OLYMPIADES MATHÉMATIQUES
LYCÉE, PREMIÈRE

ACADÉMIE DE DIJON
2020

SUJET + CORRIGÉ

20e OLYMPIADES DE MATHÉMATIQUES

Mercredi 11 mars 2020[1], 2 énoncés (national et académique) en 4 heures, élèves de première générale et technologique[2] et de début de terminale[3], inscription auprès de votre professeur de mathématiques avant les vacances d'hiver selon académie.

Liberté • Égalité • Fraternité
RÉPUBLIQUE FRANÇAISE
MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE

Sujet et Corrigé vous sont présentés par freemaths.fr . . .

MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE ET DE LA JEUNESSE

Olympiades nationales de mathématiques 2020

Métropole-Europe-Afrique-Orient-Inde

L'épreuve se déroule en deux parties indépendantes de deux heures chacune. Les énoncés des deux parties sont donc séparés et distribués séparément à des moments différents.

La première partie est constituée des exercices nationaux. À son issue, les copies sont ramassées et une pause de cinq à quinze minutes est prévue, avant la seconde partie, constituée des exercices académiques.

Des consignes de confinement peuvent être données selon la zone géographique de passation de l'épreuve.

Les calculatrices sont autorisées selon la réglementation en vigueur.

Il est conseillé aux candidats qui ne pourraient formuler une réponse complète à une question d'exposer le bilan des initiatives qu'ils ont pu prendre. Les énoncés doivent être rendus au moment de quitter définitivement la salle de composition.

La deuxième de l'épreuve contient trois exercices. Elle est réalisée en équipe : une copie par équipe.

Les candidats de voie générale ayant suivi l'enseignement de spécialité de mathématiques doivent traiter les exercices académiques 1 et 2.

Les autres candidats doivent traiter les exercices académiques 1 et 3.

PARTIE 2

Ce sujet comprend 5 pages celle-ci incluse.

Exercice académique 1 (à traiter par tous les candidats)

Map monde

Soit n un nombre entier supérieur ou égal à 10. On décide de permuter les chiffres qui le composent de toutes les façons possibles, puis d'effectuer la moyenne de tous les nombres obtenus (n compris). Cette *Moyenne Arithmétique des Permutés de* n sera notée $MAP(n)$. Voici quelques exemples :

$$MAP(53) = \frac{53+35}{2} = 44\ ;\ MAP(20) = \frac{20+02}{2} = 11\ ;\ MAP(607) = \frac{607+670+706+760+067+076}{6} = 481$$

Si n contient plusieurs fois le même chiffre, certains de ses permutés sont identiques. Par exemple :

$$MAP(\mathbf{1}21) = \frac{\mathbf{1}21 + 1\mathbf{1}2 + 2\mathbf{1}1 + 21\mathbf{1} + 12\mathbf{1} + \mathbf{1}12}{6} = 148$$

L'entier n est dit :

- *à deux chiffres,* s'il est compris entre 10 et 99 ;
- *à trois chiffres*, s'il est compris entre 100 et 999, et ainsi de suite.

1. Calculer $MAP(51)$, $MAP(411)$ et $MAP(2020)$ en détaillant le raisonnement.

2.

a) Deux entiers différents peuvent-ils avoir la même MAP ?

b) Soit n un entier supérieur ou égal à 10.

(i) Le nombre $MAP(n)$ est-il toujours un entier ?

(ii) Existe-t-il une règle concernant la parité de $MAP(n)$ en fonction de celle de n ?

c) Soient p et q deux entiers à deux chiffres. Est-il vrai que $MAP(p+q) = MAP(p) + MAP(q)$?

3. Dans cette question, soit n un entier supérieur ou égal à 10, de sorte que $MAP(n)$ soit un entier.

a) Si n est à trois chiffres, quelle est la plus petite valeur possible de $MAP(n)$? Et la plus grande ?

b) Les nombres n et $MAP(n)$ ont-ils toujours le même nombre de chiffres ?

c) Céline conjecture la proposition : « si n est à deux chiffres, alors $MAP(n)$ est un multiple de 11 ».

Qu'en pensez-vous ? Énoncer la réciproque de cette proposition. Est-elle vraie ou fausse ?
<u>Indication</u> : un entier m à deux chiffres peut toujours s'écrire sous la forme $m = 10d + u$ avec u le chiffre des unités et d celui des dizaines. Par exemple : $75 = 10 \times 7 + 5$.

4. Soit n un entier supérieur ou égal à 10. On s'intéresse à l'équation $MAP(n) = n$.

a) Déterminer au moins trois solutions à quatre chiffres de cette équation.

b) Déterminer toutes les solutions à deux chiffres, puis à trois chiffres, de cette équation. Justifier.

5. Soit n un entier supérieur ou égal à 10. On souhaite résoudre l'équation $MAP(n) = 2020$.
On dispose d'une fonction $permutes(n)$ qui renvoie, sous forme d'une liste, les permutés de n.
Par exemple, exécuter l'instruction $permutes(607)$ renvoie la liste [607; 670; 706; 760; 67; 76].
Les algorithmes suivants seront écrits en langage naturel, ou programmés dans le langage de votre choix.

a) Rédiger un algorithme qui, à la donnée de n, renvoie la moyenne de ses permutés.

b) Rédiger un algorithme permettant de résoudre l'équation $MAP(n) = 2020$.
<u>Remarque</u> : l'exécution du programme montre que cette équation n'a en fait pas de solution.

c) Expliquer un fonctionnement possible de la fonction $permutes(n)$ (schéma et/ou algorithme).

Exercice académique 2 (à traiter par les candidats de voie générale ayant choisi la spécialité mathématiques)

Addition des cancres, suite de Farey et approximation

(sur une idée de R. Ferachoglou)

Les professeurs font parfois de curieuses opérations. En effet, dans son dernier contrôle, Émile a obtenu 9/12 à l'exercice 1 et 7/8 à l'exercice 2 ce qui lui fait un total de 16/20 alors que bien entendu, $\frac{9}{12}+\frac{7}{8}=\frac{13}{8}\neq\frac{16}{20}$.

Partie 1 : Addition des cancres

Dans ce problème, nous allons utiliser une nouvelle opération sur les fractions appelée « addition des cancres ». Elle consiste simplement à ajouter les numérateurs entre eux et les dénominateurs entre eux. On la note $\oplus$. Autrement dit, avec *a*, *b*, *c* et *d* des nombres entiers positifs (*b* et *d* non nuls), $\frac{a}{b}\oplus\frac{c}{d}=\frac{a+c}{b+d}$.

1. Calculer $\frac{3}{2}\oplus\frac{1}{7}$ puis $\frac{7}{3}\oplus\frac{1}{5}$.

2. Montrer que si $\frac{a}{b}<\frac{c}{d}$ alors $\frac{a}{b}<\frac{a}{b}\oplus\frac{c}{d}<\frac{c}{d}$.

Partie 2 : Les suites de Farey

On appelle « suite de Farey d'ordre *n* » la liste, par ordre croissant, des fractions irréductibles comprises (au sens large) entre 0 et 1 dont le dénominateur est inférieur ou égal à *n*. On la note F_n .

