Olympiades académiques de mathématiques

Académie de Créteil

Mercredi 18 mars de 8 heures à 12 heures

Les objets calculatrices sont autorisés, à l'exclusion de tout autre appareil électronique.

Il est conseillé aux candidats qui ne pourraient formuler une réponse complète à une question d'exposer le bilan des initiatives qu'ils ont pu prendre.

L'épreuve comporte quatre exercices, tous à traiter dans le temps imparti. Il est conseillé de ne pas en privilégier trop fortement un sur les autres.

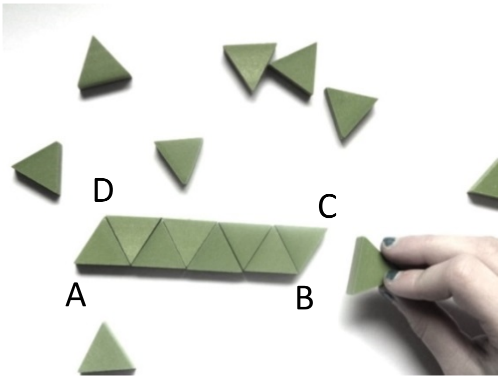
Durée de la composition : 4 heures

Sauf cas de force majeure, aucun candidat n'est autorisé à quitter définitivement la salle de composition moins de deux heures après le début. Un candidat qui quitterait la salle au bout de trois heures ou moins doit rendre sa copie et son exemplaire du sujet.

Exercice numéro 1

(proposé par le jury national)

Défi entre sœurs



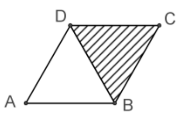
Patiemment, Clémence aligne les triangles équilatéraux identiques de son jeu de mosaïque en les juxtaposant comme le montre la photo ci-contre.
Sa sœur, Léa, qui est en première et toujours en quête de quelques calculs à effectuer, s'amuse à trouver la **valeur exacte** des longueurs des diagonales des quadrilatères obtenus.
Chaque triangle équilatéral a pour côté 1. On note :

- ABCD un quadrilatère construit par Clémence ;
- L = AC la longueur de la diagonale [AC] ;
- l = BD la longueur de la diagonale [BD].

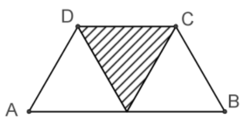
PARTIE 1

1. Calculer la longueur d'une hauteur d'un triangle équilatéral de côté 1.

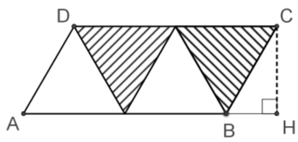
2. Calculer les longueurs l et L pour les cas suivants :



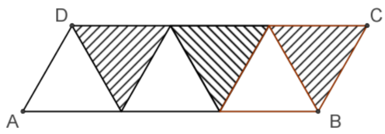
Deux triangles



Trois triangles



Quatre triangles



Six triangles

PARTIE 2

Clémence continue à ajouter des triangles et défie sa sœur de poursuivre ses calculs de diagonales. Léa note n le nombre de triangles équilatéraux alignés (n est un entier supérieur ou égal à 2) et se met à chercher :

1. Lorsque le nombre n de triangles est **pair,** montrer que la longueur de la diagonale la plus grande est égale à $L = \sqrt{p^2 + p + 1}$, où $p = \frac{n}{2}$.

2. Si Clémence ajoute un triangle supplémentaire au cas précédent, que deviennent les longueurs l et L ?

3. Clémence a aligné 56 triangles. Déterminer les longueurs l et L calculées par Léa.

PARTIE 3

Observant tous les calculs de longueur de diagonales effectués, Léa conjecture deux propriétés :

1^{re} propriété : « Pour tout nombre n de triangles juxtaposés, L est la racine carrée d'un nombre impair »

2^e propriété : « Pour tout nombre n de triangles juxtaposés, L est la racine carrée d'un nombre premier »

On rappelle qu'un nombre premier est un entier naturel divisible seulement par 1 et lui-même ; par exemple 2, 11, 29 sont des nombres premiers et 1, 8, 33 ne le sont pas.

1. Valider ou invalider chacune de ces propriétés.

2. Peut-on affirmer que la racine carrée de tout nombre premier est la longueur possible d'une diagonale d'un quadrilatère ABCD du type ci-dessus ?

