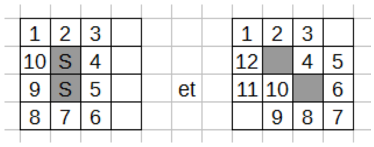
alors les cellules
2,3,4,5 et 6 étaient vides à l'étape précédente (sinon la naissance n'airait pas eu lieu)

quant-aux cellules 1 puis de 7 à 12, on se retrouve dans la situation précédente.

Ce cas ne fournit donc qu'un antécédent :



- Si le motif est composé de 3 cellules survivantes et deux naissantes, deux cas :

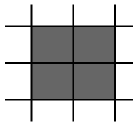


premier cas : en raisonnant comme ci-dessus, on trouve un seul antécédent :

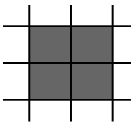
deuxième cas : on ne trouve aucun antécédent

- Les autres cas ne fournissent aucune solution.

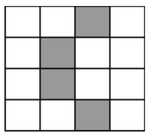
Bilan : 5 motifs se transforment en une seule étape en



ces motifs sont :



,



Académique 4 (séries L, ES, STMG, STI2D, STL et STD2A)
Des écarts sur le trapèze
Une rédaction possible

1. a) 6 est trapézien :

4 1 6
3 5
2

b) 7 est trapézien

2 5 1 7
3 4 6

c) 9 est trapézien

9 8 2 7 4
1 6 5 3

2. Le trapèze comporte alors au moins deux lignes
- sur deux lignes, il y a nécessairement un nombre impair de nombres, ce qui exclut le 4 et le 8
- sur trois lignes, il y a au minimum 6 nombres : 1 + 2 + 3, 4 ne peut donc pas être trapézien.

1 + 2 + 3 = 6 et 2 + 3 + 4 = 9, il n'est donc pas possible de placer 8 nombres sur un trapèze de hauteur 3
- sur quatre ligne, il y a au minimum 10 nombres : 1 + 2 + 3 + 4, 8 ne peut donc pas être trapézien.

3. Si N est trapézien alors N = L + L-1 + … + L-H+1 = HL – (1 + 2 + H-1)

d'où N = HL – (H-1)H/2 = H(L – (H-1)/2)

Rappel : la somme des entiers de 1 à k est $1+2+\ldots+k=\frac{k(k+1)}{2}$.

1. Justifier que les puissances de 2 ne sont pas trapéziens.
2. Démontrer que tout nombre impair supérieur ou égal à 3 est trapézien (on pourra considérer un trapèze de hauteur 2 et y placer les entiers pairs en bas).