Par exemple, $F_1=\left(\frac{0}{1};\frac{1}{1}\right)$; $F_2=\left(\frac{0}{1};\frac{1}{2};\frac{1}{1}\right)$ et $F_3=\left(\frac{0}{1};\frac{1}{3};\frac{1}{2};\frac{2}{3};\frac{1}{1}\right)$.

1. Écrire F_4 et F_5.

2.

a) Montrer que si $\frac{a}{b}$ est irréductible alors $\frac{b-a}{b}$ est irréductible.

b) En déduire que $\frac{1}{2}$ occupe la position médiane dans F_n. Autrement dit, montrer que si $\frac{a}{b}\in F_n$ alors $1-\frac{a}{b}\in F_n$ et que $\frac{1}{2}$ est bien situé entre ces deux fractions.

3.

a) À l'aide de l'addition des cancres, conjecturer une relation entre trois termes consécutifs quelconques d'une suite de Farey.

b) Vérifier la conjecture précédente pour F_5.

4.

a) Trouver la fraction avec le plus petit dénominateur possible comprise entre $\frac{1}{3}$ et $\frac{1}{2}$.

b) Même question avec $\frac{1}{3}$ et $\frac{2}{5}$.

c) Que peut-on donc conjecturer à propos de la fraction de plus petit dénominateur possible comprise entre deux termes consécutifs d'une suite de Farey ?

5. En admettant la conjecture précédente et à partir de F_5, construire successivement F_6 et F_7.

6. Décrire la méthode qui permet d'obtenir F_{n+1} à partir de F_n.

Partie 3 : Approximation rationnelle d'un nombre réel

On considère un nombre réel x entre 0 et 1 que l'on souhaite encadrer par deux fractions de dénominateur au plus n.

1. Justifier que le meilleur encadrement est donné par deux fractions consécutives de F_n.

2. Voici un algorithme écrit dans le langage Python :

```
From math import sqrt

a=0
b=1
c=1
d=1
x=1/sqrt(2)

while b + d <= 100 :
    e = a + c
    f = b + d
    if (e/f) < x :
        a = e
        b = f
    else :
        c = e
        d = f

print(a,b,c,d)
```

Faire fonctionner cet algorithme et interpréter le résultat obtenu.

Exercice académique 3 (à traiter par les candidats n'ayant pas suivi la spécialité de mathématiques de voie générale)

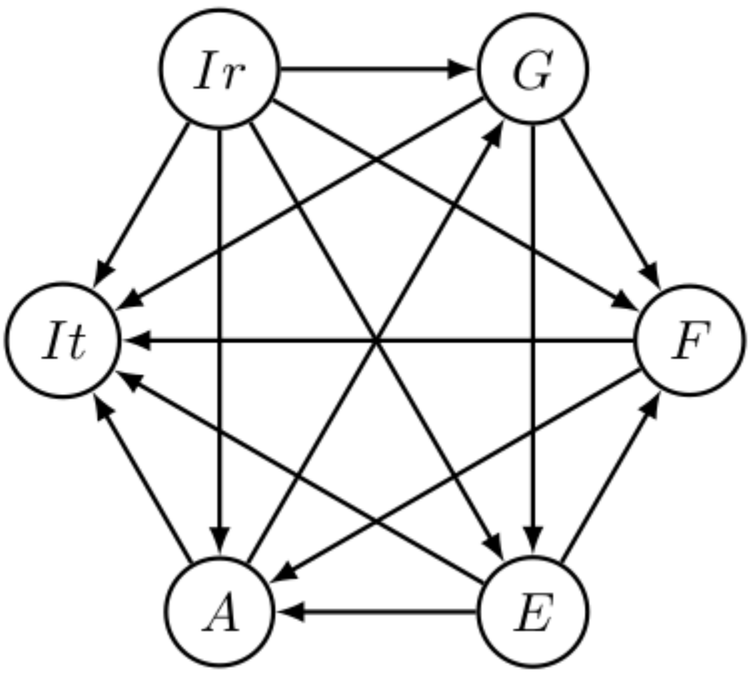
Le tournoi des six nations

Le Tournoi des Six Nations est un tournoi de rugby à XV, qui se déroule chaque année de février à mars. Seules six équipes sont autorisées à participer : les équipes d'Angleterre (A), d'Écosse (E), de France (F), du pays de Galles (G), d'Irlande (Ir) et d'Italie (It). Durant ce tournoi, chaque équipe affronte les cinq autres exactement une fois.

Il y a plusieurs termes pour désigner la performance globale d'une équipe durant le tournoi :

- on dit qu'une équipe réalise un **grand chelem** si elle remporte tous ses matches durant le tournoi ;
- on dit qu'une équipe *A* réalise un **mini chelem** si elle ne réalise pas un grand chelem et si pour chaque autre équipe *B*, soit *A* a battu *B*, soit *A* a battu une équipe ayant battu *B* ;
- on dit qu'une équipe remporte la **cuillère de bois** si elle a perdu tous ses matches.

1. Combien de matches sont disputés lors du tournoi des six nations ?
2. Le graphe ci-dessous présente les résultats du tournoi des six nations de l'année 2018. Une flèche d'une équipe vers une autre indique que la première a battu la seconde (par exemple la flèche de *A* vers *G* indique que l'Angleterre a battu le pays de Galles). Un match nul serait représenté par un trait en pointillés sans flèche.



   Une équipe a-t-elle réalisé un grand chelem en 2018 ? Un mini chelem ? Une cuillère de bois ?

3. Est-il possible qu'une équipe réalise un grand chelem et qu'une autre équipe réalise un mini chelem, dans la même édition du tournoi ?
4. Est-il possible que deux équipes réalisent un mini chelem durant le même tournoi ?
5. Au maximum, combien d'équipes peuvent réaliser un mini chelem durant le même tournoi ?
6. Montrer que, quand il n'y a pas de match nul, au moins une équipe réalise un mini chelem ou un grand chelem.

OLYMPIADES MATHÉMATIQUES
LYCÉE, PREMIÈRE

CORRECTION !

Épreuve ▪ 2020

CORRECTION OLYMPIADES

EXERCICES ACADÉMIQUES

DIJON 2020

Exercice 1. MAP monde

1. $MAP(51) = \dfrac{51+15}{2} = 33$.

Le nombre 411 s'écrivant avec trois chiffres dont deux sont identiques, ce nombre a six permutés deux à deux identiques, soit trois nombres différents, chacun obtenu deux fois : $MAP(411) = \dfrac{411+141+114}{3} = \dfrac{666}{3} = 222$

Le nombre 2020 s'écrivant avec quatre chiffres, il a 24 permutés. Mais vu que ses chiffres sont deux à deux identiques, ses 24 permutés sont quatre à quatre identiques soit six nombres différents, chacun obtenu quatre fois : $MAP(2020) = \dfrac{2200+2020+2002+220+202+22}{6} = \dfrac{6666}{6} = 1111$

2.a. La réponse est oui, notamment si deux entiers sont des permutés l'un de l'autre, par exemple, 51 et 15, ou bien 411 et 114, ont la même *MAP*. Mais pas seulement, les entiers 26 et 35 par exemple ont la même *MAP*. : $MAP(26) = MAP(35) = 44$

2.b.i. Non, le nombre $MAP(n)$ n'est pas nécessairement un entier, par exemple $MAP(23)=\dfrac{23+32}{2}=\dfrac{55}{2}$.

