SUJET + CORRIGÉ

OLYMPIADES DE MATHÉMATIQUES

ACADÉMIE DE GRENOBLE

Classes de première S • 2014

Olympiades Académiques de Mathématiques

Session 2014

Académie de Grenoble

Classes de Première **Durée 4 heures**

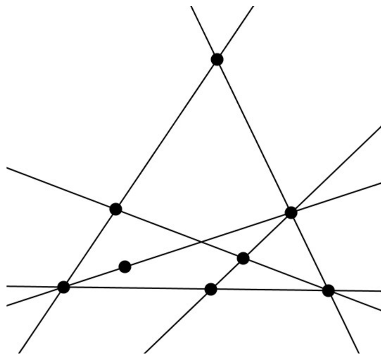
Les quatre exercices sont indépendants. Les calculatrices sont autorisées.

Les exercices n° 1,2,3 et 4 seront traités par les élèves des sections autres que S et STI.
Les exercices n° 1,2,3 et 5 seront traités par les élèves des sections S et STI.

EXERCICE NATIONAL 1 : FIGURES ÉQUILIBRÉES

figure ci-contre est constituée d'un ensemble de droites (ici, 6 droites) et de points marqués (ici, 8 points).
Elle possède la propriété suivante :
Sur chacune de ces droites, il y a exactement trois points marqués.

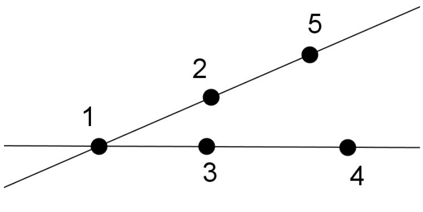
Une figure vérifiant cette propriété est dite ***équilibrée***.



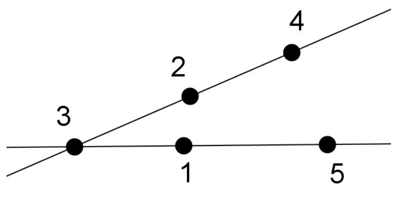
1. Construire une figure équilibrée constituée :
   a) de 7 points marqués et 5 droites ;
   b) de 9 points marqués et 8 droites.

Dans la suite, on considère une figure équilibrée comportant p points marqués qu'on a numérotés par les entiers de 1 à p.
Cette numérotation est alors dite ***magique*** s'il existe un entier K, tel que la somme des trois entiers (correspondant à la numérotation des points marqués) de chaque droite de la figure est égale à K. Cet entier K est appelé ***constante magique*** de la numérotation.

2. Voici par exemple une figure équilibrée (avec 2 droites et 5 points marqués) ayant plusieurs numérotations magiques :



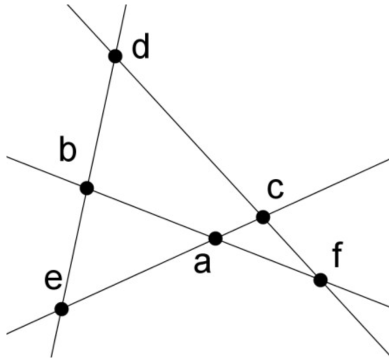
$K = 8$



$K = 9$

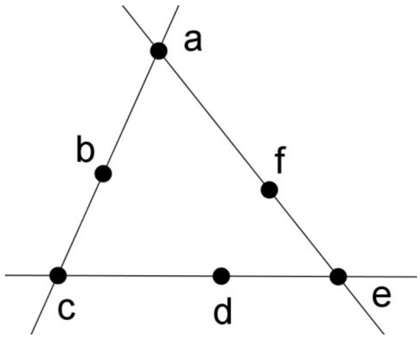
Trouver une numérotation de cette figure qui ne soit pas magique.
Trouver une numérotation magique de cette figure dont la constante magique n'est ni 8 ni 9.

3. La figure équilibrée ci-contre est constituée de 6 points et 4 droites. Les entiers 1, 2, 3, 4, 5, 6, affectés aux sommets dans un certain ordre, sont notés a, b, c, d, e, f sur la figure.



