www.freemaths.fr

OLYMPIADES MATHÉMATIQUES
LYCÉE, PREMIÈRE

ACADÉMIE DE CRÉTEIL
2020

SUJET + CORRIGÉ

20e OLYMPIADES DE MATHÉMATIQUES

Mercredi 11 mars 2020[1], 2 énoncés (national et académique) en 4 heures, élèves de première générale et technologique[2] et de début de terminale[3], inscription auprès de votre professeur de mathématiques avant les vacances d'hiver selon académie.

Liberté • Égalité • Fraternité
RÉPUBLIQUE FRANÇAISE
MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE

Sujet et Corrigé vous sont présentés par freemaths.fr . . .

MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE ET DE LA JEUNESSE

Liberté • Égalité • Fraternité
RÉPUBLIQUE FRANÇAISE

Olympiades nationales de mathématiques 2020

Académie de Créteil

Exercices académiques

Exercice 1 : le tri

On rappelle la formule suivante donnant la somme des *n* premiers entiers :

$$1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

n jetons distincts numérotés de 1 à n sont alignés aléatoirement de gauche à droite. On souhaite les trier dans l'ordre croissant.
Par exemple, on souhaite trier cinq jetons ($n = 5$) : $3 - 1 - 4 - 5 - 2$ => $1 - 2 - 3 - 4 - 5$

On ne peut déplacer les jetons qu'en échangeant les places de deux jetons adjacents (côte à côte).

Exemples dans le cas où $n = 3$

On souhaite trier 3-1-2. $3 - 1 - 2$ => $1 - 3 - 2$ (on échange 3 et 1) => $1 - 2 - 3$ (on échange 2 et 3) 2 échanges ont été effectués.	On souhaite trier 3-2-1. $3 - 2 - 1$ => $3 - 1 - 2$ => $1 - 3 - 2$ => $1 - 2 - 3$ 3 échanges ont été effectués. On remarque qu'il était impossible d'échanger directement le 1 et le 3 pour passer de 3-2-1 à 1-2-3 car les jetons 1 et 3 n'étaient pas adjacents.

Pour chaque jeton on définit le nombre appelé « inversion » du jeton, qui correspond au nombre de jetons qui sont placés à sa droite et qui lui sont inférieurs.
On définit le « mélange de l'ensemble des jetons » comme étant la somme des inversions de chacun des jetons.

Pour les questions 1 et 2 on s'intéresse à 4 jetons dans la situation initiale : $\mathbf{4 - 3 - 1 - 2}$

1. Proposer deux manières différentes de trier en 5 échanges les jetons.
2. On cherche à montrer que dans cette situation initiale, il n'existe pas de tri en moins de 5 échanges.
   a) Justifier que le « mélange de l'ensemble des jetons » pour cette situation initiale 4-3-1-2 est de 5.
   b) Expliquer pourquoi dans ce cas, il n'existe pas de tri en moins de 5 échanges.
   c) Expliquer pourquoi il ne faut pas commencer le tri en cherchant à mettre le jeton 2 à sa place.

Pour les questions suivantes on s'intéresse au tri de n jetons où n est un entier naturel supérieur à 2.

3. a) Montrer que si le « mélange de l'ensemble des jetons » est égal à k, alors il faudra au moins k échanges pour trier les jetons.

   b) Montrer que le nombre minimum d'échanges pour trier les jetons est égal au « mélange de l'ensemble des jetons ».

Dans la suite du sujet, on se place dans le cas où le nombre d'échanges effectués pour trier les jetons est minimal.

   c) Ecrire un algorithme qui permet de trier l'ensemble des n jetons en M échanges, où M est le « mélange de l'ensemble des jetons ».

4. a) Soit M le « mélange d'un ensemble de n jetons ». Montrer que $0 \leq M \leq \frac{n(n-1)}{2}$.

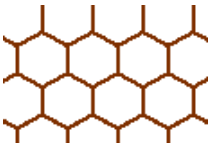
   b) Dans quelle disposition de départ des jetons le nombre d'échanges minimal pour les trier sera le plus grand ?