2.b.ii. Non, il n'existe aucune règle. Dès lors que $MAP(n)$ n'est pas nécessairement un entier il ne peut d'ailleurs pas y en avoir.

Dans les cas où $MAP(n)$ est un entier, quand bien même, sa parité n'est pas liée à celle de *n*. Par exemple $MAP(42)=\dfrac{42+24}{2}=\dfrac{66}{2}=33$ (impair), alors que $MAP(62)=\dfrac{62+26}{2}=\dfrac{88}{2}=44$ (pair).

2.c. C'est faux. Par exemple :

$MAP(26)=\dfrac{26+62}{2}=44$; $MAP(15)=\dfrac{15+51}{2}=33$; $MAP(26+15)=MAP(41)=\dfrac{41+14}{2}=\dfrac{55}{2}$

3.a. $MAP(999)=999$ et comme 999 est le plus grand des nombres à trois chiffres, on ne peut pas faire mieux. La plus grande valeur est, sans contestation possible, 999.

La valeur la plus petite est $MAP(100)=\dfrac{100+10+1}{3}=\dfrac{111}{3}=37$. En effet, si *n* est un nombre qui s'écrit avec trois chiffres, son chiffre des centaines est au moins égal à 1. Deux de ses permutés (lui-même et un autre) sont au moins égaux à 100, deux autres sont au moins égaux à 10 (lorsque le chiffre des centaines de *n* est leur chiffre des dizaines) et deux autres sont au moins égaux à 1 (lorsque le chiffre des centaines de *n* est leur chiffre des unités). La somme des six permutés est au moins égale à $200+20+2=222$ et leur moyenne à $\dfrac{222}{6}=37$.

3.b. Soit *k* le nombre de chiffres de l'entier *n*. Tous les permutés de *n* s'écrivent tous avec au plus *k* chiffres (parfois moins, si zéro figure parmi les chiffres de *n*). Dès lors que $MAP(n)$ est une moyenne de nombres qui s'écrivent tous avec au plus *k* chiffres, $MAP(n)$ est lui-même un nombre qui s'écrit avec au plus *k* chiffres.

On note que : $MAP(100)=37$; $MAP(101)=MAP(110)=74$, ces contre-exemples montrent que $MAP(n)$ peut s'écrire avec moins de chiffres que l'entier *n* lui-même.

On peut seulement affirmer que le nombre de chiffres de $MAP(n)$ est *au plus* égal au nombre de chiffres de *n*.

3.c. Supposons que n s'écrive avec deux chiffres : $n=\overline{du}$ où u est son chiffre des unités et d son chiffre (non nul) des dizaines, c'est-à-dire que supposons que : $n=10d+u$. Son permuté est l'entier qui s'écrit $\overline{ud}$, qui est égal à $10u+d$.

Sa MAP est : $MAP(n)=\dfrac{(10d+u)+(10u+d)}{2}=\dfrac{11d+11u}{2}=\dfrac{11(d+u)}{2}$

- Si $d+u$ est un nombre impair, alors $\dfrac{d+u}{2}$ n'est pas un nombre entier, et $MAP(n)$ n'est pas un entier non plus.
- Si $d+u$ est un nombre pair, alors $\dfrac{d+u}{2}$ est un nombre entier, et $MAP(n)$ est effectivement un entier multiple de 11.

La conjecture de Céline est donc exacte : « si n s'écrit avec deux chiffres, de sorte que $MAP(n)$ soit un entier (*hypothèse indispensable*), alors $MAP(n)$ est un entier multiple de 11 ».

La réciproque de cette proposition s'énonce ainsi : « Soit n un entier supérieur ou égal à 10 de sorte que $MAP(n)$ soit un entier. Si $MAP(n)$ est un multiple de 11, alors n s'écrit avec deux chiffres ».

Cette réciproque est fausse, un contre-exemple est le cas de l'entier 2020 : $MAP(2020)=1111=11\times 101$, c'est bien un multiple de 11, et pourtant 2020 s'écrit avec quatre chiffres et non deux.

4.a. On peut proposer les entiers 1111, 2222, 3333,…, 9999 qui sont autant de solutions en nombres à quatre chiffres de l'équation $MAP(n)=n$.

4.b. Solutions de l'équation $MAP(n)=n$ qui sont des nombres à deux chiffres :

Il est évident que les entiers 11, 22, 33, …, 88 et 99 sont des solutions de l'équation $MAP(n)=n$.

Réciproquement, en se référant au résultat de la question **3.c**, si $n=\overline{du}$ est une solution de l'équation $MAP(n)=n$, alors les chiffres d et u vérifient : $\dfrac{11(d+u)}{2}=10d+u$ autrement dit : $\dfrac{9}{2}(d-u)=0$, ce qui implique que $d=u$. Les deux chiffres de n sont les mêmes. Par conséquent les entiers 11, 22, 33, …, 88 et 99 sont les seules solutions en nombres à deux chiffres de l'équation $MAP(n)=n$.

4.b. *Le moment semble venu de procéder à une étude un peu plus approfondie de la fonction MAP pour des nombres à trois chiffres.*

Supposons que n s'écrive avec trois chiffres : $n = \overline{cdu}$ où u est son chiffre des unités, d son chiffre des dizaines, et c son chiffre des centaines (supposé non nul), c'est-à-dire que : $n = 100c + 10d + u$.

Les permutés de n sont, outre n lui-même, les cinq entiers qui s'écrivent $\overline{cud}$, $\overline{dcu}$, $\overline{ucd}$, $\overline{duc}$, $\overline{udc}$.

Chacun des chiffres c, d, u figure deux fois en chiffre des centaines, deux fois en chiffre des dizaines et deux fois en chiffre des unités, de sorte que la somme des six nombres est :

$$(100c + 10d + u) + (100c + 10u + d) + (100d + 10c + u) + (100d + 10u + c) + (100u + 10c + d) + (100u + 10d + c)$$

Cette somme est égale à $222(c + d + u)$, et $MAP(n) = \dfrac{222(c + d + u)}{6} = 37(c + d + u)$.

(Contrairement au cas des nombres à deux chiffres, la MAP d'un nombre qui s'écrit avec trois chiffres est toujours un entier et cet entier est un multiple de 37).

Venons-en à la résolution de l'équation $MAP(n) = n$ pour des nombres à trois chiffres.

Un entier qui s'écrit avec trois chiffres $n = \overline{cdu}$ est solution si, et seulement si, $37(c + d + u) = 100c + 10d + u$, autrement dit : $63c - 27d - 36u = 0$ ou aussi bien : $7c = 3d + 4u$.