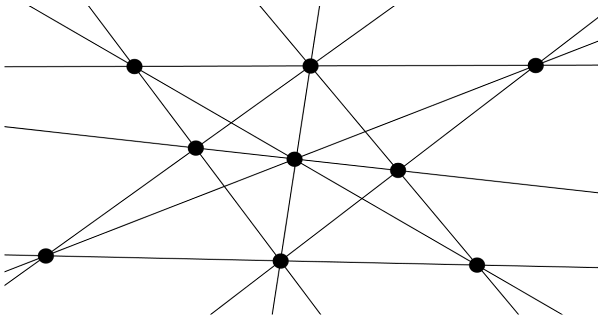
   a. Démontrer que si la figure est magique, de constante magique K, alors $4 \times K = 42$.
   b. Peut-on trouver une numérotation magique de cette figure ?
   Si oui, la donner ; si non, expliquer pourquoi.

4. La figure équilibrée ci-contre est constitué de 6 points et 3 droites. Les entiers 1, 2, 3, 4, 5, 6, affectés aux sommets dans un certain ordre, sont notés à nouveau a, b, c, d, e, f sur la figure.



   a. Démontrer que $a + c + e$ est compris entre 6 et 15.
   b. Démontrer que si la numérotation de cette figure est magique, de constante K, alors $a + c + e = 3(K - 7)$.
   c. Déterminer la(les) constante(s) magique(s) pour cette figure.

5. La figure équilibrée ci-contre est constituée de 9 points et 10 droites.
   Cette figure admet-elle une numérotation magique ?



EXERCICE NATIONAL 2 : LE PLUS COURT POSSIBLE

Quatre villes – Alençon, Bélançon, Célançon et Délançon – sont situées aux quatre sommets d'un carré dont le côté mesure 100 km. La Direction Départementale de l'Équipement souhaite les relier les unes aux autres par le réseau routier le plus court possible.

Partie A

« On pourrait construire des routes allant d'Alençon à Bélançon, puis Célançon, puis Délançon » dit l'assistant n°1.
« Ou alors, on pourrait construire deux routes diagonales : une d'Alençon à Célançon et l'autre de Délançon à Bélançon » propose l'assistant n°2.
« Et pourquoi pas, construire une route semi-circulaire complétée par deux segments ? » propose l'assistant n°3.

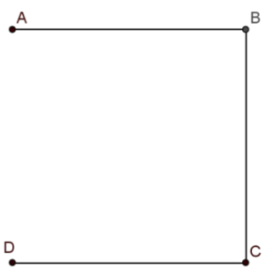


fig. 1
Assistant n°1

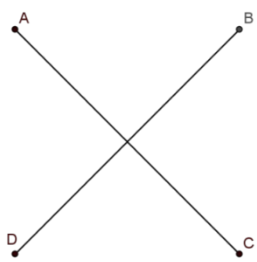


fig. 2
Assistant n°2

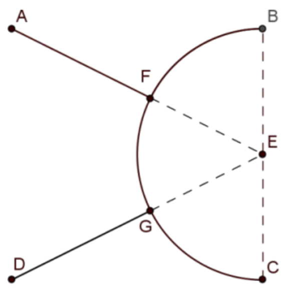


fig. 3
Assistant n°3

1. Quel assistant propose le réseau routier le plus court ?
2. Un mathématicien qui était présent propose une autre solution :

   « On pourrait relier Alençon et Délançon par un triangle isocèle (triangle AED de la fig. 4), puis Bélançon et Célançon par un triangle isocèle de même forme (triangle BFC) et relier les deux sommets E et F comme le suggère la figure ci-contre » :

   Si EF = 20 km, le réseau routier envisagé sur la figure 4 est-il plus court que ceux proposés par les assistants ?

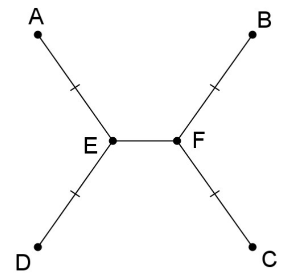


fig. 4

Partie B

Dans cette partie, on souhaite prouver que le réseau routier le plus court est effectivement du modèle proposé par le mathématicien. On cherchera par la suite la longueur EF qui réalise ce plus court chemin.

Rappels de géométrie :

Si A, B, C sont trois points du plan, en notant AB la distance entre A et B :

on a toujours $AB + BC \geq AC$;

on a l'égalité $AB + BC = AC$ *si, et seulement si, B appartient au segment [AC].*

On admettra aussi que si on trace une courbe quelconque entre A et B, la longueur de la courbe est toujours supérieure ou égale à la longueur du segment [AB] (le plus court chemin étant la ligne droite).