5. a) Dans le cas $n = 4$, donner toutes les dispositions de départ des jetons et en déduire le nombre moyen d'échanges qui seront nécessaires au tri.

   b) Déterminer le nombre moyen d'échanges nécessaires au tri des n jetons.

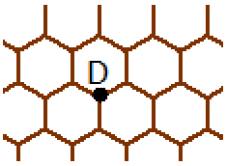
Exercice 2 : promenade dans la ruche

On considère un quadrillage hexagonal, appelé nid d'abeille dans le langage courant, et réseau hexagonal en langage mathématique.



Ce réseau est constitué de « points » appelés sommets et de « liens » entre ces points appelés arêtes.

On choisit un sommet de ce quadrillage, noté D. On place un pion sur ce sommet.



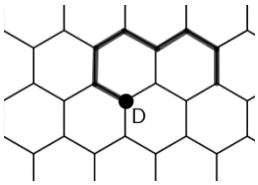
Après n déplacements le long de n arêtes du réseau au hasard, on dit que la trajectoire du pion est un chemin de longueur n.

Si le pion effectue n déplacements, en ne repassant jamais deux fois sur le même sommet, on dit que la trajectoire du pion est un chemin auto-évitant de longueur n.

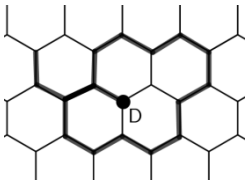
1) Sur les quadrillages ci-dessous sont représentés des chemins partant du sommet D. Pour parcourir un chemin en entier, il faut passer sur l'ensemble des arêtes noires surlignées.

   Pour chacun des chemins ci-dessous, préciser la longueur (minimale) et s'il peut être un chemin auto-évitant.

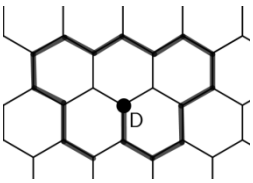
a)



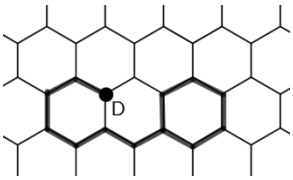
b)



c)

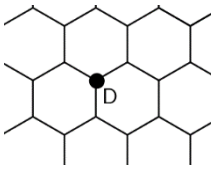


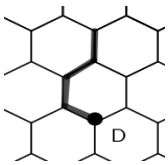
d)

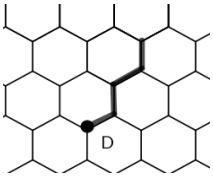


2) On se place sur le réseau hexagonal et on note a_n le nombre de chemins de longueur n partant du sommet D.
   a) Déterminer a_1, a_2 et a_3.
   b) Déterminer une expression de a_n, pour tout entier naturel n non nul . Justifier.

3) Dans cette question, on place D comme ci-contre :
On note b_n le nombre de chemins partant de D, composés uniquement de déplacements « vers le haut » (voir les exemples ci-dessous).



Exemple 1 : 

Exemple 2 : 

a) Calculer $b_1,\ b_2,\ b_3$.
b) Déterminer une expression de b_n pour tout entier naturel n non nul (on distinguera les cas n pair et n impair).
c) Ces chemins sont-ils tous auto-évitants ?

4) On note c_n le nombre de chemins auto-évitants de longueur n partant du sommet D.
a) Déterminer c_1, c_2, c_3, c_4, c_5.
b) Quelle conjecture peut-on en déduire sur le terme général c_n ?
c) Déterminer c_6. La conjecture précédente est-elle valide ?