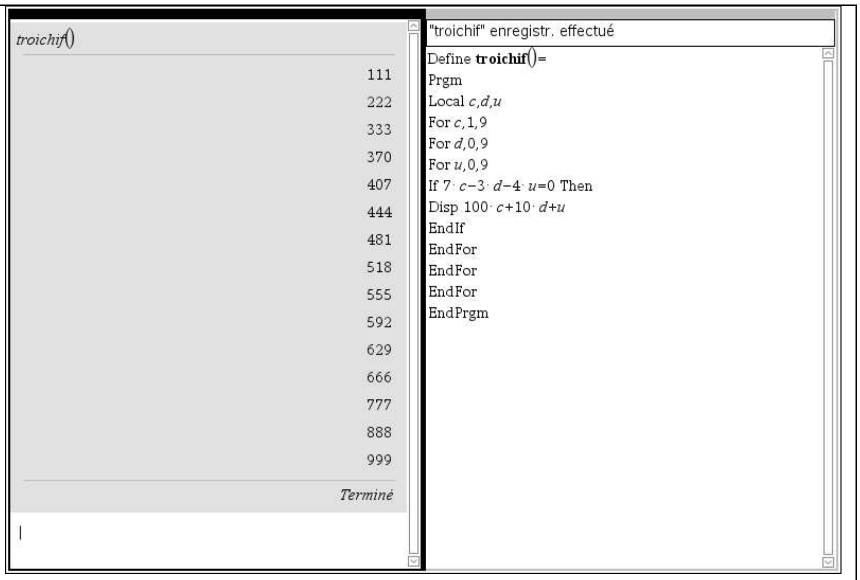
Une possibilité « évidente » est de choisir $d = u$ et alors $d = c = u$, on obtient les nombres 111, 222, …, 999. Y en a-t-il d'autres ? Pour le savoir, on peut faire varier u et voir pour quelle(s) valeur(s) de d telle(s) que $d \neq u$ (s'il en existe) le nombre $3d + 4u$ est un multiple de 7. Un tableau permet d'organiser la recherche :

u	d	$3d + 4u$	c	Entier solution
0	7	21	3	370
1	8	28	4	481
2	9	35	5	592
3	x	x	x	x
4	x	x	x	x
5	x	x	x	x
6	x	x	x	x
7	0	28	4	407
8	1	35	5	518
9	2	42	6	629

Autre solution :

Recherche exhaustive, à l'aide d'un algorithme, écrit ici avec la syntaxe TI-Nspire, des entiers à trois chiffres qui sont égaux à leur *MAP*.

Les deux méthodes sont concordantes.



5. *Procédons à une étude plus générale de la fonction MAP :*

Plus généralement, si l'entier n s'écrit avec k chiffres ($k \geq 2$), alors l'entier n a exactement k ! (la factorielle de k) permutés. Dans l'ensemble de ces permutés, chacun des chiffres de l'entier n figure le même nombre de fois à chaque rang (unités, dizaines, centaines, …), exactement $(k-1)!$ fois à chaque rang.

Soit S la somme de tous les chiffres figurant dans l'écriture de l'entier n.

Puisque chaque chiffre de n figure $(k-1)!$ fois à chaque rang, la somme de tous les permutés est égale à : $(k-1)! \times \left(10^{k-1} + \ldots + 10 + 1\right) \times S$ soit $(k-1)! \times \overset{(k \text{ chiffres } 1)}{\overline{11\ldots11}} \times S$ et la moyenne de tous les permutés est :

$$\boxed{MAP(n) = \frac{(k-1)! \times \overset{(k \text{ chiffres } 1)}{\overline{11\ldots11}} \times S}{k!} = \frac{\overset{(k \text{ chiffres } 1)}{\overline{11\ldots11}}}{k} \times S}.$$

Ce résultat, non demandé par l'énoncé, permettrait de se passer de l'algorithme « permutes », qui est fort encombrant, dans la construction de la fonction *MAP*.

En particulier, si n est un nombre à quatre chiffres, disons $n = \overline{mcdu}$, alors $MAP(n) = \frac{1111}{4}(m + c + d + u)$. Ce nombre est un entier si la somme des chiffres est un multiple de 4, et cet entier ne peut être que 1111, 2222,…9999. L'équation $MAP(n) = 2020$ n'a donc aucune chance d'avoir la moindre solution.

5.a. Un algorithme possible répondant à ce qui nous est demandé : Calculer la somme des permutés puis diviser par le nombre des permutés. Toutes les calculatrices usuelles disposent d'une fonction calculant la somme des termes d'une liste et sont capables d'effectuer dans la foulée une division, ou même disposent d'une fonction calculant la moyenne des termes d'une liste. Si on connaît les permutés, il n'y a donc pas vraiment besoin de rédiger un algorithme pour obtenir une *MAP*.

5.b. Proposons-nous de rechercher *exhaustivement* toutes les solutions de l'équation $MAP(n) = 2020$.

Pour cela, il faut commencer par déterminer un ensemble fini d'entiers qui contient à coup sûr toutes les solutions.

Ces solutions, s'il y en a, sont des nombres qui s'écrivent avec quatre chiffres au moins. Remarquons aussi que $\frac{11111}{5} = 2222{,}2$ et que par conséquent la *MAP* d'un entier à cinq chiffres est strictement supérieure à 2020.

S'il y a des solutions, ce sont uniquement des nombres qui s'écrivent avec quatre chiffres, ni plus ni moins.

Un algorithme possible :

- Stocker 0 dans la variable k
- Pour x allant de 1000 à 9999 :
  - Calculer $MAP(x)$
  - Si $MAP(x) = 2020$ alors :
    - Incrémenter d'une unité la variable k
    - Afficher x
  - Fin Si
- Fin Pour
- Afficher « nombre de solutions : » , k

L'exécution de cet algorithme devrait provoquer l'affichage : « nombre de solutions : 0 »

5.c Soit $\{c_0, c_1, ..., c_{n-1}\}$ la liste de chiffres dont faut obtenir les permutations.

Une suggestion :

- Construire un algorithme nommé **inser** muni de deux arguments, une liste l et un nombre x, qui, à la liste donnée, insère dans la liste l le nombre x aux différentes places possibles. Si la liste l possède n termes, on obtient $(n+1)$ nouvelles listes, chacune de longueur $(n+1)$, qui contient les termes de la liste l et, intercalé aux différentes places possibles, le nouveau terme x.
- Un deuxième algorithme, nommé **permute**, fait récursivement appel à l'algorithme précédent. À partir de la liste $\{c_0\}$, on insère successivement les autres termes de la liste pour former de nouvelles listes. D'abord $\{c_1, c_0\}$; $\{c_0, c_1\}$ et on itère en insérant c_2, puis en suivant.

Gageons cependant que cet algorithme n'a pas un grand avenir pratique compte tenu de la croissance très rapide du nombre de permutations (le mot galvaudé « d'explosion » de ce nombre serait opportun : 120 permutations pour une liste de 5 chiffres, 720 pour une liste de 6 chiffres, 5040 pour 7 chiffres …).

Exercice 2. Addition des cancres, suites de Farey et approximation

Partie 1 : Addition des cancres

1. $\frac{3}{2} \oplus \frac{1}{7} = \frac{4}{9}$ et $\frac{7}{3} \oplus \frac{1}{5} = \frac{8}{8} = 1$. Le deuxième exemple montre au passage que la somme des cancres de deux fractions irréductibles peut être une fraction réductible.