1. Revenons à notre réseau routier.
   On admettra qu'on peut sans restreindre la généralité supposer que le réseau solution est formé de deux courbes joignant les sommets opposés (A et C d'une part, B et C d'autre part), et que ces courbes sont à l'intérieur du carré de 100km de coté, comme dans le dessin ci-dessous :

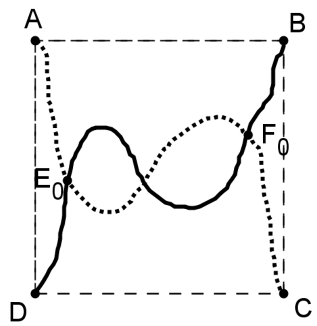


fig. 5

   On considère un réseau formé de deux courbes comme sur la figure 5.
   En parcourant la route entre Alençon et Célançon en partant d'Alençon, on appelle E_0 le premier point d'intersection rencontré et F_0 le dernier point d'intersection rencontré (ces deux points pouvant être confondus). (*fig. 5*).
   Montrer qu'alors la longueur du réseau de la fig. 5 est supérieure ou égale à celle du réseau suivant, constitué de segments (*fig. 6*).

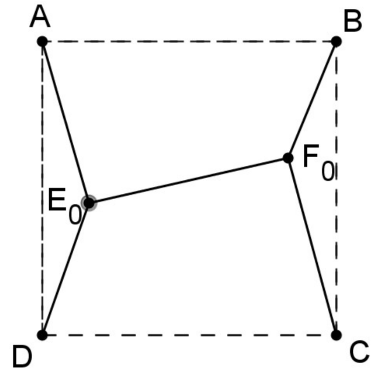


fig. 6

2. On considère les droites Δ_E et Δ_F, parallèles à (AD) passant par E_0 et F_0 (voir figure 7 ci-dessous).

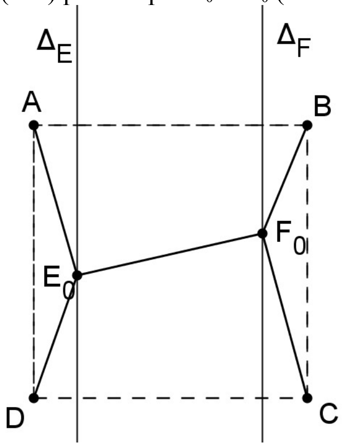


fig. 7

a. Déterminer le point E de Δ_E tel que la somme des distances DE + EA soit minimale.

3. On appelle F le point trouvé en faisant le même raisonnement pour F_0.

a. Montrer que $EF \leq E_0F_0$.

b. Déduire de ce qui précède que le réseau recherché est nécessairement de la forme suivante où E et F sont sur la médiatrice du segment [AD] (*fig. 8*).

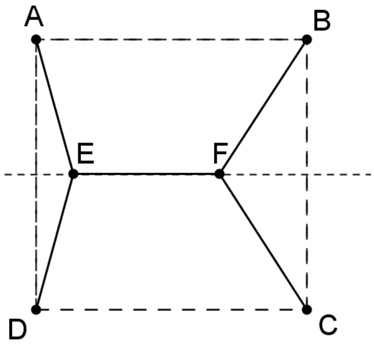


fig. 8

4. On admettra que dans le réseau recherché, les points E et F doivent être de part et d'autre de la médiatrice de [AB].

a. Justifier que le réseau recherché doit être symétrique par rapport à la médiatrice de [AB].

b. D'après ce qui précède, le réseau recherché a donc la même forme que celui que proposait le mathématicien (*fig. 4*).

Pouvez-vous l'aider à déterminer la longueur EF pour laquelle ce type de réseau routier sera le plus court possible ?

c. Quelle est alors la valeur de l'angle DEA ?