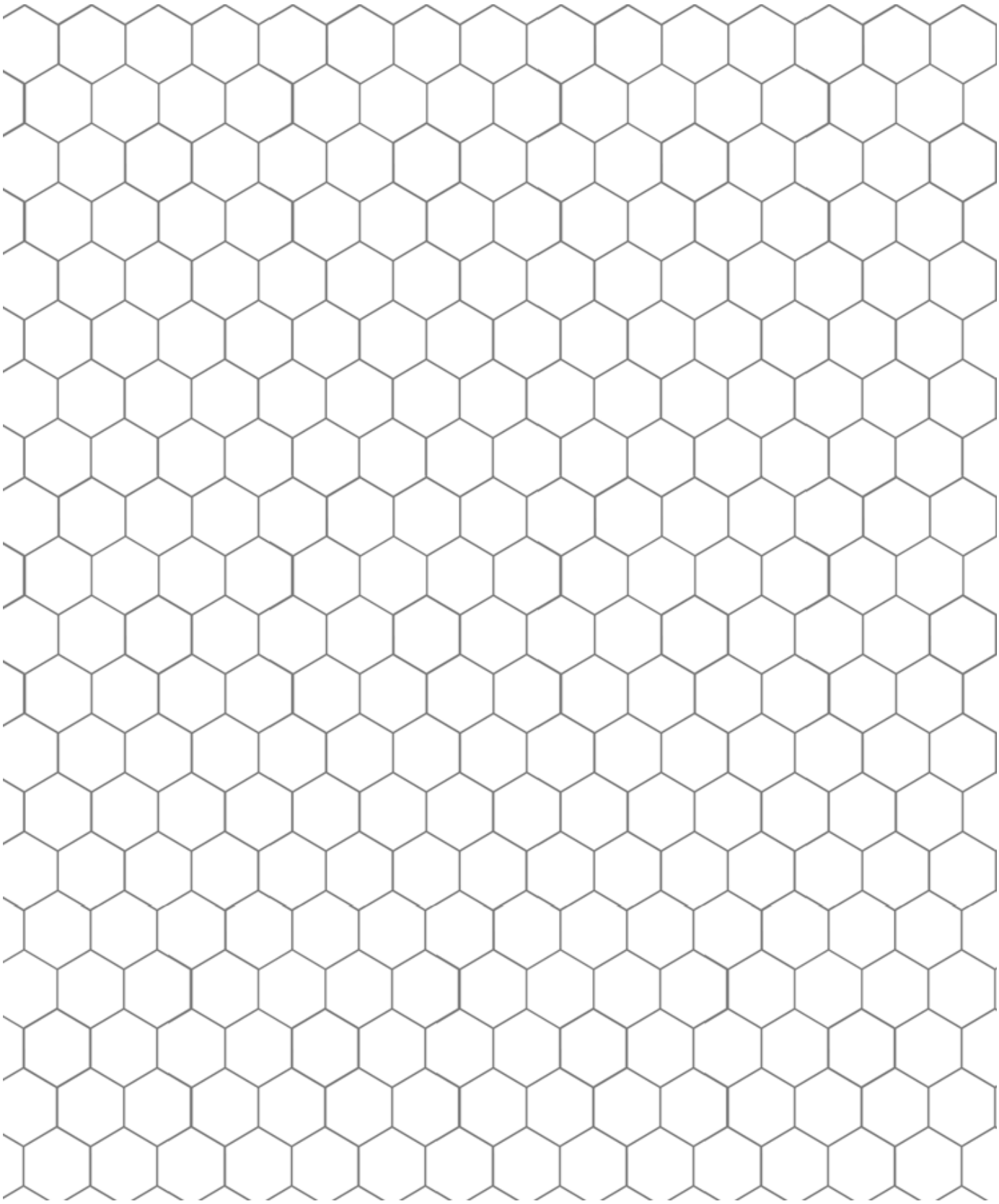
5) a) Montrer que pour tout entier naturel n non nul, $2^{\frac{n}{2}} \leq c_n \leq 3^n$.
b) Pour un entier n non nul donné, on suppose les a_n chemins distincts numérotés de 1 à a_n .
On considère l'algorithme suivant :

```
Choisir un sommet de départ pour le pion
C ← 0
Pour i allant de 1 à a_n :
        Marquer tous les sommets du réseau comme non visités
        Remettre le pion sur le sommet choisi comme point de départ et marquer ce sommet
        comme visité
        Pour j allant de 1 à n :
                Effectuer le j^ième déplacement du chemin numéro i
                Marquer le sommet où se trouve le pion comme visité
        Fin Pour
        Si aucun des sommets n'a été visité plusieurs fois :
                C ← C + 1
        Fin Si
Fin Pour
```

Qu'affiche cet algorithme pour $n = 5$?