2. Effectuons les différences : $\frac{a}{b} \oplus \frac{c}{d} - \frac{a}{b}$ et $\frac{a}{b} \oplus \frac{c}{d} - \frac{c}{d}$:

- D'une part : $\frac{a}{b} \oplus \frac{c}{d} - \frac{a}{b} = \frac{a+c}{b+d} - \frac{a}{b} = \frac{b(a+c) - a(b+d)}{b(b+d)} = \frac{bc - ad}{b(b+d)}$.
- D'autre part $\frac{a}{b} \oplus \frac{c}{d} - \frac{c}{d} = \frac{a+c}{b+d} - \frac{c}{d} = \frac{d(a+c) - c(b+d)}{d(b+d)} = \frac{ad - bc}{b(b+d)}$

Ainsi, $\frac{a}{b} \oplus \frac{c}{d} - \frac{a}{b}$ est du même signe que $bc - ad$, tandis que $\frac{a}{b} \oplus \frac{c}{d} - \frac{c}{d}$ est du signe opposé à celui de $bc - ad$.

Par hypothèse, $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$, c'est-à-dire que la différence $\frac{c}{d} - \frac{a}{b} = \frac{bc - ad}{bd}$ est strictement positive. Les quatre nombres *a, b, c d* étant en outre des entiers, le nombre $bc - ad$ est un nombre entier strictement positif.

- La différence des deux fractions $\frac{a}{b} \oplus \frac{c}{d} - \frac{a}{b}$ est strictement positive : des deux fractions, la plus grande (strictement) est $\frac{a}{b} \oplus \frac{c}{d}$.
- La différence des deux fractions $\frac{a}{b} \oplus \frac{c}{d} - \frac{c}{d}$ est strictement négative : des deux fractions, la plus grande (strictement) est $\frac{c}{d}$.

En conclusion, si $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$, alors $\frac{a}{b} < \frac{a}{b} \oplus \frac{c}{d} < \frac{c}{d}$.

Partie 2 : Les suites de Farey

1. $F_4 = \left(\frac{0}{1}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{1}{1}\right)$ et $F_5 = \left(\frac{0}{1}, \frac{1}{5}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{2}{5}, \frac{1}{2}, \frac{3}{5}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{1}{1}\right)$

2.a. On va démontrer, ce qui reviendra au même, la proposition *contraposée* de la proposition à démontrer, à savoir que, si $\frac{b-a}{b}$ est réductible, alors $\frac{a}{b}$ est réductible.

Supposons que $\frac{b-a}{b}$ est réductible, c'est-à-dire qu'il existe un nombre entier d strictement plus grand que 1 et deux entiers positifs u et v (v non nul) tels que $\begin{cases} a-b = d\,u \\ b = d\,v \end{cases}$.

Alors : $a = b + d\,u = d\,v + d\,u = d\left(v+u\right)$ et $\frac{a}{b} = \frac{d\left(v+u\right)}{d\,v} = \frac{v+u}{v}$ est une fraction réductible.

Si $\frac{b-a}{b}$ est réductible, alors $\frac{a}{b}$ est réductible. Par contraposition, si $\frac{a}{b}$ est irréductible, alors $\frac{b-a}{b}$ est irréductible.

2.b. D'après **2.a**, si $\frac{a}{b}$ est irréductible de dénominateur b, $\frac{b-a}{b}$ est aussi irréductible de dénominateur b.

De plus, si $0 \le \frac{a}{b} \le 1$, alors $1 \ge \frac{b-a}{b} \ge 0$. Ainsi, si $\frac{a}{b}$ appartient à F_n, $\frac{b-a}{b}$ aussi.

Etudions les positions de ces deux fractions par rapport au nombre $\frac{1}{2}$.

- Si $0 \le \frac{a}{b} \le \frac{1}{2}$, alors $0 \le a \le \frac{b}{2}$ et $b \ge b-a \ge \frac{b}{2}$, donc $1 \ge \frac{b-a}{b} \ge \frac{1}{2}$.

- Si $1 \ge \frac{a}{b} \ge \frac{1}{2}$, alors $b \ge a \ge \frac{b}{2}$ et $0 \le b-a \le \frac{b}{2}$, donc $0 \le \frac{b-a}{b} \le \frac{1}{2}$.

Les deux fractions $\frac{a}{b}$ et $\frac{b-a}{b}$ sont situées de part et d'autre de $\frac{1}{2}$. L'élément $\frac{1}{2}$ occupe une position médiane entre les deux.

On peut jumeler deux à deux les éléments d'une suite de Farey : chaque élément x de la suite plus petit que $\frac{1}{2}$ a un colistier, l'élément $1-x$, plus grand que $\frac{1}{2}$, et inversement.

3.a. Soit $x = \frac{a}{b}$; $y = \frac{c}{d}$; $z = \frac{e}{f}$ trois termes consécutifs, écrits sous forme de fractions irréductibles, d'une même suite de Farey F_n.

Au vu des termes des premières suites de Farey, on peut émettre deux conjectures : d'une part que $bc - ad = de - fc = 1$ et d'autre part que $y = x \oplus z$.

3.b. Vérifications laissées au lecteur.

4.a. Entre $\frac{1}{3}$ et $\frac{1}{2}$, il n'y a aucune fraction de dénominateur 4, et $\frac{2}{5}$ est la fraction avec le plus petit dénominateur possible comprise entre les deux.

4.b. Entre $\frac{1}{3}$ et $\frac{2}{5}$, il n'y a aucune fraction de dénominateur 6, ni aucune de dénominateur 7 (car $\frac{2}{7} < \frac{1}{3} < \frac{2}{5} < \frac{3}{7}$) et $\frac{3}{8}$ est la fraction avec le plus petit dénominateur possible comprise entre les deux.

4.c. On peut conjecturer que la fraction de plus petit dénominateur possible comprise entre deux termes consécutifs x et y d'une suite de Farey est la fraction $x \oplus y$.

Une autre façon de formuler cette conjecture est la suivante : Si on considère F_n, la première fraction qui apparaît dans une suite de Farey d'ordre strictement supérieur à n entre deux termes consécutifs x et y de F_n est la fraction $x \oplus y$.

5. Pour construire F_6 à partir uniquement de F_5, il s'agit de repérer dans F_5 quelles sont les fractions consécutives de F_5 dont la somme des dénominateurs est égale à 6. On intercale alors leur somme des cancres.

Compte tenu que $F_5 = \left(\frac{0}{1}, \frac{1}{5}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{2}{5}, \frac{1}{2}, \frac{3}{5}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{1}{1}\right)$, cette circonstance ne se produit que deux fois : $\frac{0}{1} \oplus \frac{1}{5} = \frac{1}{6}$ et $\frac{4}{5} \oplus \frac{1}{1} = \frac{5}{6}$ ce qui amène à $F_6 = \left(\frac{0}{1}, \frac{1}{6}, \frac{1}{5}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{2}{5}, \frac{1}{2}, \frac{3}{5}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, \frac{1}{1}\right)$

Pour construire F_7 à partir uniquement de F_6, on repère quelles sont les fractions consécutives de F_6 dont la somme des dénominateurs est égale à 7. On relève $\frac{0}{1} \oplus \frac{1}{6} = \frac{1}{7}$; $\frac{1}{4} \oplus \frac{1}{3} = \frac{2}{7}$; $\frac{2}{5} \oplus \frac{1}{2} = \frac{3}{7}$ ainsi que leurs colistiers qu'on intercale dans F_6 pour obtenir F_7.