EXERCICE ACADÉMIQUE 3 : LES NOMBRES OLYMPIQUES *(pour les candidats de toutes les sections)*

Quelques rappels utiles :

Un nombre entier naturel est pair s'il est divisible par deux ; dans le cas contraire il est impair.
Le nombre 0 est pair.
L'écriture usuelle des nombres est appelée écriture décimale :
par exemple $428 = 4\times 10^2 + 2\times 10 + 8$
et plus généralement l'écriture $N = c_n c_{n-1} \ldots c_2 c_1 c_0$ *signifie* $N = c_n \times 10^n + c_{n-1}\times 10^{n-1} + \ldots + c_2\times 10^2 + c_1\times 10 + c_0$
$c_n, c_{n-1}, \ldots c_2, c_1$ *et* c_0 *sont les chiffres de l'entier naturel* N .
On ne tient pas compte des zéros inutiles (00043 = 43)

Un entier naturel non nul N est olympique si son écriture décimale vérifie les conditions suivantes :
- Si deux chiffres consécutifs de l'écriture décimale de N sont pairs, alors ils sont égaux.
- Si deux chiffres consécutifs sont tousles deux impairs, alors ils sont différents.

Exemples :
1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 et 9 sont olympiques car ils n'ont qu'un chiffre, ils n'ont donc aucune condition à satisfaire.
12345, 3157 et 2251300 sont olympiques
3112, 21664 et 551429 ne sont pas olympiques.

1 – Déterminer le plus petit entier naturel impair qui n'est pas olympique.
2 – Déterminer le plus petit entier naturel pair non nul qui n'est pas olympique.
3 – Combien il y a-t-il de nombres olympiques à deux chiffres ?

Notons P_n le nombre de nombres olympiques pairs à n chiffres et notons I_n le nombre de nombres olympiques impairs.

4 – Déterminer P_2 et I_2 .
5 – Déterminer P_3 et I_3 .
6 – Combien il y a-t-il de nombres olympiques à quatre chiffres ?

EXERCICE ACADÉMIQUE 4 : LES DOMINOS *(pour les candidats des sections autres que S et STI)*

Si a et b sont deux entiers naturels non nuls, on appelle domino de taille $a\times b$ un rectangle dont les longueurs des côtés sont a et b .
Une grille carrée de côté n est un quadrillage dont les n^2 cases sont des carrés de côté 1.
On dira qu'une grille carrée contient k dominos de taille $a\times b$ si on peut placer sans chevauchement ni dépassement k dominos de taille $a\times b$ sur cette grille (les sommets des dominos devant être placés sur les sommets des cases).

1. Dans cette partie, on utilise exclusivement des dominos de taille 1×2 .
   a) Combien de dominos (au maximum), la grille carrée de côté 3 peut-elle contenir ?
   b) Existe-t-il une grille carrée qui peut contenir un nombre impair de dominos mais pas un de plus ?

2. Dans cette partie, on utilise exclusivement des dominos de taille 3×4
   a) Quelle est la plus petite grille carrée qui peut contenir au moins 21 dominos ?
   b) Cette grille peut-elle contenir 22 dominos ?

3. Dans cette partie, on utilise exclusivement des dominos de taille 16×21 .
   a) Montrer que la grille carrée de côté 58 peut contenir 9 dominos.
   b) Cette grille peut-elle contenir 10 dominos ?

EXERCICE académique 5 : ***Les portes basculantes*** ***(pour les candidats des sections S et STI)***

Les garages des immeubles récents sont équipés de portes basculantes qui permettent l'entrée dans les parties communes ainsi que dans les parties privées.
(O,U,V) est un repère orthonormal.

Partie A : Accès aux parties communes

Les portes permettant l'accès aux parties communes sont en général conçues de telle sorte qu'elles ne débordent pas sur la voie publique.

La porte étudiée a une hauteur de 2m. Sa partie supérieure peut être assimilée à un point mobile M se déplaçant sur le segment [AB], sa partie inférieure à un point mobile N situé sur le segment [AO].

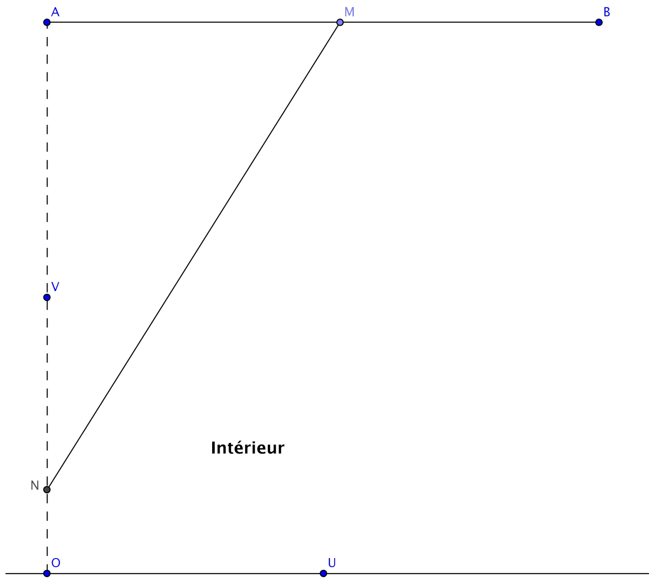
1) Montrer que lorsque M décrit [AB], le milieu I de [MN] décrit un arc de cercle que l'on précisera.