Remarque : l'algorithme précédent fonctionne pour de petites valeurs de n, mais son fonctionnement serait trop coûteux et nécessiterait trop de temps pour de grandes valeurs de n.

Afin de faire des recherches, on pourra se servir de ce pavage :



www.freemaths.fr

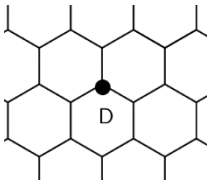
OLYMPIADES MATHÉMATIQUES
LYCÉE, PREMIÈRE

CORRECTION !

Épreuve ▪ 2020

<table>
<tr><th colspan="3">Le Tri</th></tr>
<tr><th>Questions</th><th>Eléments de correction</th><th>Barème
50 points</th></tr>
<tr><td>1</td><td>1ère proposition : 4-3-1-2 ; 3-4-1-2 ; 3-1-4-2 ; 3-1-2-4 ; 1-3-2-4 ; 1-2-3-4
2ème proposition : 4-3-1-2 ; 3-4-1-2 ; 3-1-4-2 ; 1-3-4-2 ; 1-3-2-4 ; 1-2-3-4</td><td>3</td></tr>
<tr><td>2.a)</td><td>On ajoute les inversions des différents jetons :
<table>
<tr><td>jeton</td><td>4</td><td>3</td><td>1</td><td>2</td></tr>
<tr><td>inversions</td><td>3</td><td>2</td><td>0</td><td>0</td></tr>
</table>
Le mélange de l'ensemble des jetons est donc égal à 5.</td><td>4</td></tr>
<tr><td>2. b)</td><td>Il faut effectuer un échange pour que le mélange de l'ensemble diminue de 1 (le mélange peut ne pas diminuer si l'échange est « inutile »). Il faudra donc au moins 5 échanges pour effectuer le tri puisque le mélange de l'ensemble est égal à 5.</td><td>4</td></tr>
<tr><td>2. c)</td><td>Si on met 2 à sa place, il faudra échanger 1 et 2, mais alors on augmente l'inversion de 2 et il faudra à nouveau échanger 2 et 1 par la suite. Autrement dit, on effectue ainsi au moins 2 échanges inutiles.</td><td>3</td></tr>
<tr><td>3.a)</td><td>Lorsqu’on échange deux jetons adjacents non rangés dans l'ordre croissant, l'inversion du jeton de gauche diminue de 1, mais pas celui de droite (qui a toujours autant de jetons à sa droite qui lui sont inférieurs). Le mélange diminue de 1 au maximum à chaque échange. Si le mélange est égal à k, il faudra donc au moins k échanges pour trier les jetons.</td><td>6</td></tr>
<tr><td>3.b)</td><td>Si les jetons ne sont pas triés, le mélange est non nul. Il existe donc deux jetons adjacents qui ne sont pas dans l'ordre croissant. En les échangeant, le mélange diminue de 1.
On exhibe ainsi une manière de trier en un nombre d'échanges égal au mélange, qui est donc le nombre minimal d'après la question précédente.</td><td>4</td></tr>
<tr><td>3.c)</td><td>Notons L la liste des jetons et $L(0), \dots, L(n-1)$ les n jetons.
$Echange = false$
$k = 0$
$while\ echange == false$:
$\quad for\ i\ in\ range(0, n-k-1)$:
$\quad\quad if\ L(i) > L(i+1)$:
$\quad\quad\quad L(i), L(i+1) = L(i+1), L(i)$ (on effectue un échange)
$\quad\quad\quad echange\ =\ true$
$\quad\quad k = k+1$
(un algorithme parmi de nombreux possibles)</td><td>6</td></tr>
<tr><td>4.a)</td><td>Pour le 1er jeton, il y a au maximum $n-1$ jetons inférieurs à sa droite, pour le suivant au maximum $n-2$ etc...
donc $M \leq 1 + 2 + \ldots + (n-1) = \frac{n(n-1)}{2}$.
Par ailleurs, M est un nombre positif.</td><td>4</td></tr>
<tr><td>4.b)</td><td>$n-(n-1)-\ldots.-3-2-1$ est une disposition de départ où le mélange est maximal et donc le nombre d'échanges nécessaires est le plus grand.</td><td>2</td></tr>
<tr><td>5.a)</td><td>Il faut ici donner les 24 situations de départ possibles puis déterminer le mélange de chaque ensemble de jetons pour enfin déterminer le nombre moyen d'échanges. Dans le cas $n = 4$, il faudra en moyenne 3 échanges</td><td>6</td></tr>
</table>