6. De façon générale, pour construire F_{n+1} à partir de F_n, il s'agit de repérer quelles sont les fractions consécutives de F_n dont la somme des dénominateurs est égale à $n+1$. Ce sont les sommes des cancres de ces fractions qui complètent F_n pour obtenir F_{n+1}. L'algorithme **fareybis** ci-dessous, écrit avec la syntaxe de TI-Nspire, construit les suites de Farey successives jusqu'à un ordre fixé, conformément aux directives de l'énoncé :

Define $l=\{0,1\}$ *Terminé*

fareybis(7)

$$\left\{0,\frac{1}{2},1\right\}$$
$$\left\{0,\frac{1}{3},\frac{1}{2},\frac{2}{3},1\right\}$$
$$\left\{0,\frac{1}{4},\frac{1}{3},\frac{1}{2},\frac{2}{3},\frac{3}{4},1\right\}$$
$$\left\{0,\frac{1}{5},\frac{1}{4},\frac{1}{3},\frac{2}{5},\frac{1}{2},\frac{3}{5},\frac{2}{3},\frac{3}{4},\frac{4}{5},1\right\}$$
$$\left\{0,\frac{1}{6},\frac{1}{5},\frac{1}{4},\frac{1}{3},\frac{2}{5},\frac{1}{2},\frac{3}{5},\frac{2}{3},\frac{3}{4},\frac{4}{5},\frac{5}{6},1\right\}$$
$$\left\{0,\frac{1}{7},\frac{1}{6},\frac{1}{5},\frac{1}{4},\frac{2}{7},\frac{1}{3},\frac{2}{5},\frac{3}{7},\frac{1}{2},\frac{4}{7},\frac{3}{5},\frac{2}{3},\frac{5}{7},\frac{3}{4},\frac{4}{5},\frac{5}{6},\frac{6}{7},1\right\}$$

Terminé

fareybis 5/14

```
Define fareybis(n)=
Prgm
Define m=1
While m<n
Define ll=l
For i,1,dim(l)-1
If getDenom(l[i])+getDenom(l[i+1])=m+1 Then
(getNum(l[i])+getNum(l[i+1]))/(m+1)→x
augment(ll,{x})→ll
EndIf
EndFor
SortA ll
ll→l
m+1→m
Disp l
EndWhile
EndPrgm
```

Pour information, le programme **farey** ci-dessous utilise une autre méthode de construction (non récursive) :

farey(4)

$$\left\{0,\frac{1}{4},\frac{1}{3},\frac{1}{2},\frac{2}{3},\frac{3}{4},1\right\}$$

Terminé

farey(5)

$$\left\{0,\frac{1}{5},\frac{1}{4},\frac{1}{3},\frac{2}{5},\frac{1}{2},\frac{3}{5},\frac{2}{3},\frac{3}{4},\frac{4}{5},1\right\}$$

Terminé

farey(6)

$$\left\{0,\frac{1}{6},\frac{1}{5},\frac{1}{4},\frac{1}{3},\frac{2}{5},\frac{1}{2},\frac{3}{5},\frac{2}{3},\frac{3}{4},\frac{4}{5},\frac{5}{6},1\right\}$$

Terminé

farey(7)

$$\left\{0,\frac{1}{7},\frac{1}{6},\frac{1}{5},\frac{1}{4},\frac{2}{7},\frac{1}{3},\frac{2}{5},\frac{3}{7},\frac{1}{2},\frac{4}{7},\frac{3}{5},\frac{2}{3},\frac{5}{7},\frac{3}{4},\frac{4}{5},\frac{5}{6},\frac{6}{7},1\right\}$$

Terminé

farey 5/11

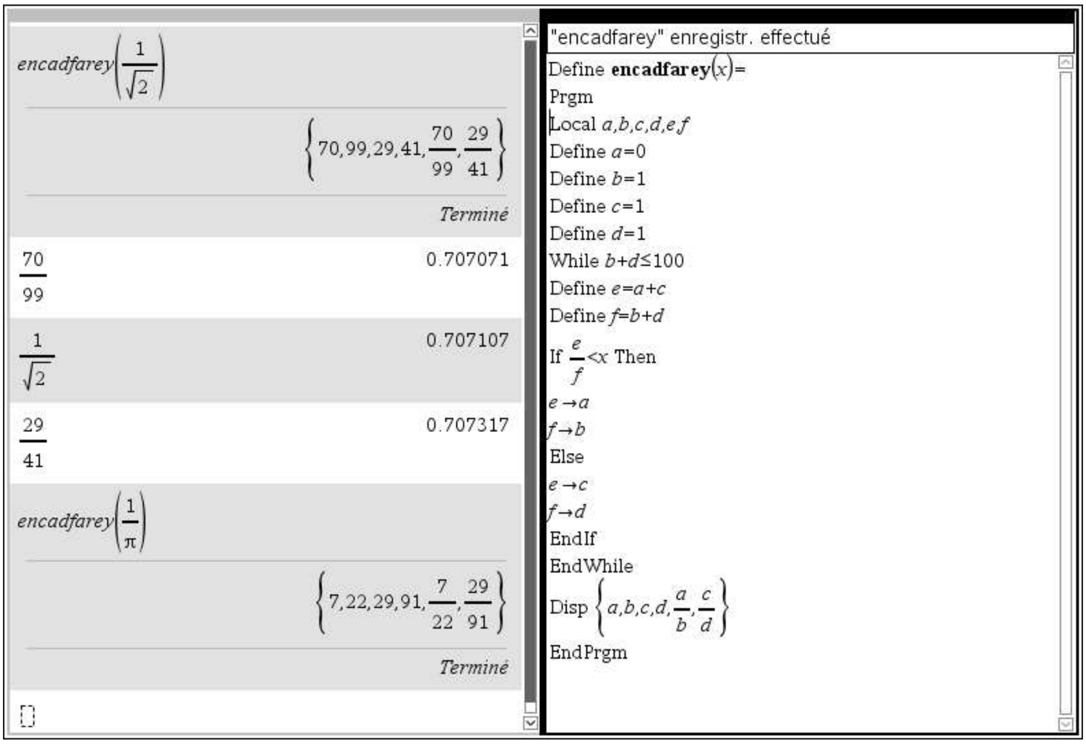
```
Define farey(n)=
Prgm
Local a,b
{0}→f
For b,1,n
For a,0,b
If ∏(i=1..dim(f)) (a/b - f[i]) ≠ 0 Then
augment(f,{a/b})→f
EndIf
EndFor
EndFor
SortA f
Disp f
EndPrgm
```

Partie 3 : Approximation d'un nombre réel compris entre 0 et 1

1. Dès lors que la suite de Farey d'ordre n répertorie et range par ordre croissant la totalité des fractions irréductibles dont le dénominateur est inférieur ou égal à n, tout réel x est rangé entre deux éléments consécutifs de F_n et il n'y aucune fraction de dénominateur inférieur ou égal à n qui en soit plus proche (sinon, elle serait répertoriée).

2. L'algorithme proposé donne le meilleur encadrement du nombre $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ par deux fractions de dénominateur inférieur ou égal à 100. On devrait voir s'afficher les entiers 70, 99, 29 et 41.