2) On note x l'abscisse de M dans le repère (O,U,V). Exprimer l'ordonnée y de N en fonction de x.

3) a) Calculer en fonction de x les coordonnées du milieu J de [NI].

b) Tracer dans un repère orthonormal, avec soin, la courbe décrite par le point J lorsque M décrit [AB].

4) Dans cette question une réponse précise et argumentée est attendue. La porte est fermée. Une camionnette de hauteur 1,5 m souhaite sortir. Elle s'est arrêtée à 0,9 m de la porte. Celle-ci pourra-t-elle s'ouvrir ?



Partie B : Accès aux garages privés

Les garages privés sont en général de taille limitée. La porte basculante est donc conçue de telle sorte qu'elle s'ouvre sur l'extérieur du garage.

La hauteur de la porte est encore de 2m et le point M se déplace sur le segment [AB].

Un bras rigide [PC] de longueur 0,8 m est ancré au mur au point P situé à 1,2 m du sol. La porte est fixée à ce bras en C situé à 1,6 m de M. Le point N matérialise l'extrémité de la porte.

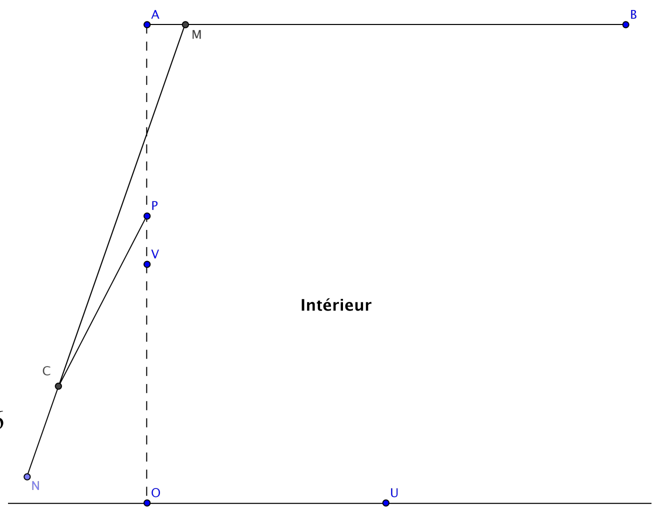
1) Construire la figure correspondante en indiquant la position de la porte lorsque :

a) M est au milieu de [AB],

b) M est en B.

2) La porte du garage est fermée. Jean prétend qu'il n'y a aucun risque à laisser un véhicule à l'extérieur stationné à 1,2 m de la porte. A-t-il raison ?

3) La porte peut-elle s'ouvrir lorsqu'un objet de hauteur 0,6 m est déposé à l'extérieur du garage à 1 m de la porte ?



CORRECTION, GRENOBLE 2014

Premier exercice Académique (exo 3)

Olympiades mathématiques, S

1. 11
2. 20
3. 1102
4. 69. Justification : Soit $10c_1 + c_0$ un nombre olympique à deux chiffres (On convient que $c_{n-1} \in \{1, \dots, 9\}$ pour un nombre (décimal) $10^{n-1}c_{n-1} + c_{n-2}10^{n-2} + \dots$ à n chiffres). Si $c_0 = 0$, alors c_1 est impair quelconque (5 possibilités),
   si $c_0 \in \{2, 4, 6, 8\}$ alors ou bien $c_1 = c_0$ ou bien c_1 est impair quelconque (ce qui donne $4(1+5) = 24$ possibilités) pour un total de $5 + 24 = 29$nombres olympiques pairs à deux chiffres.
   Si c_0 est impair, alors ou bien c_1 est pair et non-nul ou bien c_1 est impair et différent de c_0 ce qui donne $5(4 + 4) = 40$ nombres olympiques impairs à deux chiffres.
5. $P_2 = 29,\ I_2 = 40$, voir ci-dessus.
6. En étudiant toutes les possibilités de construire un nombre olympique $\sum_{i=0}^{n-1} c_i 10^{i+1} + \gamma_0$ en rajoutant un $n+1$-ième chiffre à un nombre olympiques $\sum_{i=0}^{n-1} c_i 10^i$ à n chiffres, on arrive au système