	pour trier les jetons.	
5.b)	Il faut compter le mélange des différentes situations possibles puis calculer la moyenne, qui est égale à $\frac{n(n-1)}{4}$.	**8**

Promenade dans la ruche		
Questions	**Eléments de correction**	**Barème 50 pts**
1.	a) chemin de longueur 7 – auto-évitant b) chemin de longueur 18 – non c) chemin de longueur 16 – auto-évitant d) chemin de longueur 13 – non	**6** (1+0,5 pour chaque figure)
2. a)	$a_1 = 3,\ a_2 = 9,\ a_3 = 27$	**0,5+1+1,5**
2. b)	$a_n = 3^n$ pour tout $n \geq 1$ A chaque sommet, il y a 3 choix possibles pour le déplacement.	**3**
3. a)	$b_1 = 2 \quad b_2 = 2 \quad b_3 = 2^2 = 4$	**0,5 + 1 + 1,5**
3. b)	$b_n = \begin{cases} 2^{\frac{n+1}{2}}\ si\ n\ impair \\ 2^{\frac{n}{2}}\ si\ n\ pair \end{cases}$	**3+3**
3. c)	Tous les chemins sont auto-évitants puisque les déplacements ne s'effectuent que "vers le haut" donc sans possibilité de retour en arrière.	**1**
4. a)	$c_1 = 3 \qquad c_2 = 3 \times 2 = 6 \qquad c_3 = 3 \times 2^2 = 12$ $c_4 = 3 \times 2^3 = 24 \qquad c_5 = 3 \times 2^4 = 48$	**3**
4. b)	On peut supposer que $c_n = 3 \times 2^{n-1}$ pour tout $n \geq 1$	**3**
4. c)	Chaque chemin auto-évitant de longueur 5 peut être prolongé de deux façons différentes en un chemin de longueur 6. Parmi les chemins de longueur 6 ainsi formés, six d'entre eux ne sont plus auto-évitants: ce sont les chemins qui forment les trois hexagones avec pour sommet D parcourus dans le sens des aiguilles d'une montre et dans le sens contraire. On a donc $c_6 = 3 \times 2^6 - 6 = 90$. La conjecture n'est donc pas validée.	**5**
5.	Pour tout $n \geq 1$, l'ensemble des chemins auto-évitants de longueur n est inclus dans l'ensemble des chemins de longueur n donc $c_n \leq 3^n$ Par ailleurs, si D est placé comme dans la question 3, les chemins auto-évitants de longueur n composés uniquement de déplacements vers le haut sont inclus dans l'ensemble des chemins auto-évitants. On a: $b_n = \begin{cases} 2^{\frac{n+1}{2}}\ si\ n\ impair \\ 2^{\frac{n}{2}}\ si\ n\ pair \end{cases}$ donc pour tout n, $b_n \geq 2^{\frac{n}{2}}$ Donc $2^{\frac{n}{2}} \leq b_n \leq c_n$ De même si D est placé sur « une pointe », on procède de la même manière en comptant le nombre de chemins auto-évitants de longueur n composés uniquement de déplacement vers le bas.  Donc pour tout $n \geq 1$, on a bien $2^{\frac{n}{2}} \leq c_n \leq 3^n$	**4** pour l'inégalité de droite **4** pour l'inégalité de gauche dans le cas D en creux **5** pour l'inégalité pour le cas D en pointe
6.	Cet algorithme permet de dénombrer le nombre de chemins auto-évitants de longueur n. Pour $n = 5$, l'algorithme affiche c_5 soit 48.	**4**