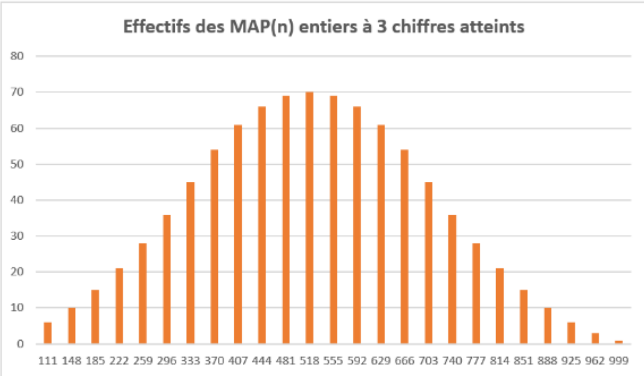
Voici le même algorithme avec la syntaxe TI-Nspire et son application pour $x = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$. Cet algorithme fonctionne pour n'importe quelle valeur de x (par curiosité, on l'a fait fonctionner aussi pour $x = \dfrac{1}{\pi}$)



Olympiades mathématiques- Session 2020
Exercices académiques

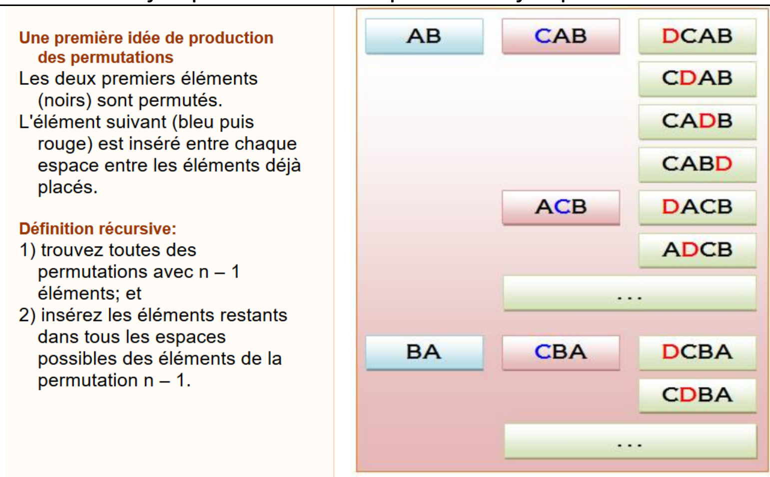
Eléments de corrections – Exercice 1

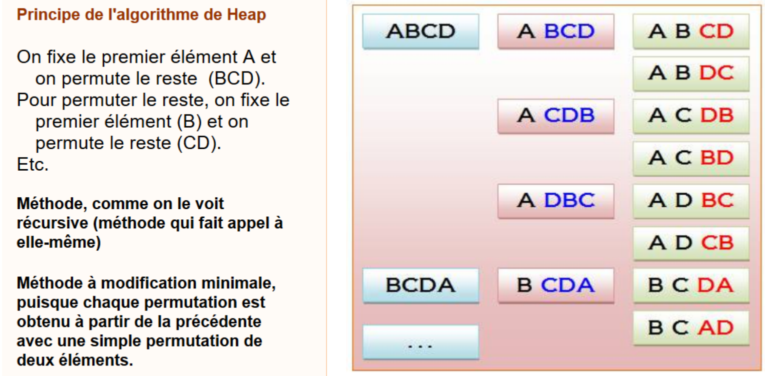
Q.	R.	C.
1.	$MAP(51) = \frac{51+15}{2} = 33$, $MAP(411) = \frac{411+411+141+141+114+114}{6} = 222$, $MAP(2020) = \ldots = 1111$.	Calculer
2.a.	Oui : $MAP(31) = MAP(13)$. Plus généralement, deux permutés d'un même entier ont la même MAP.	Chercher
2.b.	(i) Non : $MAP(14) = \frac{14+41}{2} = 27{,}5$. C'est par exemple le cas des entiers à 2 chiffres dont la somme des chiffres est impaire. (ii) Non : les exemples introductifs, auxquels on ajoute $MAP(22) = 22$, montrent que la MAP d'un entier pair peut être paire ou impaire, tout comme celle d'un entier impair.	Chercher
2.c.	Dans le cas général, cette formule est bien entendue fausse. Toutefois, il existe des entiers qui satisfont la relation. Exemple : $MAP(10 + 20) = MAP(30) = 16{,}5$ et $MAP(10) + MAP(20) = 5{,}5 + 11 = 16{,}5$.	Calculer Chercher Raisonner
3.a.	Plus petite valeur : $MAP(100) = 37$. Plus grande valeur : $MAP(999) = 999$. On attend des raisonnements qualitatifs e.g., pour la plus petite valeur : on doit choisir un entier à trois chiffres, contenant le maximum de 0 possibles (donc 2) et tel que le chiffre restant soit le plus petit possible (donc 1) afin que les permutés soient les plus petits possibles, leur somme et leur moyenne également. On trouve 100.	Chercher Raisonner
3.b	Non : $MAP(100) = 37$. Le nombre de chiffres de $MAP(n)$ est au plus égal au nombre de chiffres de n : si n s'écrit avec p chiffres, ses permutés s'écrivent avec au plus p chiffres donc leur moyenne s'écrit au plus avec p chiffres. En fait, si n s'écrit avec p chiffres, $MAP(n)$ s'écrit avec p ou $p-1$ chiffres. En effet, si on calcule $MAP(10^{p-1})$, 10^{p-1} étant le plus petit entier à p chiffres, on se rend compte qu'elle ne peut être strictement inférieure au nombre composé de $p-2$ fois le chiffre 9 et donc qu'on ne peut pas « perdre » deux chiffres.	Chercher
3.c.	Si n a deux chiffres, alors $n = 10d + u$ donc $MAP(n) = \frac{10d+u+10u+d}{2} = 11 \times \frac{d+u}{2}$. $MAP(n)$ étant entier par hypothèse, c'est un multiple de 11. Céline a donc raison. La réciproque est fausse. Contre-exemple : $MAP(2020) = 1111 = 101 \times 11$.	Raisonner Chercher
4.a.	$MAP(1111) = 1111$, $MAP(2222) = 2222$, …. , $MAP(9999) = 9999$ Pas d'autre solution que les 9 présentées.	Chercher
4.b.	Solutions à deux chiffres : $MAP(10d + u) = 10d + u \Leftrightarrow 11 \times \frac{d+u}{2} = 10d + u \Leftrightarrow d = u$. On trouve neuf solutions : 11, 22, 33, … 99. Solutions à trois chiffres : $MAP(100c + 10d + u) = 100c + 10d + u$ $\Leftrightarrow \dfrac{100 \times (2c + 2d + 2u)}{6} = 100c + 10d + u$ $\Leftrightarrow 37 \times (c + d + u) = 100c + 10d + u$ $\Leftrightarrow 63c = 27d + 36u$	Raisonner Chercher Calculer

	On trouve quinze solutions en fixant successivement la valeur de c : $111, 222, 333, 370, 407, 444, 481, 518, 555, 592, 629, 666, 777, 888, 999.$ Pour la beauté de l'information : 	

5.a.	Programme Python :
	def map(n) :
	    somme = 0
	    for k in permutes(n) :
	        somme = somme + k
	    return somme / len(permutes(n))
		Raisonner
		Modéliser

5.b.	Programme Python :
	for i in range(100, 100000) :
	    if map(i) == 2020 :
	        print(i)
	On cherche jusqu'à 99999 car n peut avoir jusqu'à un chiffre de plus que $MAP(n)$
		Raisonner
		Modéliser

5.c.		Raisonner Modéliser



Captures d'écran du site de M. Gérard Villemin.