$$\begin{cases} P_{n+1} = P_n + 5I_n, \\ I_{n+1} = 5P_n + 4I_n. \end{cases}$$

   On a donc

$$\begin{array}{rcccl} P_3 & = & 29 + 5 \cdot 40 & = & 229 \\ I_3 & = & 5 \cdot 29 + 4 \cdot 40 & = & 305 \end{array}$$

   (ce qui donne $229 + 305 = 534$ nombres olympiques à 3 chiffres).
7. On a

$$\begin{array}{rcccl} P_4 & = & 229 + 5 \cdot 305 & = & 1754 \\ I_4 & = & 5 \cdot 229 + 4 \cdot 305 & = & 2365 \end{array}$$

   ce qui donne $4119 = 1754 + 2365$ nombres olympiques à 4 chiffres.
8. Soustrayons le nombre de nombres non-semi-olympiques à 4 chiffres de 9000 (qui est le nombre total de nombres à 4 chiffres) : Un nombre décimal $c_3c_2c_1c_0$ n'est pas semi-olympique si ou bien (c_3, c_2 sont identiques et impaires et c_1, c_0 sont tous les deux pairs et différents ($5 \cdot 5 \cdot 4 = 100$ possibilités)) ou bien (c_3, c_2 sont tous les deux pairs et différents et $c_3 \neq 0$ et c_1, c_0 sont identiques et impaires ($4 \cdot 4 \cdot 5 = 80$ possibilités)) et ces deux cas s'excluent mutuellement. Il y a donc exactement $180 = 100 + 80$ nombres à 4 chiffres qui ne sont pas semi-olympiques. On en déduit qu'il y a $9000 - 180 = 8820$ nombres semi-olympiques à 4 chiffres. **Méthode plus compliquée mais qui se généralise mieux :** Notons P'_n, respectivement I'_n, le nombre de semi-olympiques pairs, respectivement impairs, à n chiffres qui ne possèdent pas deux chiffres pairs consécutifs différents dans leur écriture décimale. On a $P'_2 = 5 + 4(1 + 5) = 29$ (voir ci-dessus) et $I'_2 = 45$ (les 45 entiers impairs $11, 13, 15, \dots, 97, 99$ à deux chiffres). On a les formules récursives

$$\begin{array}{l} P'_{n+1} = P'_n + 5I'_n \\ I'_{n+1} = 5(P'_n + I'_n) \end{array}$$

   qui donnent

$$\begin{array}{rcccl} P'_3 & = & 29 + 5 \cdot 45 & = & 254 \\ I'_3 & = & 5(29 + 45) & = & 370 \\ P'_4 & = & 254 + 5 \cdot 370 & = & 2104 \\ I'_4 & = & 5(254 + 370) & = & 3120 \end{array}$$

   Notons similairement P''_n, respectivement I''_n, le nombre de semi-olympiques pairs, respectivement impairs, à n chiffres qui ne possèdent pas deux chiffres impairs consécutifs identiques dans leur écriture décimale. On a $P''_2 = 45$ et $I''_2 = 40$.

$$P''_{n+1} = 5(P''_n + I''_n)$$
$$I''_{n+1} = 5P''_n + 4I''_n$$

qui donnent

$$\begin{array}{rcccr} P''_3 & = & 5(45+40) & = & 425 \\ I''_3 & = & 5\cdot 45 + 4\cdot 40 & = & 385 \\ P''_4 & = & 5(425+385) & = & 4050 \\ I''_4 & = & 5\cdot 425 + 4\cdot 385 & = & 3665 \end{array}$$

Observons maintenant qu'un nombre olympique pair, respectivement impair, à n chiffres donne une contribution de 1 à P'_n et à P''_n, respectivement à I'_n et I''_n. Le nombre de semi-olympiques à n chiffres est donc ègal à $P'_n + I'_n + P''_n + I''_n - P_n - I'_n$ ce qui donne pour $n = 4$ un total de

$$2104 + 3120 + 4050 + 3665 - 1754 - 2365 = 8820$$

semi-olympiques à 4 chiffres.
(Remarque : Pour $n = 3$ on obtient bien tous les

$$254 + 370 + 425 + 385 - 229 - 305 = 900$$

nombres à 3 chiffres qui sont tous semi-olympiques.)