3. Pourquoi n'est-il pas possible d'obtenir une diagonale de longueur $\sqrt{2\,015}$?

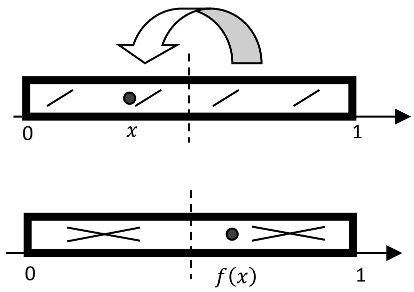
4. Clémence a construit un quadrilatère dont une diagonale mesure $\sqrt{1\,015\,057}$. Combien de triangles a-t-elle utilisés ? Donner toutes les réponses possibles.

5. Clémence dit à sa sœur : « sur les grands quadrilatères, à chaque fois qu'on ajoute deux triangles, la diagonale augmente d'environ 1 ». Le constatez-vous aussi (détaillez votre démarche)? Si oui, démontrez-le.

Exercice numéro 2

(proposé par le jury national)

On est les rois !



Le boulanger place une fève, replie la pâte (qu'il a, ici, préalablement striée) sur elle-même, et l'étale dans le sens de la longueur : celle-ci s'étire jusqu'à retrouver ses dimensions initiales. Cette transformation, que l'on peut répéter, a donné lieu à quelques études mathématiques, dont cet exercice s'inspire.

Partie A – La transformation du boulanger

On considère la fonction f définie sur $[0\,,1]$ par :

$$f(x) = 2x \text{ si } x \leq \frac{1}{2} \text{ et } f(x) = 2(1-x) \text{ sinon.}$$

1. Montrer que l'image par f d'un élément de [0, 1] appartient à [0, 1].
2. Justifier pourquoi cette fonction f modélise le déplacement de la fève.

Partie B – Parcours d'une fève : cycles et cible
Les images successives par f d'un élément x de $[0\,,1]$ sont notées $x_1 = f(x)$, $x_2 = f(x_1)$, $x_3 = f(x_2)$ etc. Elles correspondent aux positions successives de la fève initialement placée à l'abscisse x.

1. Quelles sont les 9 positions suivant l'abscisse $\frac{1}{3}$? l'abscisse 0, 33 ? Commentez.
2. Est-il possible qu'une fève, placée à l'abscisse x, revienne à sa position de départ en un seul coup ? En deux coups (mais pas en un) ? En trois coups (mais ni en un ni en deux) ? Préciser à chaque fois toutes les valeurs de x pouvant répondre à la question.
3. Quand une fève placée à l'abscisse x vient, après un nombre fini d'étapes du processus, à occuper l'abscisse nulle, on dit que « x atteint sa cible ». Donner un exemple où x atteint sa cible, et un autre où x ne l'atteint pas.
4. Soit un nombre x dont on suppose qu'il atteint la cible. Modifier l'algorithme suivant afin qu'il affiche, dans ce cas, le nombre d'étapes nécessaires pour rejoindre le réel 0. Que se produit-il si l'hypothèse de travail de cette question n'est pas vérifiée ?
5. Le nombre $\frac{2015}{2^{2015}}$ atteindra-t-il la cible ?
6. Déterminer tous les nombres de $[0\,,1]$ atteignant leur cible.

Partie C – Étude d'un algorithme.

1. Soit un nombre x dont on suppose qu'il atteint la cible. Modifier l'algorithme proposé en **Annexe** afin qu'il affiche, dans ce cas, le nombre d'étapes nécessaires pour rejoindre le réel 0 (on recopiera le nouveau code sur sa copie).
2. D'après la question 6, le nombre $\frac{1}{9}$ n'atteint pas sa cible. Comment devrait se comporter l'algorithme après avoir saisi $x = \frac{1}{9}$ en entrée ? Quand on le programme sur une machine de type PC ou calculette, toujours avec $x = \frac{1}{9}$ en initialisation, puis qu'on l'exécute, il affiche cependant en sortie obtenir $x = 0$ au bout d'une cinquantaine d'itérations. Avancez une explication.

Annexe.

Variables

x est un élément de $[0\,,1]$

Début

Saisir le nombre x compris entre 0 et 1

Tant que $x \neq 0$ **faire**

Si $x \leq \frac{1}{2}$ **alors**

x **prend la valeur** $2\,x$

Sinon

x **prend la valeur** $2(1-x)$

Fin tant que

Fin

Exercice numéro 3

(proposé par le jury académique)

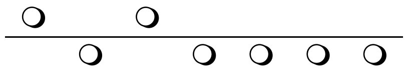
Le baguenaudier

Le baguenaudier est un casse-tête composé de deux parties principales : la *navette* qui est une tige métallique recourbée sur elle-même et le *système des anneaux*.
L'objectif est de séparer les anneaux enchevêtrés de la navette.