Un raisonnement présenté sous la forme d'un arbre est tout-à-fait envisageable.

Capture d'écran Python :

```python
import itertools

def permutes(entier):
    L = list(str(entier))
    liste = []
    for t in list(itertools.permutations(L)):
        liste.append(int("".join(t)))
    return liste

def map(n):
    somme = 0
    for k in permutes(n):
        somme += k
    return somme/len(permutes(n))

for nb in range(10, 100000):
    if map(nb) == 2020:
        print(nb)
```

Eléments de corrections – Exercice 2

Partie I.

1) $\frac{3}{2} \oplus \frac{1}{7} = \frac{4}{9}$ et $\frac{7}{3} \oplus \frac{1}{5} = 1$

2) $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ implique $ad < bc$ et donc $\frac{a+c}{b+d} - \frac{a}{b} = \frac{ba+bc-ab-ad}{b(b+d)} = \frac{bc-ad}{b(b+d)} > 0$

Idem pour $\frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d}$.

Partie II.

1) $F_4=\left(\frac{0}{1};\frac{1}{4};\frac{1}{3};\frac{1}{2};\frac{2}{3};\frac{3}{4};\frac{1}{1}\right)$ et $F_5=\left(\frac{0}{1};\frac{1}{5};\frac{1}{4};\frac{1}{3};\frac{2}{5};\frac{1}{2};\frac{3}{5};\frac{2}{3};\frac{3}{4};\frac{4}{5};\frac{1}{1}\right)$.

2) a) Montrons que $1-\frac{a}{b}=\frac{b-a}{b}$ est irréductible.

Par l'absurde, supposons qu'il existe un diviseur $d\neq 1$ commun à $b-a$ et *b*.

Alors $b-a=dk$ et $b=dk'$ d'où $a=d(k'-k)$ ce qui signifie que *d* divise *a* :

impossible car $\frac{a}{b}$ est irréductible.

b) $\frac{a}{b}\in F_n$ signifie $\frac{a}{b}$ est irréductible, $0\le\frac{a}{b}\le 1$ et $b\le n$.

On a vu que $1-\frac{a}{b}=\frac{b-a}{b}$ est irréductible (en 2.a)

On a clairement $0\le 1-\frac{a}{b}\le 1$

Et bien sûr $0\le b-a\le b\le n$

D'où $1-\frac{a}{b}\in F_n$

Montrons que $\frac{1}{2}$ est bien situé entre $\frac{a}{b}$ et $1-\frac{a}{b}$.

2 cas évidents à faire : si $\frac{a}{b}<\frac{1}{2}$ et si $\frac{a}{b}>\frac{1}{2}$.

3) a) Un terme d'une suite de Farey (différent de 0 et 1) est égal à la somme des cancres des deux qui l'entourent.

b) immédiat (en simplifiant certaines fractions)

4) a) On trouve $\frac{2}{5}$ en faisant une recherche exhaustive.

b) Puis $\frac{3}{8}$ toujours par une recherche exhaustive.

c) La fraction recherchée est la somme des cancres des deux termes consécutifs d'une suite de Farey.

5) $F_6=\left(\frac{0}{1};\frac{1}{6};\frac{1}{5};\frac{1}{4};\frac{1}{3};\frac{2}{5};\frac{1}{2};\frac{3}{5};\frac{2}{3};\frac{3}{4};\frac{4}{5};\frac{5}{6};\frac{1}{1}\right)$

$F_7=\left(\frac{0}{1};\frac{1}{7};\frac{1}{6};\frac{1}{5};\frac{1}{4};\frac{2}{7};\frac{1}{3};\frac{2}{5};\frac{3}{7};\frac{1}{2};\frac{4}{7};\frac{3}{5};\frac{2}{3};\frac{5}{7};\frac{3}{4};\frac{4}{5};\frac{5}{6};\frac{6}{7};\frac{1}{1}\right)$

6) Lorsque la somme des dénominateurs de deux termes consécutifs de F_n est n+1, on intercale la somme des cancres de ces deux termes. En procédant ainsi pour toute la suite F_n, on obtient au finalement F_{n+1}.

Partie III.

1) F_n contient toutes les fractions de dénominateur au plus *n* rangées dans l'ordre croissant. Les deux termes de F_n qui encadrent *x* fournissent donc le meilleur encadrement possible dans ces conditions.

2) L'algorithme consiste à :

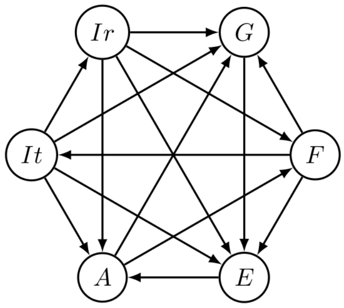
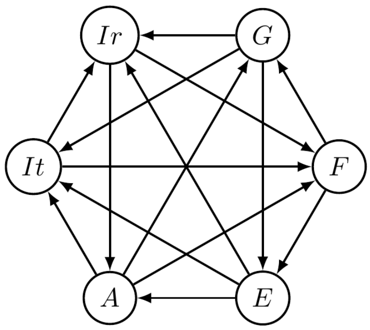
- effectuer l'addition des cancres des deux termes encadrant *x*
- comparer le résultat obtenu à *x*
- remplacer l'une des bornes de l'encadrement de *x* par ce résultat

On répète ce processus tant que le dénominateur ne dépasse pas 100.

On obtient donc le meilleur encadrement de $\frac{1}{\sqrt{2}}$ par deux fractions de dénominateurs inférieurs ou égaux à 100 soit : $\frac{70}{99} < \frac{1}{\sqrt{2}} < \frac{29}{41}$.

Eléments de corrections – Exercice 3

Question	**Eléments de correction**	**Compétences**
1	Il y a 15 matches par tournoi	Chercher Calculer Raisonner
2	L'Irlande a réalisé un grand chelem, l'Italie a remporté la cuillère de bois. Aucune équipe n'a remporté de mini chelem.	Chercher Communiquer Représenter
3	Non un grand chelem et un petit chelem ne peuvent pas arriver simultanément.	Chercher Raisonner Communiquer

	Supposons qu'une équipe A remporte un grand chelem, et considérons une autre équipe B. L'équipe A a battu tous ses opposants, y compris B. Or aucune équipe battue par B n'a pu battre A, donc B n'a pas remporté de mini chelem.	
4	Oui deux mini chelems sont possibles dans le même tournoi. Par exemple, dans la situation ci-dessous, la France et l'Italie ont toutes les deux réalisé un mini chelem :  Évidemment d'autres configurations sont possibles.	Chercher Représenter Raisonner
5	Six mini chelems sont possibles :  	Chercher Représenter Raisonner
6	Considérons l'équipe (notée A) qui a remporté le plus grand nombre de victoires. Si A n'a pas réalisé de mini chelem, alors une équipe (notée B) a battu A et aucune équipe ayant perdu contre A n'a gagné contre B. Autrement dit, B a avoir battu A et toutes les équipes que A a battues. Alors B a eu strictement plus de victoires que A. Contradiction.	Chercher Raisonner Communiquer