(On pourrait aussi raisonner sur la parité du plus grand chiffre c_{n-1} et rajouter un nouveau chiffre c_n en tenant compte des parités de c_{n-1}, c_n mais il faut alors gérer les problèmes lié au fait que c_{n-1} est peut-être 0 dans un nombre olympiques $c_n \ldots$. Cela devient donc plus compliqué !)

CORRECTION, GRENOBLE 2014

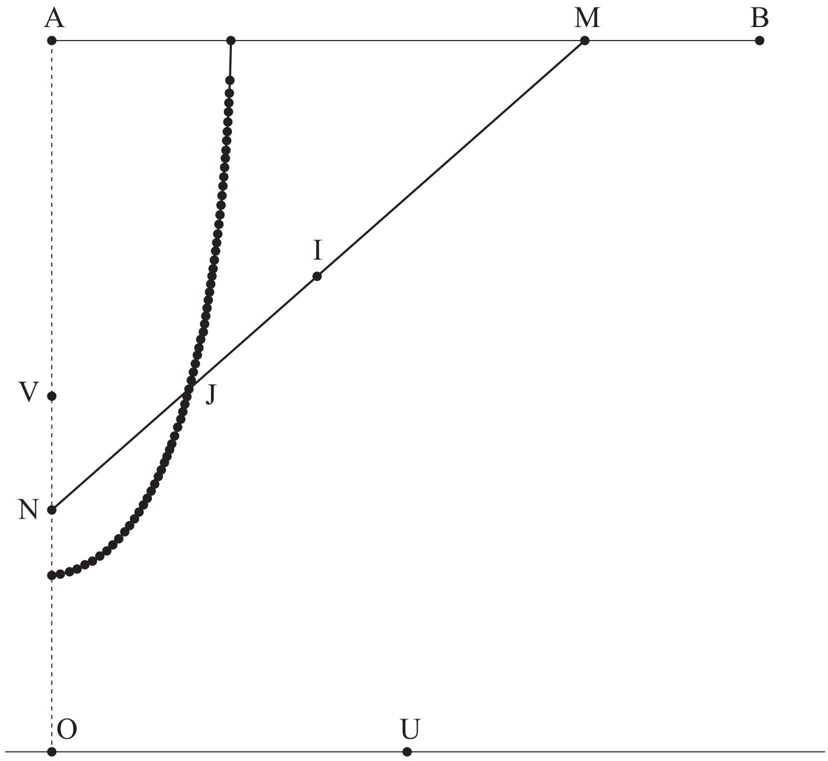
Second exercice Académique (exo 5)

Olympiades mathématiques, S

Partie A – Accès aux parties communes

1. 1) Le triangle AMN est rectangle en A. Le milieu I de l'hypoténuse est donc le centre de son cercle circonscrit dont le rayon est 1 m. La distance de A à I est constante égale à 1 m.
   Lorsque M décrit [AB], I décrit le quart de cercle de centre A et de rayon 1 délimité par les segments [AO] et [AB].
2. M a pour coordonnées $(x; 2)$ avec $x \in [0; 2]$ et $\mathrm{N}(0; y)$ avec $y \in [0; 2]$.
   $MN^2 = 4$ donc $(0-x)^2 + (y-2)^2 = 4$ donc $(y-2)^2 = 4 - x^2$.
   Mais $y - 2 \leqslant 0$ donc $y - 2 = -\sqrt{4-x^2}$ et $y = 2 - \sqrt{4-x^2}$.
3. a) $x_{\mathrm{J}} = \dfrac{x_{\mathrm{N}} + x_{\mathrm{I}}}{2} = \dfrac{0 + \frac{x}{2}}{2} = \dfrac{x}{4}$ et $y_{\mathrm{J}} = \dfrac{y_{\mathrm{N}} + y_{\mathrm{I}}}{2} = \dfrac{\left(2 - \sqrt{4-x^2}\right) + \left(\dfrac{2 - \sqrt{4-x^2} + 2}{2}\right)}{2}$
   donc $y_{\mathrm{J}} = 2 - \dfrac{3}{4}\sqrt{4-x^2}$.
   Mais alors $y_{\mathrm{J}} = 2 - \dfrac{3}{4}\sqrt{4 - (4x_{\mathrm{J}})^2} = 2 - \dfrac{3}{2}\sqrt{1 - 4x_{\mathrm{J}}^2}$.
   J décrit donc la courbe d'équation $x \in [0; 1]$ et $y = 2 - \dfrac{3}{2}\sqrt{1-4x^2}$.