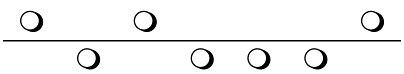
Il résulte de la construction du baguenaudier que le déplacement d'un seul anneau est soumis aux principes suivants :

- On peut toujours baisser le premier anneau situé à droite s'il est levé, ou le lever s'il est baissé.
- Pour qu'un anneau de rang quelconque puisse être déplacé, c'est-à-dire levé ou baissé, il faut et il suffit qu'il se trouve placé immédiatement à la gauche d'un anneau monté, et que celui-ci soit le seul anneau monté à la droite de l'anneau considéré.

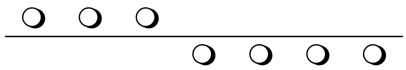
On représente la navette par une droite horizontale, les anneaux levés par des ronds placés au-dessus, dans leur situation respective, et les anneaux baissés, par des ronds placé au-dessous.
Par exemple si la position d'un baguenaudier à 7 anneaux est la suivante :



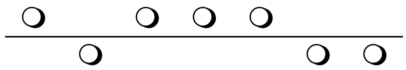
Les deux mouvements possibles sont représentés par les schémas suivants :



ou



1. Voici la position d'un baguenaudier à 7 anneaux :

   Représenter par un schéma analogue les mouvements possibles à l'étape suivante.
2. Démonter le baguenaudier signifie qu'on doit passer de la position initiale où tous les anneaux sont levés à la position finale où tous les anneaux sont baissés.
   Dresser la liste minimale d'étapes pour démonter un baguenaudier à 3 anneaux.
3. Montrer qu'on peut démonter en 10 étapes un baguenaudier à 4 anneaux.
4. On code désormais la position des anneaux, en partant de la gauche par 0 ou 1 avec les conventions suivantes :
   - Le premier anneau levé à gauche est codé 1 et les anneaux levés situés à sa droite sont représentés alternativement par 0 et 1, sans tenir compte, dans cette alternance, des anneaux baissés.
   - Les anneaux baissés sont indiqués par le code du premier anneau levé à leur gauche, 0 s'il n'y en a aucun.

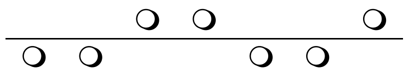
   a) Déterminer le code C associé au schéma de la question 1 puis celui des deux situations obtenues à l'étape suivante par déplacement d'un anneau.

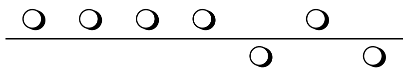
b) On admet que, pour tout entier naturel n, il existe une unique suite finie $a_0, a_1, \dots, a_p$ (où $p \in \mathbb{N}$) d'entiers appartenant à $\{0; 1\}$, telle que

$$n = a_0 \times 2^0 + a_1 \times 2^1 + \cdots + a_p \times 2^p$$

Le p-uplet $(a_p, \dots, a_1, a_0)$ noté $a_p \dots a_1 a_0$ est appelé écriture binaire de n.
Etablir que ces deux situations correspondent à l'augmentation ou la diminution d'une unité du code binaire C.

5. On admet que, lorsque l'on passe d'une position à l'autre du baguenaudier, on déduit l'un de l'autre les deux nombres binaires correspondants par addition ou soustraction d'une unité.
   a) Déterminer le nombre minimal d'étapes nécessaire pour passer de la configuration A à la configuration B.

A 

B 

   b) Déterminer le nombre minimal d'étapes pour démonter un baguenaudier à 7 anneaux.
6. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer le nombre minimal d'étapes pour démonter un baguenaudier à n anneaux, suivant la parité de n.

Exercice numéro 4

(proposé par le jury académique)

Faire le bon choix

Le squash est un sport de raquette. Parmi les règles existantes, une façon de comptabiliser les points pour le score est la suivante : les points sont attribués uniquement au joueur au service. S'il gagne l'échange il remporte le point, sinon il cède son service et le score reste inchangé. Chaque set est remporté par le premier des deux joueurs obtenant 9 points ; toutefois si le score est de 8 à 8, le joueur n'étant pas au service peut demander que le set se termine en 9 ou 10 points.

Si q est un réel tel que $0 < q < 1$, alors on admettra le résultat suivant sur la somme infinie des puissances de q :

$$\boxed{\frac{1}{1-q} = 1 + q + q^2 + q^3 + q^4 + \cdots}$$

PREMIERE PARTIE : ADAM et BOB SONT DEUX JOUEURS DE MÊME NIVEAU

On suppose que le score entre Adam et Bob est de 8 à 8. Les joueurs étant de même niveau, on peut supposer que chaque joueur a une probabilité identique, égale 0,5, de remporter un échange. On suppose qu'Adam possède le service à 8 partout.