   b)



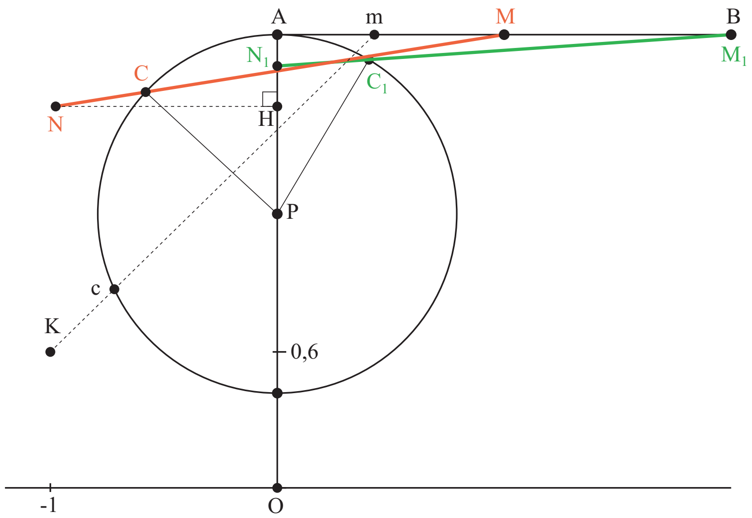
4. ***Solution 1***
   $\mathrm{K}(0,9; 1,5)$. On positionne M en $(1,6; 2)$, alors $\mathrm{N}(0; 0,8)$.
   Le coefficient directeur de la droite (MN) est $a_{\mathrm{MN}} = \dfrac{0,8-2}{0-1,6} = \dfrac{3}{4}$.
   La droite (MN) a pour équation réduite : $y = \dfrac{3}{4}x + 0,8$.
   Si $x = 0,9$ alors $y = 1,475$ donc $y < y_{\mathrm{K}}$.

Solution 2
On note $\alpha = \widehat{AMN}$.
Dans le repère (O, U, V), M$(2\cos\alpha ; 2)$ et N$(0 ; 2 - 2\sin\alpha)$.
Une équation de (MN) est $y = \tan\alpha + 2 - 2\sin\alpha$.
Le candidat doit chercher un α tel que $\tan\alpha \times 0,9 + 2 - 2\sin\alpha < 1,5$.

$\alpha = \dfrac{\pi}{4}$ convient.

Bilan : la porte ne pourra pas s'ouvrir.

Partie B – Accès aux garages privés

1. 

2. Jean a raison car $HN \leqslant PN \leqslant PC + CN = 0,8 + 0,4 = 1,2$.

3. Dans le repère donné, on justifie que $y_C > y_N$ et que $y_C < 0$. On note encore $\alpha = \widehat{AMN}$.
$\sin\alpha = \dfrac{2 - y_N}{2}$ donc $y_N = 2 - 2\sin\alpha$; par ailleurs, $\sin\alpha = \dfrac{y_C - y_N}{0,4}$ donc $y_C = 2 - 1,6\sin\alpha$.
$PC^2 = (x_C)^2 + (1,2 - y_C)^2 = (x_C)^2 + (1,6\sin\alpha - 0,8)^2 = 0,8^2$.
Donc $x_C^2 = 0,8^2 - 0,8^2(2\sin\alpha - 1)^2$ donc $x_C = -0,8\sqrt{1 - (2\sin\alpha - 1)^2}$.
Or $\cos\alpha = \dfrac{x_C - x_N}{0,4}$ donc $x_N = x_C - 0,4\cos\alpha = -0,8\sqrt{1 - (2\sin\alpha - 1)^2} - 0,4\cos\alpha$.