On définit les événements suivants :

A_n : « Adam marque le point en ayant servi n fois » ;

B_n: « Bob marque le point en ayant servi n fois » ;

C_n : « il y a changement de serveur une n-ième fois ».

1. **a.** Recopier et compléter l'arbre ci-dessous (figure 1) illustrant la suite des échanges possibles :

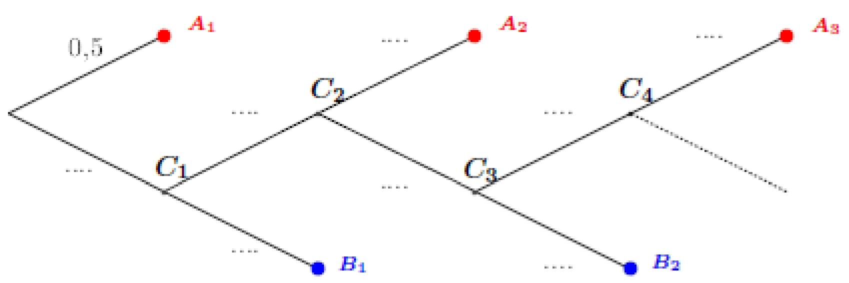


figure 1

b. Justifier que la probabilité p qu'Adam marque un point est la somme des puissances impaires de 0,5, c'est-à-dire : $p = 0{,}5 + 0{,}5^3 + 0{,}5^5 + \cdots$

c. En déduire que le serveur a, au début d'un échange, une probabilité de marquer le point égale à $\frac{2}{3}$.

2. On souhaite désormais calculer la probabilité qu'Adam marque 2 points.

a. Recopier et compléter l'arbre de la figure 2 décrivant les différents scores possibles.

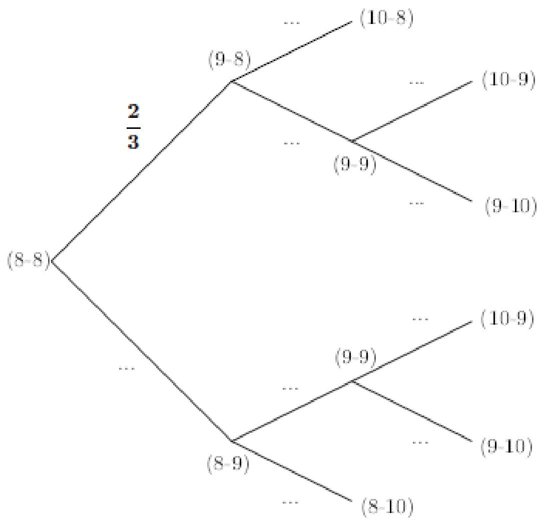


figure 2

b. En déduire la probabilité qu'Adam remporte le set si celui-ci se joue en 10 points.

3. Dans cette configuration, Bob doit-il choisir de jouer le set en 9 points ou en 10 points ?

DEUXIEME PARTIE : LES JOUEURS N'ONT PAS LE MÊME NIVEAU

Adam possède le service à 8 partout. On suppose désormais que la probabilité qu'a Adam de gagner un échange est égale à p avec $0 < p < 1$. On pose $q = 1 - p$.

1. **a.** En vous inspirant de l'arbre de la figure 1, montrer que la probabilité qu'Adam marque un point est la somme infinie : $p + p(qp) + p(qp)^2 + p(qp)^3 + \cdots$
b. En déduire les résultats figurant dans le tableau suivant :

Evénements	Adam marque un point en ayant le service initialement	Bob marque un point alors qu'Adam a le service initialement
Probabilités	$\dfrac{p}{1-pq}$	$\dfrac{q^2}{1-pq}$

c. Sans calculs, justifier les résultats indiqués dans le tableau suivant :

Evénements	Bob marque un point en ayant le service initialement	Adam marque un point alors que Bob a le service initialement
Probabilités	$\dfrac{q}{1-pq}$	$\dfrac{p^2}{1-pq}$

d. En vous inspirant de la figure 2, déduire que la probabilité qu'Adam remporte le set si celui-ci se joue en 10 points est $\frac{p^2(1-pq+2pq^2)}{(1-pq)^3}$.

2. Démontrer que Bob a intérêt à choisir de finir le set en 9 points si $p^4 - p^3 - 2p^2 + 3p - 1 > 0$.

3. On donne la factorisation suivante $p^4 - p^3 - 2p^2 + 3p - 1 = (1-p)^2(p+\Phi)\left(p - \frac{1}{\Phi}\right)$ où $\Phi = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$.
Conclure quant au choix de Bob de jouer le set en 9 ou 10 points en cas d'égalité à 8 partout.